目　录

中文辞条索引

中外数学

数学家

经典数学著作

数学学科史

数学哲学和数学方法论

数 学 教 育

数 学 符 号

数学名题与猜想

数学竞赛与数学奖

数 学 学 派

数学期刊、工具书、丛书

中 外 数 学

中国数学(**Chinese mathematics**)　中国是世界文明古国之一。数学是中国古代科学中一门重要学科,其发展源远流长,成就辉煌。根据它本身的特点,可以分为5个时期:(1)先秦萌芽时期;(2)汉唐初创时期;(3)宋元全盛时期;(4)西学输入时期;(5)近现代数学发展时期。

先秦萌芽时期　早在远古时代,人们通过生产和生活的实践活动,逐渐有了数量概念和认识了各种简单的几何图形。《易·系辞》中说:"上古结绳而治,后世圣人易之以书契"。距今约5~6千年的仰韶文化时期出土的陶器上已刻有表示数目字的符号,说明此时人们已开始用文字符号取代结绳记事了。西安半坡村出土的陶器上有直线、三角、方、菱形等各种对称及一些较复杂的几何图案,半坡村遗址上有圆形和正方形的屋基。《史记·夏本记》中说夏禹治水时已使用了规、矩、准、绳等作图和测量工具。农业和天文的需要促使早期数学知识萌发。

商代中期(约公元前13世纪)出现了甲骨文,其中有十进位制的记数法,共有13个独立的符号,记数用合文书写,出现的最大数字为三万。商代人还用10个天干和12个地支组成甲子、乙丑等60个名称来记60天的日期。到周代(公元前11世纪到公元前3世纪)又将以前的八卦发展成为六十四卦,表示64种事物。西周初期能用矩测量高、深、广、远,知道勾股形中的勾三、股四、弦五及环矩为圆等知识。西周青铜器上的金文数字与商代数字基本一致,是我们今天文字记数的源泉。此时我国已有整数和分数的四则运算,《韩诗外传》中还记载了公元前7世纪齐桓公招贤纳士之事,将会背诵"九九"乘法表的人当作贵客款待,而这在当时是很一般的学问。

春秋战国时期(公元前8世纪—公元前3世纪)算筹已得到普遍使用。算筹是一种特制的小竹棍,也有用木、骨、铁等材料制做的。解放以后在湖南、陕西、湖北、河北等地均有出土的实物。算筹式记数法采用10进位值制。《墨经》(约公元前4世纪)中说"一少于二而多于五,说在建位"。即一在个位少于二,在十位就多于五,每个数字的大小除由它本身表示的数值决定外,还要看它在整个数中所处的位置。《孙子算经》(约公元4世纪)中对算筹式记数法描述说:"一纵十横,百立千僵,千、十相望,万、百相当……",说明记数有纵横两种形式。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

记数时为避免混淆将纵横式交错放置，以空位表示零。这是世界上最早的10进位值制记数体系，其优越性十分明显，对世界数学的发展有划时代的意义。到了汉代还出现了表示正数的红筹和表示负数的黑筹。用算筹进行运算据推测可能在西周或更早时期就已产生，到15世纪珠算普及之前，算筹制度在中国沿用了两千多年，为中国古代数学的发展起了重要作用。

战国时期齐国人著的《考工记》中有许多关于分数、角度和标准量器的资料，其中分别用矩、勾、倨、宣、欘、柯、磬析表示直角、锐角、钝角、45°、67°30′、101°15′、151°52.5′(或135°)，还有用规(圆周)的部分(圆弧)表示刀和弓的大小。战国时期百家争鸣也促进了数学的发展，一些学派还总结和概括出与数学有关的许多抽象概念。其中著名的有《墨经》中关于某些几何名词的定义和几何命题，例如圆，一中同长也(从中心到周界有相同的长度)；方，柱隅四讙也(四边四角皆正)；平，同高也(高度相等)；直，参也(三点相齐)；次(相切)，无间而不相撄也(既无大小又不相合)；端(点)，体之无厚而最前者也(部分中没有大小并处于最前缘者)，等等。墨家还给出有穷和无穷的定义，说"域不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也"(在区域前缘连一根线也容不下为有穷，不论区域多大，在其前缘总能容下一线之宽为无穷)。稍后于墨子的庄子记叙了惠施等人的名家学说，例如至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一；无厚不可积也，其大千里等，还记叙了辩者桓团、公孙龙等人提出的23条问题，其中的"一尺之棰，日取其半，万世不竭"至今讲极限时还常常被引用。墨家和名家关于数学定义和数学命题的讨论对中国古代数学理论的发展很有意义，但这种重视抽象性和逻辑严密性的新思想没有得到很好地继承和发展。

汉唐初创时期 这一时期包括从秦汉一直到隋唐1000多年间的数学发展。秦汉是封建社会的上升时期，经济、文化和科学技术都得到迅速发展。中国古代四大发明之一的造纸术就是东汉形成的，它对数学教育的发展和数学知识的传播起到不可估量的作用。雕版印刷术的发明也在这一时期，对数学的发展同样起了重要作用。中国古代数学体系正是形成于这个时期，其主要标志是算术已成为一个专门的学科，以及一大批数学书籍的出现。

《汉书·艺文志》记载有《杜忠算术》16卷和《许商算术》2卷，这是最早见于著录的数学专著，但均已失传。1983年12月在湖北江陵张家山出土3大批竹简，其中有数学

著作《算数书》。该书抄写于西汉初年(约公元前 2 世纪),成书时间应更早,是一部比较完整的,也是目前可以见到的中国最早的数学专著。全书采用问题集形式,共有 60 多个小标题,90 多个题目,内容包括整数和分数四则运算、比例问题、面积和体积问题等等。

农业生产要求更精确的历法,约在战国晚期,已有了每年 365 又 1/4 日的“四分历”。随着天文学的发展,数学知识也不断丰富。《周髀算经》正是在这样的条件下出现的。它是一部解释盖天说的天文著作,约成书于公元前 1 世纪,而其中很多内容要早得多。在数学方面主要有两项成就:(1)勾股定理,卷上之一提出“故折矩,以为勾广三、股修四、径隅五”,这是勾股定理的一个特例。卷上之二记载陈子话说“以日下为勾,日高为股,勾股各自乘,并而开方除之,得邪至曰…”这是我国勾股定理普通形式的最早表述。陈子约是公元前 6、7 世纪人,大致与西方发现这一定理的古希腊数学家毕达哥拉斯(约公元前 560—公元前 480)同时代或稍早。(2)测量术,记述了矩的用途和勾股测量术,提出测量太阳高、远的陈子测日法,成为后来重差术的先驱,比西方“测量之祖”泰勒斯测量金字塔的成就在时间上大约同时,但在史料记载和方法上却好得多。《周髀算经》还有较复杂的开方问题和分数运算,并创造许多数学名词(如勾、股、弦、开方等),是研究古代天文学史和数学史的较完整的宝贵文献。

《九章算术》的出现标志着中国古代数学体系的形成。它经历了张苍(约公元前 200 年)、耿寿昌(约公元前 50 年)等几代人的整理、删补和修订,约成书于东汉初年(公元 1 世纪)。内容采用问题集形式,共 246 问,列为九章,分别是方田(各种形状的田地面积计算)、粟米(各种粮食谷物间按比例交换)、衰分(按比例分配)、少广(开平方、开立方)、商功(体积计算问题)、均输(按比例摊派赋税和徭役)、盈不足(根据两次假设求解问题)、方程(求解一次方程组)和勾股(有关勾股测量的各种问题),是战国、秦、汉封建社会创立并巩固时期数学发展的总结。主要成就有:世界上最早的系统分数理论,包括分数的四则运算和约分、通分、求最大公约数等方法;先进的比例算法,提出从已知三个数求第四个数的今有术,西方称为三率法,其完整叙述较中国晚好多年;开平方与开立方的方法,包括二次方程数值解法,是世界上最早记载这一具体运算法则的文献,在运算过程中还发展了筹算的位值制,并开辟了求解数字高次方程的途径;各种面积和体积公式,包括各种直线形以及圆、环、圆锥、圆台等面积和体积的正确的计算公式;勾股形解法,包括勾股定理的应用和求勾股数的方法,以及二次方程 $x^2+ax=b$ 的解法等;线性方程组解法,用算筹表示一次联立方程组,类似于由方程各系数构成的矩阵,创立遍乘、直除、连减等消元方法,比西方同类算法要早 1500 多年;负数概念和正、负数加、减法则,反映出对意义相反数量的正确理解,实现

数量范围的一次新扩充，在世界数学发展史上遥遥领先。就《九章算术》的特点来说，它形成了一个以筹算为中心，与古希腊数学完全不同的独立体系。它注重应用，内容大多来自生产和生活实践，理论密切联系实际，对以后中国数学发展的影响非常深远。此后一千多年中《九章算术》一直被当作教科书，隋唐时期还曾传到朝鲜、日本，成为这些国家当时的数学教科书。它的一些成就如十进位值制、今有术、盈不足术等还传到印度和阿拉伯，并通过这些国家传到欧洲，促进了世界数学的发展。

魏晋时期中国数学在理论上有了较大发展。吴国赵爽注《周髀算经》，汉末魏初徐岳撰《九章算书》注 2 卷（已失传），魏末晋初刘徽撰《九章算术》注 10 卷（263 年）、《九章重差图》1 卷（已失传）都出现在这个时期，其中赵爽和刘徽的工作被认为是中国古代数学理论体系的开端。赵爽是中国古代对数学定理和公式进行证明的最早的数学家之一，他约公元 3 世纪初对《周髀算经》做了深入研究，为该书写了序，并作了详细的注释，其中补充的“勾股圆方图及注”和“日高图及注”是数学史上极有价值的文献。“勾股圆方图”注文共有 530 余字，简练地总结了后汉时期勾股算术的辉煌成就，最早给出勾股定理的证明和解勾股形的 5 个公式，并对二次方程的解法提出新的见解。该文附有 6 幅插图（原图已失传），其证明主要利用了几何图形面积的换算方法。“日高图及注”亦用图形面积证明了汉代普通应用的重差公式，成为刘徽工作的先导。

刘徽注释《九章算术》的年代是根据《隋书·律历志》确定的。他的注不仅对《九章算术》的方法、公式和定理进行一般的解释和推导，而且在论述过程中多有创新，还撰写《重差》作为该书第 10 卷。唐初以后，《重差》以《海岛算经》为名单行。他重视逻辑推理，同时又注意几何直观的作用，采取“析理以辞，解体用图”的注释方法，在一定程度上可以将他的注释看作是对《九章算术》中许多算法的证明。主要成就有：创立割圆术，为圆周率的研究工作奠定了理论基础和提供了科学的算法。他的基本思想是将圆内接正多边形的边数不断加倍，使其周长和面积逐渐逼近圆的周长和面积，他指出“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”即极限情形是两者完全重合。他利用这种极限思想证明了圆的面积公式，并首次用理论的方法算得圆周率的近似值 157/50 和 3927/1250，其计算程序较古希腊数学家阿基米德的割圆方法简便；提出用无穷分割的方法证明直角方锥（阳马）与直角四面体（鳖臑）的体积之比恒为 2∶1，解决了一般立体体积的关键问题。在证明方锥、圆柱、圆锥、圆台体积公式时，实际上已应用了下列公理，即等高的两立体，其任意同高处的水平截面积成比例，则这两个立体体积亦成同样的比例，依此指出球的体积与其外切“牟合方盖”（两个等半径的圆柱正交的共同部分）的体积之比为 π∶4，为解

决球的体积提出了正确途径；从率（即比）的定义出发论述了分数运算（如齐同术）和今有术的道理，并推广今有术得到合比定理；根据率、线性方程组和正负数的定义阐明方程组解法中消元的道理，指出方程式个数少于未知数个数时，方程组的解只能是一个比值，在一个方程式中正与负可以同时变号，减法消元与加法消元可以统一为一种方法等；指出在开方求得整数后可以继续开方"求其微数"，不仅解决了求无理根的问题，而且提出十进分数（小数）概念，较西方同类概念的使用早一千多年；系统总结了重差术，并提出根据三次和四次测量结果进行推算的公式，使之成为当时世界上最先进的用于测量的数学方法。

南北朝时期中国长期处于战争和分裂状态，但由于社会的需要，数学仍在继续发展。《孙子算经》3卷、《夏侯阳算经》3卷（原本已失传，后人借此名另成书）、《张丘建算经》3卷就是这个时期的著作。从流传下来的两部算经来看，其体例依然摹拟《九章算术》，甚至有些题目也是为了解释《九章算术》的算法而设立的。也有一些难题和解法超出《九章算术》的范围，并对后来数学的发展有相当的影响，其中主要有：一次同余式组解法，《孙子算经》给出"物不知数问题"，导致求解一次同余组 $N\equiv 2(\mathrm{mod}3)\equiv 3(\mathrm{mod}5)\equiv 2(\mathrm{mod}7)$，解答为 $N=7\times 2+21\times 3+15\times 2-2\times 105=23$。该问题与古代历法中推算上元积年有关，南宋数学家秦九韶创造"大衍求一术"，完满地解决了这一问题；等差级数求和、求公差、求项数的方法，《张丘建算经》给出各种类型的题目及解答方法；不定方程的解法，《张丘建算经》给出"百鸡问题"，导致三个未知数的不定方程组，给出三组正确答案，创一问多答之先河。此外，《孙子算经》中记述了算筹表示数目的方法，"凡算之法，先识其位，一纵十横，百立千僵，千、十相望，万、百相当"，是后人论述算筹式记数法经常引用的根据。

祖冲之父子的工作在这一时期具有代表性，他们在《九章算术》刘徽注的基础上，将传统数学大大向前推进了一步，成为重视数学思维和数学推理的典范。他们同时在天文学上做出突出贡献，所编制的《大明历》从510年开始实施达80年。根据史书记载，祖冲之曾注释《九章算术》，并与他的儿子祖暅一起撰写了《缀术》6卷，这些著作均已失传。据《隋书·律历志》和李淳风《九章算术》注等史料记载，他们在数学上主要有三项成就：(1)求得较精确的圆周率，据推测，祖冲之在刘徽割圆术的基础上，将圆内接正多边形算至6144和12288边形，从而得到 $3.1415926<\pi<3.1415927$，其中的7位小数值是当时世界上最精确的圆周率，直到15世纪才由阿拉伯数学家卡西超过。他还得到圆周率的两个分数近似值，即约率22/7和密率355/113，其中的约率早已为阿基米德所知，而密率直到16世纪才由荷兰数学家奥托重新发现。祖冲之的工作使中国在圆周率的计算方面领先西方约一千年。(2)得到祖暅定理并求出球体积，祖暅总结了

刘徽的牟合方盖理论，提出"幂势既同，则积不容异"的定理，即等高的两立体，若其任意高处的水平截面积相等，则这两个立体体积必相等。他根据这个定理解决了刘徽没能解决的球体积公式。(3)发展了二次与三次方程的解法，祖冲之用"差幂"取代带从平方，用"差立"取代带从立方，可以解包括负系数在内的二次与三次方程，堪称"算氏之最者也"。

隋朝大兴土木，客观上促进了数学的发展。唐初王孝通撰《缉古算经》(约630)，主要是讨论木土工程中计算土方、工程的分工与验收以及仓库和地窖的计算问题。全书共20题，多数导致三次方程问题，如已知不等高的长方棱台体积和上底、下底、高、长的差，求上底、下底、高和长等。他在不用数学符号的情况下立出三次方程，不仅解决了当时的社会需要，而且为后来天元术的建立打下基础，这比西方13世纪斐波那契特殊三次方程的数值解早600多年。此外王孝通对传统的勾股形解法也有发展，用数字三次方程解决已知勾股形的勾股积与勾股差(或股弦差)求勾股等问题，还对二次方程给出两次开方法。

唐朝在数学教育方面有了长足发展。656年国子监设立算学馆，设有算学博士和助教。王孝通等人做过算学博士。算学馆共招生30人，由太史令李淳风等人编纂注释《算经十书》，作为算学馆学生用的课本。科举取士还设置明算科，考试内容也从十部算经中选题。《算经十书》除了已提到的《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《缉古算经》外，还有《五曹算经》、《五经算术》和《缀术》。后来《缀术》失传，南宋时用《数书记遗》补齐十书。李淳风等人编纂的《算经十书》对于保存古代数学经典起了重要作用，他们对《周髀算经》、《九章算术》及《海岛算经》所作的注解长期为人称道。特别是在《周髀算经》注中，不仅修改了经文和赵爽、甄鸾注中的一些缺陷，还给出测量中计算的新方法，并逐条校正了甄鸾对赵爽《勾股圆方图注》的误解，对后世读者帮助很大。

隋唐时期由于历法需要，天算学家创立了二次内插法，丰富了中国古代数学的内容。函数内插法最早是206年刘洪在《乾象历》中为了确定合朔时刻而使用的，那只是一次内插法。600年隋代天文学家刘焯在《皇极历》中提出一个推算日、月、五星视行度数的等间距二次内插公式。727年唐代天文学家一行(张遂)在《大衍历》中又提出不等间距的二次内插公式。822年晚唐时期天文学家徐昂造《宣明历》时提出形式上更简明的内插公式。这些为宋元时期的高次内插法奠定了基础。

汉唐时期中国数学在计算技术上有了很大改革，现传本《数书记遗》(题东汉徐岳撰，北周甄鸾注)中提出14种算法：积算、太乙、两仪、三才、五行、八卦、九宫、运筹、了知、成数、把头、龟算、珠算、计数，其中积算是普通的筹算，太乙算、两仪算、三才算和珠算都是用珠的槽算

盘，在技术上是一项重要改革。特别是“珠算”，继承了筹算五升十进与位值制的优点，又克服了筹算纵横记数与置筹不便的缺点，成为后世流行算盘珠算的雏形。《隋书·经籍志》记载了19种算书，《新唐书·艺文志》增加了35种，其中一些就是专门论述算法的。唐代的算法改革使乘除法可以在一个横列中进行运算，它既适用于筹算，也适用于珠算，其中分解因数法和化乘除为加减等方法颇具特色。

宋元全盛时期 这一时期约从1000年到14世纪初，共300多年。北宋王朝统一了中国，使农业、手工业、商业迅速繁荣，科学技术突飞猛进，火药、指南针、印刷术三大发明得到了广泛应用。仅沈括《梦溪笔谈》(约1088)中就有200多条论述自然科学的记载，内容涉及数学、物理学、化学、天文、地质、地理、气象、工程技术、生物和医学等等，其中指南针和活字印刷术是最早的记载。这种情形为数学发展创造了良好的条件。1084年秘书省第一次印刷出版了《算经十书》，1213年鲍澣之又进行翻刻，这又影响到宋元数学的发展。在明代中叶珠算广泛流传之前，中国古代数学以筹算为主，并形成独有的特色。宋元数学使这种“筹算数学”达到极盛。从11世纪到14世纪出现了一批著名的数学家和数学著作，例如贾宪(11世纪中叶)的《黄帝九章算法细草》(已失传)，刘益(12世纪中叶)的《议古根源》(已失传)，秦九韶的《数书九章》(1247)，李冶的《测圆海镜》(1248)和《益古演段》(1259)，杨辉的《详解九章算法》(1261)、《日用算法》(1262)和《杨辉算法》(1274—1275)，朱世杰的《算学启蒙》(1299)和《四元玉鉴》(1303)等等，其中很多领域都达到古代数学的高峰，一些成就还是当时世界数学的高峰。主要列举如下：

高次方程数值解法。其基础是贾宪的“增乘开方法”。杨辉在《九章算法纂类》中载有贾宪的“增乘开平方法”和“增乘开立方法”。在《详解九章算法》中载有贾宪的“开方作法本源图”、“增乘方法求廉草”和用增乘开方法开4次方的例子，其中开方作法本源图现称“贾宪三角”，即指数为正整数的二项式定理系数表，西方称为“帕斯卡三角形”(17世纪)。12世纪中叶刘益把增乘开方法推广到数字高次方程(包括系数为负的情形)，给出一个四次方程的解。1247年秦九韶将增乘开方法推广到求解一般高次方程的一种普遍的数字解法，他把解法分成各种类型，如n次项系数不等于1的方程，奇次幂系数均为零的方程等。当方程的根不是整数时，他采取继续求根的小数，或用减根变换方程各次幂的系数之和为分母、常数为分子表示根的非整数部分。在求根的第2位数时，他还提出以一次项系数除常数项为根的第2位数的试除法，其演算程序与西方19世纪提出的鲁菲尼—霍纳方法基本一致，但时间上早了500多年。

高次方程立法与高次联立方程立法与解法，即天元术与四元术。宋代以前，数学家要列出一个方程，往往需要复杂的数学推导技巧和大量

的文字说明，随着解方程方法的完善，列方程的方法也被深入研究。用天元(相当于现在的 x)作为未知数符号，列出高次方程，古代称为天元术。这是中国数学史上首次引入符号，并用符号运算来解决建立高次方程的问题。现存最早的天元术著作是李冶的《测圆海镜》。李冶在一次项系数右旁记一"元"字(或在常数项右旁记一"太"字)，元以上的系数分别表示各正次幂，元以下的系数表示常数和各负次幂(有时顺序倒转过来)。列方程的具体方法是，根据问题的已知条件，列出两个相等的多项式，令二者相减，即得一个数字高次方程，这也是世界上最早的多项式代数运算。从天元术推广到多元的高次联立方程是宋元数学家的一大贡献，继二元、三元的专著论述后，朱世杰的《四元玉鉴》系统总结了四元术。他用天、地、人、物代表四个未知数，将常数放在中央，其右侧仍记一"太"字，四元的各次幂放在上、下、左、右四个方向上，按幂次逐一向外扩展，其他各项放在四个象限中。他提出四元消元法，先选择一元为未知数，其他元组成的多项式作为这未知数的系数，列成若干个一元高次方程式，然后用互乘相消法逐步消去这一未知数。重复这一步骤便可消去其他未知数，得到一个一元高次方程，最后用增乘开方法求解。这一成果被认为是中国筹算代数学的最高峰，比西方的同类算法早 400 多年。

一次同余式组解法。它起源于天文学中推算"上元积年"，早在西汉历法中已有这方面的数据，但没有具体算法的记载。《孙子算经》"物不知数"给出具体例子的解法，到秦九韶《数书九章》时把它一般化，后人称之为"大衍求一术"。设一次同余式组 $N = R_i(\mathrm{mod}\, a_i)(i=1,2,3,\cdots,n)$，$M = a_1a_2\cdots a_n$，秦九韶把求 N 归结为求出一组 k_i，使之满足 $k_i\dfrac{M}{a_i}\equiv 1(\mathrm{mod}\, a_i)$，并用更相减损(辗转相除)的方法给出 k_i 的一个计算程序，完满地解决了这一问题。他还讨论了模数 a_i 是收数(小数)、通数(分数)、元数(一般正整数)、复数(10^n 的倍数)非两两互素的情形，分别给出将它们变为两两互素的模数的方法，比西方同类结果早500年。现在这一类问题的解法被公认为"中国剩余定理"。

高次内插法与高阶等差级数求和，即招差术和垛积术。元代天文学家王恂，郭守敬等人在《授时历》中根据"平、定、立"三差，创用三次内插法推算日月运行的速度和位置，解决了三次内插值问题。秦九韶在"缀术推星"题和朱世杰在《四元玉鉴》"如象招数"题中都提到内插法(招差术)，朱世杰还得到一个四次函数的内插公式。西方到17世纪才有这类结果，时间上晚300多年。北宋科学家沈括在《梦溪笔谈》卷18中提出"隙积术"，开始研究某些物品按一定规律堆积起来求总数的问题，并推算出长方台垛的求和公式，开创高阶等差级数求和的先河。杨辉在《详解九章算法》中讨论了方亭垛、方锥垛和三角垛的求和问题，给出了正确的公式解答。朱世杰在《四元玉鉴》和《算学启蒙》中把高阶等

差级数求和问题与二项系数表结合起来，得到一系列重要的高阶等差级数求和公式。例如三角形垛 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{P!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$ $(p=1,2,3,\cdots 6)$，岚形垛 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{P!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)r=\frac{1}{(p+2)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)[(p+1)n+1]$ $(p=1,2,\cdots,5)$等。垛积术与招差术可以互相推演，朱世杰掌握了三角垛公式，因而易于推导出一般的招差公式，反之亦然，因此朱世杰的垛积招差术全面推进了宋元数学家在这方面的研究工作。

珠算的出现。中国古代数学在筹算的基础上取得辉煌成就，但作为主要计算工具的算筹存在不少缺点，如使用不便，速度和效率不高等。随着农业、手工业和商业的发展，日益需要进行大量繁杂的计算，因此算筹和筹算越来越不能适应实际需要，计算技术改革势在必行。改革的主要内容仍是乘除法。沈括《梦溪笔谈》中介绍了各种因乘法，最早出现“九归”，并指出算术“见简即用，见繁即变，不胶一法”的原则。朱世杰《算学启蒙》中最早出现“留头乘”和“归除”，并进一步完善了“九归”。杨辉的《乘除通变本末》(1274)也做了这种完善工作。丁巨的《丁巨算法》(1355)，何平予的《详明算法》(1373)和贾亨的《算法全能集》将朱世杰提出的“撞归”、“起一”等算法具体化。朱世杰的著作中还记载了许多计算歌诀，有些与后来珠算中常用的口诀完全一致。在形式上“留头乘”与“旧除”的出现使乘除不需要任何变通便可以在一个横列里进行，与珠算的方法也完全一样。在算法改革的同时，穿珠算盘在北宋已可能出现，张择端的《清明上河图》中有一个不很清楚的算盘，需继续考证。但最迟到元代，珠算盘与珠算术已完成。

其他成就。勾股形解法在宋元时期有新的发展。朱世杰《算学启蒙》提出已知勾股和、股弦和求解勾股形的方法。李冶《测圆海镜》对勾股容圆问题进行了详细研究，从14个勾股形中得到692条识别杂记，阐明各勾股形的线段之间与线段的和、差、积之间的关系，还得到9个容圆公式，这些都补充了《九章算术》的不足，丰富了中国古代几何学的内容；球面三角学的探索，起源于天文学，已知黄道与赤道的夹角和太阳从冬至点向春分点运行的黄经余弧，求赤经余弧和赤纬度数导致解球面直角三角形，王恂、郭守敬、沈括等人有所论述，给出正确的推算步骤；纵横图(幻方)研究的创立，杨辉在《续古摘奇算法》中指出，古代九宫图是一个从$1\sim3^2$的9个自然数排成三行三列，其行、列和对角线之和均为15的三行纵横图，这种图可以推广到几行，由1到n^2个数排成，它的行、列和对角线之和为$n(1+n^2)/2$。书中列出4～10行共8个纵横图，并给出三行和四行纵横图的构造方法；小数(十进分数)概念的提出与表示法，刘徽开方数中已提出十进分数(微数)，现传本《夏侯阳算

经》已有化名数为十进小数(简称小数)的例子,秦九韶将解高次方程时所得的根更明确地表示成小数的形式,他用名数作为小数符号,例如159.36寸表示为

𝍠 𝍭 𝍨 𝍫 𝍥
寸

李冶则依靠算式的位置表示,而刘瑾是将小数部分下移一格,较为实用。杨辉和朱世杰的化斤价为两价的歌诀,是小数的具体应用。在国外,中亚细亚的数学家卡西是第一个系统应用小数的人,他于1427年用小数给出2π的近似值,而小数理论的明确陈述是荷兰数学家斯蒂文,他在1585年写的《论十进》被认为是小数理论的最早专著。

宋元时期民间数学教育有了较大发展。如李冶曾在封龙山隐居讲学,秦九韶"尝从隐君子受数学",杨辉本人是一个数学教育家,朱世杰更是"以数学名家周游湖海二十余年","四方之来学者日众"。《算学启蒙》等书是很好的数学入门书。《乘除变通本末》中还给出一个"习算纲目",实为教学大纲。其中提倡循序渐进与熟读精思,注重培养和提高计算能力等。许多数学书中出现歌谣式的数学问题和算法口诀,说明数学的传授已走出官学的大门,逐渐深入到民间。

西学输入时期 这一时期约从14世纪中明代建立到20世纪初清代结束共500多年,属封建社会晚期。13世纪初的考试制度中已砍掉数学内容,明代时大兴八股考试制度,鄙视知识分子,使数学除珠算外出现全面衰落。到明清之际西方数学开始传入我国时,国家天文台已经很少有人可以进行历法的编制工作了。16世纪末以后,西方初等数学陆续传入中国,使中国数学研究出现了一个中西融合贯通的局面。鸦片战争以后,近代(高等)数学开始传入中国,中国数学转入一个以学习西方数学为主的时期。直到19世纪末与20世纪初,中国的近代数学研究才真正开始。

商业数学的发展。从明初到明中叶,商品经济有所发展,与之相适应的记数制度和计算方法有了较大发展。中国古老的算筹式记数法在13世纪已出现易于记载的纵横两式"简易数码",到16世纪发展成为笔划较少的习用数码,也称为商业数码,它在应用时还有更简洁的书写体形式。1450年,明朝数学家吴敬在《九章算法比类大全》中记载了便于乘法的"格子算",称之为"写算",以区别筹算和珠算。明代最大的数学成就还是珠算的普及。明初《魁本对相四言杂字》(1371)是一部儿童看图识字的课本,书中画有算盘图。《鲁班木经》(15世纪上半叶)中有近代形式的算盘式样,并将它作为家庭必需品列入一般的木器家具手册中,说明珠算已普及。随后珠算著作陆续出现,吴敬《九章算法比类大全》(1450)和王文素《古今算学宝鉴》(1524)记载了一些只有珠算中才能有的口诀,如"去一五下还四"等;徐心鲁《盘珠算法》(1573)和柯尚迁《数学通轨》(1578)除了给出上有二珠,下有五珠,中间用木制横梁隔开的算盘图式外,还出现加法和

减法口诀，是珠算术的重要组成部分；到程大位的《直指算法统宗》(1592)问世后，珠算理论已成系统。该书详细介绍了算盘的定位方法、四则运算口诀和其他简算口诀，这些口诀至今仍在继续使用。书中共有595个应用题，全部用珠算盘演算，包括开平方开立方法及其在解二次、三次方程中的应用等。该书出版后“风行宇内”，以致于“握算持筹之士，莫不家藏一编”，成为中国古算书中在国内外流传和影响最广的数学著作之一，对珠算的普及起了重要作用，亦标志着从筹算到珠算转变的完成。在世界同类计算工具中中国算盘可以说是最好的。但是由于珠算流行，筹算几乎绝迹，建立在筹算基础上的古代数学传统也逐渐失传，数学出现长期停滞，而此时西方数学却大大地向前发展了。

早期传入的西方数学。中外数学交流由来已久，《隋书·经籍志》著录了已失传的《婆罗门算法》等书，唐代瞿昙悉达的《开元占经》介绍了许多印度数学知识，如印度数码，圆弧量法，正弦函数表等，可惜未被中国数学家采用。朱世杰《算学启蒙》中的大数和小数记法吸取了印度佛教经典中的“极”、“恒河沙”、“虚”、“空”等名称。西安元朝安西王府遗址出土的铁板上，画有东阿拉伯数码表示的六阶纵横图。到16世纪上半叶西方国家以传教士为先导，开始在远东实行文化和经济渗透。1582年意大利传教士利玛窦到中国，1606年以后，先后与徐光启翻译《几何原本》前6卷(1607)、《测量法义》1卷(1607—1608)，与李之藻编译《圜容较义》(1608)和《同文算指》(1613)。其中《几何原本》是现传的中国第一部数学翻译著作，也是影响最大的一部著作，其严谨的逻辑体系和演绎方法深受徐光启推崇，认为它是“度数之宗”，主张“举世无一人不当学”。这部译著也被后人称赞为“字字精金美玉，是千古不朽之作”。其中绝大部分名词都是首创，有许多至今仍在沿用。徐光启本人撰写的《测量异同》和《勾股义》就是应用《几何原本》的逻辑推理方法论证中国的勾股测望术。他主持编译的《崇祯历书》137卷(1629—1633)主要介绍欧洲天文学家第谷的地心学说，其中天文学和数学基本理论占全书30%，内容还包括德国数学家雷格蒙塔努斯(即玉山若干)的三角学、英国数学家纳皮尔的算筹和意大利科学家伽利略的比例规等等，说明徐光启对数学理论的重视。《同文算指》是一部介绍西方算术知识的著作，依据德国数学家克拉维乌斯实用算术编译，吸收了程大位《算法统宗》里的一些内容，其中系统介绍了西方的笔算，使笔算逐渐得到推广，对中国算术发展有较大影响。但书中把记数和运算符号改换成中国数字，没有使用原著的印度—阿拉伯数码，是一件憾事。在输入的西方数学中仅次于几何的是三角学。在此之前三角学只有零星知识，而此后获得迅速发展。介绍西方三角学的著作有邓玉函编译的《大测》2卷(1631)、《割圆八线表》6卷和罗雅谷的《测量全义》10卷(1631)。其中《大测》主要说明三角八线(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割、正

矢、余矢)的性质、造表方法和用表方法;《割圆八线表》是间隔为分的五位三角函数表;《测量全义》增加《大测》所缺的平面三角知识,给出积化和差公式及球面三角的若干定理,并附有一份间隔15′的四位三角函数表。此外在《崇祯历书》中还片断介绍了有关圆锥曲线的数学知识。

中西数学的会通。入清以后,传教士仍然受到清王朝的信任和重用,继续进行改历工作。1646年波兰传教士穆尼阁来华,薛风祚、方中通等人跟随他学习西方科学。穆尼阁去世(1656)后,薛风祚据其所学,编成《历学会通》(1664),包括《比例对数表》1卷(1653)、《比例四线新表》1卷和《三角算法》1卷等数学内容。前两书是介绍英国数学家纳皮尔和布里格斯发明增修的对数,分别给出1～20000的六位对数表和六位三角函数(正弦、余弦、正切、余切)对数表,并简单解释了将乘除运算化为加减运算的道理。后一书丰富了《崇祯历书》中的三角学内容,给出半角公式、半弧公式及几种比例式等。对对数理论进行解释的还有方中通的《数度衍》(1661),为对数在历法计算中的实际应用起了作用。会通中西数学的杰出代表是梅文鼎,他坚信中国传统数学“必有精理”,对古代数学名著做了深入研究,同时又能正确对待西方数学,使之在中国扎根。他在《方程论》(1672)、《勾股举隅》和《少广拾遗》(1692)中分别对线性方程组解法,勾股形解法和高次幂求正根的方法进行了整理和研究,使濒于枯萎的明代数学出现生机。他在会通西方数学时有所创造,对许多“不详其理”的公式和定理进行证明,其《梅氏丛书辑要》60卷博大精深,仅数学著作就有13种40卷。与梅文鼎同时代的数学家还有王锡阐和年希尧等人。王锡阐在《圜解》1卷中证明了两角和、差的正弦和余弦公式,并对涉及的名词概念逐一定义。年希尧的《视学》2卷(1729—1735)是最早介绍西方透视学的著作,亦增加许多新成果,并附有大量精美插图。中西会通的代表作之一是康熙皇帝“御定”的《数理精蕴》53卷(1723),上编5卷“立纲明体”,包括《几何原本》3卷,《算法原本》1卷。下编40卷“分条致用”,包括算术、代数、平面几何、平面三角、立体几何等初等数学,另附有数学用表四种8卷,包括素数表、对数表和三角函数表,是一部比较全面的初等数学百种全书,对当时的数学研究有一定影响。明安图、董祐诚、项名达等数学家各自依据《数理精蕴》提出“连比例方法”,对18世纪初法国传教士杜德美传入的“弧求正弦”、“弧求正矢”和“圆径求周”三个无穷级数公式进行研究,获得一些创造性结果。明安图积30余年研究心得,于晚年草成《割圆密率捷法》4卷,1774年由他的学生陈际新等人续成。他除了证明上述三个公式外,还创造了“弧求通弦”、“弧求正矢”、“通弦求弧”、“正矢求弧”、“正弦求弧”、“正矢求弦”6个新公式。此后董祐诚在《割圜连比例图解》2卷(1819)中将明安图的9个公式概括为关于弧、弦、矢三者关系的4个公式,项名达又在《象数一原》6卷

(1837，由戴煦续成)把董祐诚的4个公式概括为两个公式。该书所附《椭圆求周术》正确解决了椭圆求周长问题，与戴煦为该书补写的《椭圆求周图解》(1857)一起得到符合椭圆积分法的计算程序。戴煦本人还著有《对数简法》2卷(1845)、《续对数简法》1卷(1846)和《外切密率》4卷(1852)，前两书化简对数计算，将二项式定理的指数推广到任意有理数，得到对数函数的幂级数展开式，后一书补充了正切、余切、正割、余割四个幂级数公式。中西数学会通时期的晚期代表人物是李善兰，他同时又是19世纪50年代近代数学传入中国的先驱。他于1845年著有《方圆阐幽》1卷，《弧矢启秘》2卷和《对数探源》2卷。其中《方圆阐幽》里创造尖锥术，是指对一切自然数 n 的乘方数 x^n 都可以用线段长表示，它们可以积迭成 n 乘尖锥面。他的尖锥面表示法已具有解析几何的坐标表示思想，求积法相当于幂函数的定积分公式。李善兰利用尖锥术论证了二项平方根的幂级数公式，圆周率 π 的幂级数公式，正弦、正切、正割、正矢等三角函数及其反三角函数的幂级数展开式和对数函数幂级数等公式。清代数学家在会通工作中得到的成果在时间上要晚于西方数学家的同类工作，但都是独立做出的，具有许多创造，为不久之后顺利接受微积分等近代数学知识奠定了基础。

传统数学的整理与研究。1723年雍正即位后，明令禁止中外交往，闭关锁国，导致西方科学停止输入中国，同时在国内实行高压政策，屡兴文字狱，加强思想控制。这种情形使一般学者不能接触西方数学，又不敢过问经世致用之学，只好埋头故纸堆，进行辑佚、考证、校勘和注疏工作。乾嘉年间逐渐形成一个以考据学为主的乾嘉学派。1773年开设四库全书馆，辑录《永乐大典》保存佚书和征集私家藏书，于1781年编成《四库全书》近八万卷，其中数学著作有《算经十书》和宋元时期的著作。负责这些著作纂修和校对的是戴震和李潢。戴震对《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《五经算术》4部著作详加校勘，改正许多误文夺字。李潢著有《九章算术细草图说》9卷，《海岛算经细草图说》1卷和《缉古算经考注》2卷，亦多有独到见解。其他的整理和研究成果有李锐注《数书九章》、《测圆海镜》和《益古演段》，沈钦裴著《四元玉鉴细草》2卷(1829)、罗士琳撰《四元玉鉴细草》24卷(1834)等，他们为保存濒于湮没的数学典籍做出重要贡献。在研究传统数学时许多数学家还有发明创造，例如焦循在《加减乘除释》(1798)，用天干字表示具体的数，列出四则运算的基本定律，然后以此说明古代算法原理；汪莱在《衡斋算学》7册(1796—1805)中得到与韦达定理相当的结果及一类三次方程有正根的判别条件；李锐在《开方说》(1817)中得到类于笛卡儿符号法则的结论；李善兰在《垛积比类》(约1859)中得到三角自乘垛求和公式，相当于 $\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}^2=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}^2\binom{n+2p-j}{2p+1}$，其中

$\binom{l}{m}=\frac{l!}{m!(l-m)!}$，现在称之为“李善兰恒等式”。这些工作较宋元时期的数学进了一步，虽比西方数学晚些，但并没有受西方近代数学的影响，是独立完成的。与此同时，阮元、李锐等人编写了一部天文学家和数学家传记《畴人传》46卷(1795—1810)，收集从黄帝时期到嘉庆四年(1799)已故的天文学家和数学家270余人，以及明末以来介绍西方天文数学的传教士41人，以史料翔实，评价精辟而著称。后罗士琳撰《畴人传续编》6卷(1840)，华世芳写《近代畴人著述记》(1884)，诸可宝续《畴人传三编》7卷(1886)，使总人数达约450人。1898年黄钟骏撰《畴人传四编》11卷，虽人数大增，但质量欠佳，颇受非议。

近代数学的传入。1840年鸦片战争后，闭关锁国政策被迫中止。英国人在上海设立墨海书馆，介绍西方数学。后受“洋务运动”促进，同文馆内添设算学(1866)，上海江南制造局内添设翻译馆，由此开始第二次翻译引进的高潮。主要译者和著作有：李善兰与英国传教士伟烈亚力合译的《几何原本》后9卷(1857)，使中国有了完整的《几何原本》中译本；《代数学》13卷(1859)，以英国数学家德摩根的符号代数著作为底本；《代微级拾级》18卷(1859)，是中国第一部微积分学译本。李善兰与英国传教士艾约瑟合译《圆锥曲线说》3卷，华蘅芳与英国传教士傅兰雅合译《代数术》25卷(1872)，《微积溯源》8卷(1874)，均在书中题“英国华里司辑”，《决疑数学》10卷(1880)，是中国第一部概率论译本。邹立文与美国传教士狄考文合译《形学备旨》10卷(1885)、《代数备旨》13卷(1891)、《笔算数学》3册(1892)，谢洪赉与美国传教士潘慎文合译《代形合参》3卷(1893)，《八线备旨》4卷(1894)等。在这些译著中，创造了许多数学名词和术语，至今仍在应用。其中一些书被用作各地兴办新法学校的教科书，多次印刷发行。中国数学家开始比较系统地接触到一些先进的数学知识，深入研究后写出一些著作，主要有：李善兰的《尖锥变法解》1卷、《考数根法》1卷(1872)，夏鸾翔的《洞方术图解》2卷(1857)、《致曲术》1卷、《致曲图解》1卷等，可以说是第二次中西会通的研究成果，标志中国数学开始进入变量数学领域，逐步完成由初等数学向高等数学的转变。

中国数学教育在这一时期有较快发展。19世纪中下相继办起一批教会学校，如上海约翰书院(1848)、格致书院(1874)，山东文会馆(1864)，北京文汇书院(1888)等，一般都讲授数学课程，选用原文数学著作或由传教士们编译的数学课本。1862年北京创办同文馆，是中国最早自办的新式学校，1866年添设算学馆，李善兰任总教习。后又设立上海广方言馆，天津北洋水师学堂等，多设有数学课程，选用李善兰、华蘅芳等人翻译的书籍。1898年建立京师大学堂，同文馆并入。1905年废除科举，建立西方式学校教育，使用的课本也与西方其他各国相仿。此外，19世纪末出现几个

专门出版数学书的“算学书局”。1897年黄庆澄在浙江温州创办《算学报》,1900年杜亚泉在上海出版《中外算报》,1912年崔朝庆在成都创办《数学杂志》,促进了数学知识的普及和数学研究的开展。

近现代数学发展时期 这一时期是从20世纪初至今的一段时间,常以1949年新中国成立为标志划分为两个阶段。

中国近现代数学开始于清末民初的留学活动。较早出国学习数学的有:1903年留日的冯祖荀,1908年留美的郑之蕃,1910年留美的胡明复和赵元任,1911年留美的姜立夫,1912年留法的何鲁,1913年留日的陈建功和留比利时的熊庆来(1915年转留法),1919年留日的苏步青等人。他们中的多数回国后成为著名数学家和数学教育家,为中国近现代数学发展做出重要贡献。其中胡明复1917年取得美国哈佛大学博士学位,成为第一位获得博士学位的中国数学家。他的博士论文《平直积分微分方程论》两年后发表于《美国数学会学报》,成为中国数学家第一篇公开发表的现代数学论文。随着留学人员的回国,各地大学的数学教育有了起色。最初只有北京大学1912年成立时建立的数学系,1920年姜立夫在天津南开大学创建数学系,1921年和1926年熊庆来分别在东南大学(今南京大学)和清华大学建立数学系,不久武汉大学、齐鲁大学、浙江大学、中山大学陆续设立了数学系,到1932年各地已有32所大学设立了数学系或数理系。1930年熊庆来在清华大学首创数学研究部,开始招收研究生,陈省身、吴大任成为国内最早的数学研究生。1931年陈建功和苏步青在浙江大学开办数学讨论班,这一形式后来也推广到其他学校。二、三十年代出国学习数学的还有江泽涵(1927)、陈省身(1934)、华罗庚(1936)、许宝騄(1936)等人,他们都成为中国现代数学发展的骨干力量。同时外国数学家也有来华讲学的,例如英国的罗素(1920),美国的伯克霍夫(1934)、奥斯古德(1934)、维纳(1935),法国的阿达马(1936)等人。1935年中国数学会成立大会在上海召开,共有33名代表出席。1936年《中国数学会学报》和《数学杂志》相继问世,这些标志着中国现代数学研究的进一步发展。

解放以前的数学研究集中在纯数学领域,在国内外共发表论著600余种。在分析学方面,陈建功的三角级数论,熊庆来的亚纯函数与整函数论研究是代表作,另外还有泛函分析、变分法、微分方程与积分方程的成果;在数论与代数方面,华罗庚等人的解析数论、几何数论和代数数论以及近世代数研究取得令世人瞩目的成果;在几何与拓扑学方面,苏步青的微分几何学,江泽涵的代数拓扑学,陈省身的纤维丛理论和示性类理论等研究做了开创性的工作;在概率论与数理统计方面,许宝騄在一元和多元分析方面得到许多基本定理及严密证明。此外,李俨和钱宝琮开创了中国数学史的研究,他们在古算史料的注释整理和考证分析方面做了许多奠基性的工作,使我国的民族文化遗产重放光

彩。

新中国成立后，党和国家非常重视科学事业的发展。1949年11月即成立中国科学院。1951年3月《中国数学学报》复刊(1952年改为《数学学报》)，1951年10月《中国数学杂志》复刊(1953年改为《数学通报》)。1951年8月中国数学会召开建国后第一次全国代表大会，讨论了数学发展方向和各类学校数学教学改革问题。1955年中国数学会创办《数学进展》。1956年中国科学院颁发科学奖金，奖励有重要科学成果的作者。华罗庚以《典型域上的多元复变函数论》、吴文俊以《示性类及示嵌类的研究》获一等奖，苏步青以《K展空间和一般度量空间的几何学、射影空间曲线论》获二等奖。50年代中外数学交流也增多，华罗庚、苏步青、陈建功、吴文俊、李俨等人先后到保加利亚、日本、波兰、苏联、罗马尼亚、印度等国访问、讲学或参加学术会议，亦请进匈牙利、苏联、东德、波兰等国学者来华讲学。同时数学教育有了重大改革。1952年制订《中学数学教学大纲(草案)》，1956年开始全国中学数学竞赛。50年代还翻译和自编了大量初等数学和高等数学教科书，奠定数学教学与研究的基础。

建国后的数学研究取得长足进步。50年代初期就出版了华罗庚的《堆垒素数论》(1953)、苏步青的《射影曲线概论》(1954)、陈建功的《直角函数级数的和》(1954)和李俨的《中算史论丛》5集(1954—1955)等专著，到1966年，共发表各种数学论文约2万余篇。除了在数论、代数、几何、拓扑、函数论、概率论与数理统计、数学史等学科继续取得新成果外，还在微分方程、计算技术、运筹学、数理逻辑与数学基础等分支有所突破，有许多论著达到世界先进水平，同时培养和成长起一大批优秀数学家。

60年代后期，中国的数学研究基本停止，教育瘫痪、人员丧失、对外交流中断，后经多方努力状况略有改变。1970年《数学学报》恢复出版，并创刊《数学的实践与认识》。1973年陈景润在《中国科学》上发表《大偶数表示为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》的论文，在哥德巴赫猜想的研究中取得突出成就。此外中国数学家在函数论、马尔可夫过程、概率应用、运筹学、优选法等方面也有一定创见。

1976年以后，中国数学迎来发展的新时期。1978年11月中国数学会召开第三次代表大会，标志着中国数学的复苏。1978年恢复全国数学竞赛，1985年中国开始参加国际数学奥林匹克数学竞赛。1981年陈景润等数学家获国家自然科学奖励。1983年国家首批授于18名中青年学者以博士学位，其中数学工作者占2/3。1986年中国第一次派代表参加国际数学家大会，加入国际数学联合会，吴文俊应邀作了关于中国古代数学史的45分钟演讲。近十几年来数学研究硕果累累，发表论文专著的数量成倍增长，质量不断上升。但同世界先进水平相比还有较大差距。老一辈数学家仍在辛勤耕耘，一大批中青年数学工作者脱颖而出。中国已两次(1989年，

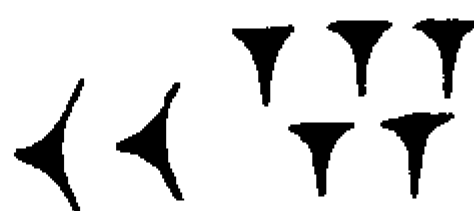
1990 年)获得国际数学奥林匹克团体总分第一名,预示着数学事业的发展后继有人。1985 年在庆祝中国数学会成立 50 周年年会上,已确定中国数学发展的长远目标。代表们立志要不懈地努力,争取使中国在世界上早日成为新的数学大国。

美索不达米亚的数学
(Mathematics in Mesopotamia)

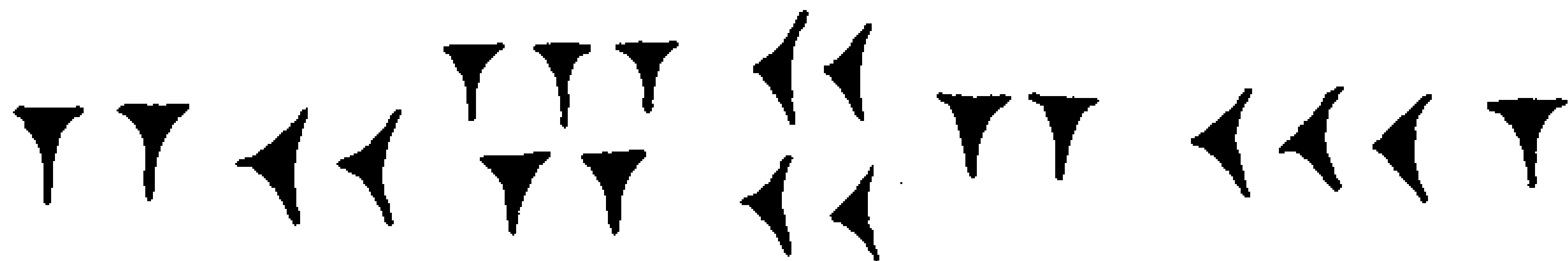
亚洲西部的底格里斯河与幼发拉底河之间的地带,通常叫做两河流域,它和尼罗河流域一样,也是人类早期文明的发祥地之一。这块地域古代叫做美索不达米亚。最早居住在这里的民族有苏美尔人和阿卡德人。公元前 19 世纪,这里建立了巴比伦王国。这个王国的政权几经更迭,统治者变动频繁。一般称公元前 19 世纪至公元前 6 世纪间该地区的文化为美索不达米亚文化,相应的数学称美索不达米亚数学。

美索不达米亚地区曾广泛使用一种楔形文字,先用削尖的木笔在软泥板上刻写,然后烧干或晒干,使它坚硬如石。这些泥板被埋在地下数千年,经久不坏。19 世纪上半叶,考古学家在美索不达米亚挖掘出大约 50 万块刻有文字的泥板,其中有 300 块被鉴定为数学泥板。其中有些是公元前 2000 年左右的,而大部分是公元前 600 年到公元 300 年间的。这些泥板上载有数字表和一些数学问题。现在关于巴比伦的数学知识就来源于这些泥板。

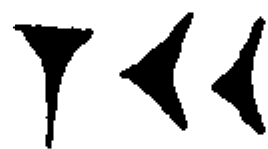
大约在公元前1800—前1600年间,巴比伦人就使用了 60 进制记数法。对小于 60 的整数,使用 1(𒁹)和 10(𒌋)两种记号来表示,如 $25=2\times10+5$,表示为



大于 60 的数,用位置制记数法,也是用上面两种记号来表示,如 $524551=2\times60^3+25\times60^2+42\times60+31$ 表示为



这里的𒁹和𒌋都可以表示 60 的各次幂,因为没有零号,这种记数法是不完善的。例如



既可以表示 80,又可以表示 3620,究竟表示那个数,要根据上、下文的内容来确定。有的地区还出现了十进制和六十进制混合的记数法。

巴比伦人进行算术运算依赖于乘法表、倒数表、平方表、立方表等。在一块公元前 1600 年的泥板上,记有 $\sqrt{2}$ 的近似值 1.4142155,人们推想他们已经知道开平方的近似公式,或掌握某种开平方的方法。

巴比伦人有比较丰富的代数知识,许多泥板中载有一次和二次方

程的问题，他们解决二次方程问题的过程与现代用公式解这类方程的过程一致，但是他们只求正根。所谓方程是用语言叙述的，偶尔用记号表示未知量。在巴比伦的泥板中，还发现有相当于三次方程和含多个未知量的线性方程组的问题。数学史家对此曾发生过激烈争论：在什么意义下能把巴比伦人的数学看成代数？

在公元前1900—前1600年之间的一块泥板上，记录了一些数表。许多学者对这块泥板的内容进行了深入研究，发现其中有两组数是边长为整数的直角三角形的斜边和一个直角边。由此推出第二个直角边，得到不定方程 $X^2+Y^2=Z^2$ 的整数解。

在某些具体问题里，巴比伦人还算出了等差数列和等比数列之和。

巴比伦人的几何是属于实用性质的，他们已有三角形相似及对应边成比例的知识，会计算简单平面图形面积和简单立体图形体积。如用公式 $S=\frac{C^2}{12}$（C 为圆半径）求圆面积（相当于取 $\pi=3$）和用公式

$$V=h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

求高为 h、上下底面积分别为 a^2 和 b^2 的平截头方锥的体积。

巴比伦人的数学与天文学和商业的关系极为密切。他们在公元前3世纪已较频繁地用数学方法记载和研究天文现象，他们将圆周分为360度的做法一直沿用至今。巴比伦人很早就知道使用帐单、收据、票证等物。有些数学发明如复利计算直接由商业引起。在古代美索不达米亚地区，促进数学发展的动力，不仅来自田亩丈量、天文观测，而且来自商旅贸易。

古代埃及数学(**ancient Egyptian mathematics**)　非洲东北部的尼罗河流域，是古代东方文化的发祥地，尼罗河孕育了埃及的文化。在公元前3500—3000年间，在尼罗河下游建立了一个统一的国家，以后埃及的历史主要按统治的朝代命名。古代埃及人在长期的生产实践和与自然斗争的过程中，逐渐掌握了丰富的科学知识。土地丈量、商品交易和大规模宫殿与坟墓的建筑，无疑要使用较深的数学。

目前我们对古埃及数学的认识，主要根据两种用僧侣文写成的纸草书。一种是1858年由英国人莱因德所发现，现存伦敦大英博物馆，称为莱因德纸草书，其作者是阿梅斯，因此这种纸草书又称阿梅斯纸草书。另一种叫做“莫斯科纸草书”，由俄罗斯收藏者在1893年获得，1912年收藏在莫斯科博物馆。这两种纸草书的年代大约在公元前1850—前1650年之间。

早在公元前3000年，埃及人就创造了象形文字。古代就用象形文字表示数字：| 表示1；∩ 表示10；　或　表示100；　表示1000；　表示1,000,000；等等；书写的方式是从右向左，如24写成 |||| ∩∩

这套数字的写法是十进位，但不是位值制的。分数还有一套专门的记法。一般分数都借助于符号⬭来表示，如 [符号] 表示$\frac{1}{5}$，[符号] 表示$\frac{1}{10}$，[符号] 表示$\frac{1}{15}$等少数几个分数用特殊符号表示，如 [符号] 表示$\frac{1}{2}$，[符号]表示$\frac{2}{3}$，X 表示$\frac{1}{4}$等。

整数算术主要用迭加法。加减法主要靠添上或划掉一些记号；乘除法则是化成迭加或相反的步骤来进行。分数算术在古埃及数学中占有特别重要的地位，所有分数都化成单分子分数(即分子是 1 的分数)的和。在莱因德纸草书中，有很大的一张$\frac{2}{2n+1}$状分数表，把这种分数表示为单分子分数之和，如

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},\cdots$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776},$$

$$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}\text{等。}$$

许多现代数学史家都提出了关于$\frac{2}{2n+1}$分数表起源的解释，但始终未得到统一的认识。对此，至今仍是一个谜。

古埃及人已经能解决一些属于一次方程和最简单的二次方程的问题。他们称未知数为“堆”(一堆东西)，并用象形文字表示。解决问题的方法完全是算术的。还有一些关于等差数列和等比数列的初步知识。

根据历史学家希罗多德的记载，几何学起源于古代埃及。尼罗河水每年一次的定期泛滥，淹没河流两岸的谷地。大水过后，法老要重新分配土地。长期积累起来的土地测量知识逐渐发展为几何学。因此，几何学最初只是一种实用工具。埃及人能够计算简单平面图形的面积，还掌握求圆面积的近似方法：将直径减去它的$\frac{1}{9}$后再平方，相当于取圆周率 $\pi=3.16049$。莫斯科纸草书中还记有一个计算四棱台体积的问题，给出的计算过程刚好与现代正四棱台的体积公式相符。公元前2900 年之后，埃及人建造了许多金字塔，作为法老的坟墓。这些金字塔都有正规的形体，塔基底面成正方形并且一组对边与南北方向的偏差非常小。可见古埃及人已能作出高度精确的直角并有较丰富的天文学知识。

在数学方面，埃及人已积累了许多实用知识，但是还有待于上升为系统的理论。

古希腊数学(**ancient Greek mathematics**)　通常所说的古希腊，地理范围包括希腊半岛、爱琴海群岛和小亚细亚西岸一带。古希腊人在这里定居后，创造了自己的文明和文化，这是人类历史上最宏伟的文明之一，它对现代西方文化的发展影响极大。希腊文明大约可以追溯到公元前 2800 年，一直延续到公元 600 年。

在古希腊，始终没有形成一个统一的国家。长期以来，它是由许多大小奴隶制城邦国组成。公元前 6 世纪以后，由于经济和政治的进步，

自然科学和数学得到高度的发展。古希腊数学指公元前 600 年——公元 600 年希腊人所开创的数学，大体可以分为两个阶段，一段是从公元前 600 年到公元前 300 年，称为古典时期的希腊数学；另一段是从公元前 300 年到公元 600 年，称为亚历山大时期的希腊数学。

古希腊人定居创业之后，便游访埃及和巴比伦，并与之进行贸易往来。他们从埃及人和巴比伦人那里学到了科学和数学知识，并在此基础上创造了自己的科学和数学。

古典时期的希腊数学先后在几个中心地点发展起来。每个地点都有一批学者在一、两位杰出人物的领导下开展活动，这类组织称为学派。小亚细亚伊奥尼亚地区的米利都城是希腊哲学、数学和科学的诞生地，在这里出现了古典时期的第一个学派——伊奥尼亚学派。其代表人物是泰勒斯，他是古希腊的大哲学家兼数学家。他最重要的数学成就是开始引进演绎证明，这是划时代的伟大贡献，数学发展从此进入初等数学时期。伊奥尼亚学派的著名学者还有阿纳克西曼德和阿纳克西米尼等，他们对后来的毕达哥拉斯学派有很大的影响。

伊奥尼亚学派之后有毕达哥拉斯学派，这是一个带有神秘色彩的政治、宗教、哲学团体，活跃于现今意大利南部的克罗顿城。该学派把“万物皆数”作为信条，讲授音乐、天文、几何与算术四大科，把它们作为净化灵魂的科学。在数学方面，他们研究比例论（与音乐有关）、多角形数、初等数论问题和几何代数法等。他们以发现勾股定理闻名于世，并由此导致不可通约量的发现。毕达哥拉斯学派研究数学并不注重实际应用，而单纯是为了哲学的兴趣，作为一种宗教的沉思去追随，试图通过数学去追求永恒的真理。

与毕达哥拉斯学派齐名的是意大利的埃利亚学派。埃利亚的芝诺是该学派的代表人物，他研究了物质世界的连续性、复数性和无限性等性质，提出了一些著名的悖论。其中关于二分说、追龟说、飞箭静止说、运动场问题的四个悖论千余年来给学术界以极大震动。埃利亚学派的工作为原子论思想的产生奠定了基础。

以德谟克利特为代表的原子论学派，提出“物质世界是由大量不可分割的元素（他称之为原子）所组成”的观点，并成功地把原子论思想应用于几何学中，计算出某些平面图形的面积和空间图形的体积。

公元前 480 年以后，雅典成为希腊的政治文化中心。这里的第一个学派是智人学派，它包括各方面的学者，他们崇尚公开讨论或辩论的精神。这个学派的主要研究目标之一是用数学来解释宇宙现象。在数学方面，他们提出三大几何作图问题：化圆为方、倍立方体、三等分任意角。问题的难处在于作图工具只许用直尺和圆规，希腊人的兴趣在于从理论上去解决这些问题，这是几何学从实际应用向系统理论过渡所迈出的重要一步。这个学派的安蒂丰提出用“穷竭法”解决化圆为方问题，与中国古代刘徽的割圆术不谋而合。希波克拉底、阿尔希塔斯

和门奈赫莫斯等曾利用割圆曲线和圆锥曲线来解决三大几何问题。

继智人学派之后，活跃在雅典的是柏拉图学派。柏拉图是古希腊的大哲学家，在科学方法论方面有重要贡献。他很重视数学，强调数学在训练智力方面的作用，但忽视其实用价值。柏拉图特别推崇几何学，主张通过学习几何学来培养思维能力。柏拉图学派在数学方面主要研究无理数理论、一般比例理论、正多面体和圆锥曲线的性质等。这个学派培养了不少优秀的数学家，如欧多克索斯，他创立了比例论，是欧几里得的前驱。柏拉图的学生亚里士多德也是一位大哲学家，他是形式逻辑的奠基者，其逻辑思想为日后将几何学整理在严密的逻辑体系之中开辟了道路。亚里士多德在雅典创立了吕园学派。柏拉图学派重视数学的传统对西方科学界有深远影响。

公元前 4 世纪，亚历山大帝国被其军事领袖所瓜分，形成三个帝国，但仍联合在古希腊文化的约束之下，史称希腊化国家。位于埃及的托勒密王朝最为强大，托勒密王在亚历山大城建造了当时世界上最大的博物馆和图书馆，从此以后亚历山大成为希腊文化活动的中心。希腊数学开始进入亚历山大时期。这一时期的特点，是数学逐渐脱离哲学和天文学，成为独立的学科。几何学已建立起自己的理论体系，从以实验和观察为依据的经验科学过渡到演绎的科学。

托勒密王朝是希腊化时期的一个很强大的帝国，亚历山大城是这个帝国的首都，也是当时世界上最大的科学文化中心，这里建有举世闻名的图书馆、天文台和植物园等。各地学者云集在此进行科学研究，希腊数学在公元前 4 世纪到古希腊灭亡(公元前 146 年)达到它的全盛时期。

公元前 3 世纪在亚历山大城出现了一大批优秀的数学家，最杰出的代表是欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯。欧几里得总结古典希腊数学，用公理方法整理几何学，写成 13 卷《几何原本》，其中包括平面几何学、立体几何学、比例理论、数论问题、可公度与不可公度的概念等。《几何原本》是一部划时代的伟大著作，它的历史意义在于它树立了用公理法建立起演绎的数学体系的最早典范，它对以后的数学发展产生了极深远的影响。

阿基米德是古代最伟大的数学家、力学家和机械师。他在数学上的重大贡献是建立抛物弓形等图形的精密求积法。据他的《方法》一书所载，他是用力学实验测出数值，然后用穷举法给出理论证明。他关于 π 值的计算、螺线及其它曲线、球和圆柱的研究，对 17 世纪的影响很大。

阿波罗尼奥斯是著名的几何学家。他的《圆锥曲线论》把前辈所得到的圆锥曲线知识，予以严格的系统化，并做出新的贡献。他用不同方向的平面，在同一个圆锥上截得三种形式的曲线，并分别称之为抛物线、椭圆和双曲线，并发现这三种曲线之间的许多依赖关系。他的工作对 17 世纪数学的发展有着巨大影响。

这一时期另一位有名望的学者是埃拉托塞尼。他给出了测量地球大小的方法，这是人类历史上第一次进行这样的实测。在数学方面，提出划出素数的方法，称为埃拉托塞尼筛法。

希腊化时代随着古希腊被罗马帝国吞并而告终。罗马君主不象托勒密王朝统治者那样支持数学。罗马人讲究实际，不崇尚纯粹科学的倾向对希腊数学的发展产生了较大影响，他们只把数学限定在对度量和计算有用的范围内。在这个时期产生了与古典时期性质全然不同的数学：几何学专攻那些对计算长度、面积和体积有用的结果。由于这些工作，唤起了算术和代数的新生，而天文计算引起三角术的发展。这一时期著名的学者有海伦、托勒密、帕波斯和丢番图等。

海伦在他的代表作《度量论》中精确地或近似地给出了计算各种图形、物体的面积和体积的法则，其中最著名的是根据三角形三边求三角形面积的公式——海伦公式。托勒密主要是一位天文学家，在天文观测和计算的过程中，创立了三角术。在他的重要著作《天文学大成》（原名为《数学大汇编》）中采用 60 进制，把圆周分成 360°；给出从 0°到 90°间隔半度的弦表；证明了著名的托勒密定理等。他建立的较为系统的三角术原理是后来西方三角学的一个重要来源。帕波斯以评注托勒密《天文学大成》和欧几里得《几何原本》而著称，后世数学中的许多材料都是从这些注释中得到的。著作有《数学汇编》，介绍了古典时期以来最重要的数学著作。丢番图的重要代表作《算术》是一部完全脱离几何形式的代数学著作，其中系统地研究了不定方程理论，他创造出高达 6 阶和多达 10 个未知数的不定方程和不定方程组，给出二元一次不定方程的一般解法，求得方程 $x^2+y^2=z^2$ 解的表达式，在解题过程中，使用了非常高的技巧，由于这些工作，他被认为是不定分析的创始人。丢番图还创立了一套缩写符号，这在古代是绝无仅有的。他所处理的数论问题对后世也有很大影响。

著名的评注家赛翁及其女儿许帕提娅也是亚历山大后期的学者，他们曾对欧几里得，阿波罗尼奥斯、丢番图和托勒密的著作进行评注。许帕提娅在公元 415 年遭到基督教徒的野蛮杀害。她的死标志着希腊文明的衰落，许多学者从此离开亚历山大城。在 5—6 世纪，在雅典可以看到希腊数学最后的短暂昌盛，学者们主要从事注释古典时期的名著。529 年，东罗马皇帝查士丁尼封闭了所有的希腊学校，这宣告了古希腊数学的终结。

印度数学（Hindu mathematics） 印度是世界上文化发达最早的地区之一。考古研究证明，早在公元前 3000 年左右，印度河流域就存在着具有高度文明的奴隶制城邦，以摩亨卓·达罗遗址最为著名。从建筑遗迹和某些出土文物如彩陶、雕塑品、贝壳以及各种印章上刻的古代铭文中可以发现古印度的某些数学知识。

在印度，数学的发展始终与天

文学密切相关，数学作品大都是天文学著作中的某些篇章。最早的数学著作《绳法经》出现在吠陀时期，属于古代婆罗门教的经典，专讲祭祀礼仪。其中的数学知识比较零散，大都是围绕祭坛的建造问题，利用绳子和竹杆等工具给出制作几何图形的固定规则。给出了正方形、直角三角形，矩形和梯形等直线形的作法，以及如何从面积为 a 的正方形出发作出面积为 na 的正方形，把直角三角形改为等积的正方形，化圆为方和化方为圆等。在这些几何问题中，广泛地应用了勾股定理。《绳法经》中还给出了 $\sqrt{2}$ 的近似值，精确到小数点后第 6 位。

在《绳法经》之后的大约 1000 年之中，由于缺少可靠的史料，数学的发展所知甚少。公元 5 至 16 世纪，印度数学获得了较大的发展，其成就在世界数学史上占有重要地位。在这个时期出现了一些著名的学者，如 6 世纪的阿耶波多第一，他著有《阿耶波多历数书》；6 世纪的瓦拉哈-米希拉，著《五大历算全书汇编》，其中最重要的一部是《太阳的知识》；7 世纪的婆罗摩笈多，著《婆罗摩历算书》；9 至 10 世纪的马哈维拉和施里德哈拉；12 世纪的婆什迦罗第二，著《天文系统至极》；等等。除了上述数学著作之外，1881 年在印度西北部出土了一份写在桦树皮上的数学手稿，一般认为是 6—8 世纪的作品，称为《巴赫沙里手稿》，也是一种重要的印度数学文献。

从公元前 4 世纪起，在印度开始出现书写数字。例如在现今的阿富汗地区和旁遮普北部，在当时风行所谓的音节数字，这是一种十进非位值制系统，它与古印度的音节文字有关。长期以来在印度领土上广泛使用婆罗门数字，这是十进位记数法发展的较高阶段，其书写形式保持了 1000 多年，在个别地区一直使用到 19 世纪。

在印度，整数的十进位值制记数法产生于 6 世纪以前。用 9 个数字和表示零的小圆圈，借助于位值制可以写出任何数字。零在梵文中是 sūnya，即“空的”意思。印度人不仅把数字 0 看成是“一无所有”或空位，还把它当作一个数来参加运算，这是印度算术的一大贡献。

印度人用新记数法建立了算术运算，包括整数和分数的四则运算，开平方和开立方的法则等。7 世纪著名的数学家婆罗摩笈多较完整地记述了关于数字零的各种运算，当它作除数时，产生了类似无穷大的概念。

印度人创造的这套数字和位值记数法在 8 世纪传入伊斯兰世界，被阿拉伯人采用并改进，13 世纪初经斐波那契的《算盘书》流传到欧洲，成为现代印度－阿拉伯数码及其记数法的先源。

印度人对代数学作出了重大贡献。他们用一些符号表示运算，并用缩写文字表示未知数，其符号比丢番图所使用的还有进步，这使得印度代数几乎称得上是符号性的代数。印度人还引进了负数，在婆罗摩笈多的著作中说明了负数的加法和减法法则。12 世纪的数学家婆什迦罗第二给出了负数的乘除法法则，

他还认识到正数有两个平方根，因此求出二次方程的两个根。印度人在不定方程方面取得很大成就，他们创立了自己的独特方法。例如，婆什迦罗第二解方程 $ax+b=cy$ 的过程与现代借助于连分数的解法相同。婆罗摩笈多和婆什迦罗第二还研究了方程 $y^2=ax^2+b$ 及其特殊情形 $y^2=ax^2+1$（今称佩尔方程）的解法。在婆什迦罗的著作中载有所谓百禽问题，相当于解不定方程组

$$x+y+z+u=100$$

$$3\cdot\frac{x}{5}+5\cdot\frac{y}{7}+7\cdot\frac{z}{9}+9\cdot\frac{u}{3}=100$$

这个问题与中国古代《张邱建算经》中的“百鸡问题”类似，可能是由中国传入印度的。印度学者还解出了某些其他类型的不定方程。

在精通算术级数性质的基础上，印度学者研究了各种级数，如以算术级数各项的平方、立方以及部分和为通项的级数，建立了各种级数的求和法，还研究某种递归序列的性质及一些有趣的排列组合问题等。

在三角学方面，印度人的工作晚于其他学科，但他们所做的研究十分重要。印度天文学的发展推动了三角学的进步。首先是用半弦、即正弦代替希腊人的全弦。这一转化有深远的意义，因为它很自然地引进了与直角三角形的边与角有关的各种三角函数。阿耶波多第一的著作中已出现了正弦、余弦和正矢函数，他还称正弦为 jīva，即猎人的弓弦的意思，后经阿拉伯世界传入欧洲，转译为拉丁文的“胸膛”—sinus，后演变成为 sine。瓦拉哈-米希拉还证明了一些简单的三角恒等式，婆什迦罗给出了两角和与差的正弦法则，他还利用代数知识来解直角三角形。由于天文学的需要，印度人制造了一些三角函数表。阿耶波多第一把圆周分为21600份，取半径为3438个单位，编制了从0°到90°、每隔225′的正弦和正矢表，他取 $\pi=3.1416$。15世纪的印度数学家尼拉坎特纳利用后来称为无穷小分析的方法建立了 π 的无穷级数展开式和反正切函数的展开式，可惜他的工作没有发展为近代数学。

印度人在几何学方面的贡献远没有在算术和代数方面的贡献大。印度人不追求逻辑上严谨的证明，只注重发展实用的方法，因此算术和代数占有优势。在许多情况下，印度人显示出的几何知识都不如亚历山大时期的几何学家。在印度几何学中，很少见到命题的证明，多数情形是给出图示和指示语“请看！”，偶尔在图形旁边加上简短的说明。几何学侧重于面积和体积的计算，已经有各种几何体，如圆锥、圆台等体积的近似计算公式。婆什迦罗第二已给出棱台、球表面积和体积的精确公式，他还给出勾股定理的一个巧妙证明。婆罗摩笈多推广了海伦公式，导出了圆内接四边形的面积

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

其中 p 为四边形周长之半，a、b、c、d 为四边之长。

印度数学在文艺复兴时期经阿拉伯国家传入欧洲，其十进位值制记数法，一系列代数和数论方法，以及三角学的开端等对欧洲数学的发

展产生了较大的影响。

中美洲的数学(**Mathematics in Central America**)　古代美洲文明是世界文明的重要组成部分，中美洲是古代玛雅人文化的摇篮。古代的玛雅人分布在现在的墨西哥南部，以及危地马拉，洪都拉斯、伯利兹和萨尔瓦多等地。在公元前1000年左右，在这一地带兴起了美洲古老的文化——玛雅文化。公元300—900年之间是玛雅文化的全盛时期，之后便逐渐衰落。玛雅人所建立的数学是玛雅文化的一部分，通常也叫中美洲的数学。对这一地区数学的了解，主要来自一些残剩的玛雅时代的石刻和几种玛雅文古抄本：德累斯顿抄本(约11—12世纪)，马德里抄本(15世纪)，巴黎抄本(约14—15世纪)等，其中德累斯顿抄本中的数学内容较多些。

早在公元最初的几个世纪里，玛雅人就创立了以地球围绕太阳旋转一周作为一年的"太阴历"。这种历法把一年分为18个月，每月有20天，再加上5天禁忌日，一年共365天，每4年加1天。这种历法比古代希腊、罗马人的历法还要精确。与此同时，玛雅人创造了独特的以20进位的位值制计数法。各种数字只用三个符号表示，这三个符号是，"•"　"——"　"⊖"分别表示1、5和0。他们很巧妙地把"•"排在"—"上，用这两种符号组成1—19各个数字如下：

到20则进位，20以上的进位为20×20＝400，再进位为20×20×20＝8000，等等。计位采用竖式，例如

400		••	—
200	•	—	•• / —
1	•••• / —	• / ═	—
	29	916	2145

第一行的"•"表示400，"—"表示400×5＝2000；第二行的"•"表示20，"—"表示20×5＝100。

这是一种普通记数法，而时间记数法则不同，即第一位仍为20，第二进位为18×20＝360，第三进位为18×20²＝7200等，也采用竖式记位法，例如

7200	• / —
360	⊖
20	•••• / ═
1	• / —
	43,487

加减法的运算比较简单，只需对准位数。作加法时，满20向上一位进一位；作减法时，若某一位减数小于被减数，则向上位借一个"•"，变成下一位的"☰"。可见，加减法运算与阿拉伯数码的运算相同。

对于乘除法的运算，目前人们还持不同的看法。已发现的玛雅文献中还没有见到这方面的例子，但

有一些学者根据间接的资料设计出玛雅人乘除法运算的程序。

关于玛雅人对形的认识，只能从玛雅古建筑中体会到一些。这些古建筑从外形看都很整齐规范，可以肯定当时玛雅人已经掌握一定的几何知识。

在15世纪末到16世纪初，阿兹台克人（又称诺特奇卡人）在现今墨西哥中南部建立一帝国，曾繁荣一时。阿兹台克人创立了一种20进制的非位值制的记数法，1—20中的几个数字表示为：

· ·· ··· ···· ····· ······

1 2 3 4 5 6 10 11 19 20

中美洲的数学对世界数学发展影响不大。

阿拉伯数学（**Arabic mathematics**） 指8到15世纪在中东、北非和西班牙等地的伊斯兰国家里所建立的数学。由于当时这个地区普遍使用阿拉伯语，因此通常用“阿拉伯数学”来概括。事实上，为阿拉伯数学作出贡献的数学家中，正统的阿拉伯人并不多。这一时期的数学有时也称“伊斯兰数学”或“中亚细亚数学”。

7世纪初伊斯兰教兴起后，阿拉伯人大举向外扩张，建立了幅员辽阔的阿拉伯帝国。阿拉伯人很善于吸取被征服国家的文化，希腊、印度、伊朗以及中亚各族古代的科学文化在这里得到继承和发展。阿拉伯人和其他各民族人民把东西方的文化精华融合在一起，并创立了新的、别具一格的文化。当时欧洲正处于漫长的黑暗时期，阿拉伯世界的科学文化却后来居上，成为当时除中国以外的人类科学中心。

从8世纪起，大约有一个到一个半世纪是阿拉伯数学的翻译时期。在这个时期，出现了几位热心提倡科学的哈利发，在他们的大力支持和鼓励下，设立学校、图书馆和观象台。在当时最著名的是由阿拔斯王朝哈利发马蒙在巴格达修建的“智慧宫”，在这里云集了来自各地的学者，他们把希腊、印度和波斯的古典著作大量地译为阿拉伯文。首先是欧几里得的《几何原本》，不久，印度数学家婆罗摩笈多的著作被译成阿拉伯文，随后，阿基米德、阿波罗尼奥斯、门内劳斯、海伦、托勒密和丢番图等许多希腊学者的数学和天文学著作都被译成阿拉伯文。在翻译过程中，许多文献被重新校订、考证和增补，这样一来，大量的古代数学遗产获得了新生。

在上述翻译时期之后，阿拉伯数学进入了兴盛时期。在巴格达、布拉哈、开罗、科尔多瓦和托莱多等地，出现了许多学术研究中心。这一时期著名的数学家有：花拉子米、巴塔尼、艾布·瓦发、凯拉吉、比鲁尼、奥马·海亚姆、纳西尔丁和卡西等。

阿拉伯人原来只有数词，没有数的记号。在征服埃及和叙利亚之后才使用希腊字母记数法。8世纪末，一部印度天文学名著传入阿拉

伯帝国，印度数字、十进位值制记数法及其算术运算就这样进入伊斯兰世界。因为当时印刷术还没有发明，书籍全用手抄，字体因人因地而异，出入很大。在埃及、叙利亚和伊朗等国形成了东阿拉伯数字，而在比利牛斯半岛一带形成了西阿拉伯数字。12世纪时，两种形式又逐渐合流（以西阿拉伯数字为主体），并开始传入欧洲，又经过几百年的改革，这种数字成为今日我们使用的印度-阿拉伯数码。印度数字及其记数法主要是通过花拉子米的算术著作传入欧洲的。花拉子米是阿拉伯数学初期最重要的数学家，他编写了第一本用阿拉伯语在伊斯兰世界介绍印度数字和记数法的著作，其原稿已经遗失，只有一份14世纪的拉丁文译本保存下来，以“Dixit Algoritmi …”开头，后人根据译文的内容，把它定名为《印度的计算术》。Algoritmi 本是花拉子米的名字，后来竟演变成表示任何系统和计算程序的“算法”的专业术语。

伊斯兰世界对代数学做出了重要贡献。代表作是花拉子米的《代数学》（约820年）。首先，这部著作提供了代数学这门学科的名称，它的原名为“ilm al-jabr wa'l muqabalah”，意思是“还原与对消的科学”，这本书传到欧洲后，简译为algebra，这就是西文代数学名称的来源。《代数学》系统地讨论了一般二次方程的解法，花拉子米讲述的解法程序相当于给出了求根公式，他还指出了其解法的普遍性。他已经知道二次方程有两个根，但他只取正根。花拉子米之后，另两位学者艾布·卡米尔和凯拉吉对代数学继续进行研究，前者大量地使用无理数，并给出许多代数运算的法则；后者在系统总结前人关于二次方程的工作的基础上，研究了某些高次方程的解法，还给出求任意 n 次方根的方法。

三角学在阿拉伯数学中占有重要地位。它的产生与发展和天文学有密切关系。阿拉伯人在印度人和希腊人工作的基础上发展了三角学。他们引进了几种新的三角量，揭示了它们的性质和关系，建立了一些重要的三角恒等式。给出了球面三角形和平面三角形的全部解法，制造了许多较精密的三角函数表。值得称赞的是巴塔尼和比鲁尼的工作：巴塔尼发现了球面三角中重要的余弦定理，给出平面各种斜三角形的解法等；比鲁尼在他的天文学著作《马苏德天文学和占星学原理》（1030）中给出了三角学的独立篇章，对三角学的内容和方法加以总结。系统而完整地论述三角学的著作是由13世纪学者纳西尔丁完成的。他的《论完全四边形》在三角学史上具有重要意义，它非常完整地建立了三角学的系统，从基本概念开始论述到所有类型问题的解法，特别指出球面三角与平面三角的重要差异。这部著作使三角学脱离天文学而成为数学的独立分支，它对三角学在欧洲的发展有很大影响。一般认为德国数学家雷格蒙塔努斯的工作是欧洲三角学的开始，但他的著作比纳西尔丁要晚两个世纪。

阿拉伯几何学的成就低于代数和三角。希腊几何学的严密的逻辑

论证没有被阿拉伯人接受，虽然欧几里得《几何原本》被译成阿拉伯文并经过一些学者的注释。几何学在这一时期没有取得本质的进步。只有两项工作值得称道：一是塔比·伊本·库拉、奥马·海亚姆和纳西尔丁等学者对平行公设所做的研究对非欧几何的产生有过积极的影响；另外一项是奥马·海亚姆所创立的用圆锥曲线来解三次方程的几何方法，它的实质是把代数与几何结合起来解决问题，可以看作是笛卡儿解析几何学的先驱工作。

阿拉伯学者在近似计算方面取得了卓越成绩。15世纪的卡西在他的《圆周论》中给出了圆周率π的十分精彩的计算程序，得到17位准确数字。他还是除中国外第一个使用小数的人。

从12世纪开始，阿拉伯数学连同希腊科学一起经北非的地中海沿岸逐渐传入西班牙和欧洲，对欧洲数学的发展产生了重要影响。古希腊的原著失传后，它们的阿拉伯文译本成为欧洲人了解希腊数学的主要源泉。可见阿拉伯人在保存和传播古代科学遗产方面做出重大贡献。与此同时，阿拉伯人自己的工作也使欧洲人大开眼界，特别是印度-阿拉伯数码和十进位值制记数法，笔算和花拉子米的《代数学》等。《代数学》作为标准课本在欧洲使用了几百年，成为代数教科书的鼻祖。中国和印度古代数学的某些内容在中世纪传入阿拉伯世界，并通过阿拉伯数学再传入欧洲。因此，阿拉伯数学对研究比较数学史也是很重要的。

罗马和欧洲中世纪的数学 **(Mathematics in Roma and medieval Europe)**　罗马人活跃于历史舞台上的时期大约从公元前7世纪至公元5世纪。他们在军事上和政治上曾取得极大成功，在文化方面也颇有建树，但他们的数学却很落后。在数学方面，只有一些粗浅的算术和近似的几何公式。整数记数法是非进位制的，算术运算十分复杂，往往要借助于手指和算盘。分数记数采用十二进制，用特殊的符号来表示$\frac{1}{12},\frac{2}{12},\cdots,\frac{11}{12},\frac{1}{24},\frac{1}{36},\cdots$等，分数运算也很复杂。几何学只提供一些对建筑学和土地测量人员不可少的实用知识。

罗马人对历法改革作出了重要贡献。儒略·恺撒大帝以埃及的太阳历为基础编制历法，后经修改成为儒略历，已接近今天的公历。

罗马人自己编著的科学书籍，以维特鲁维尼斯的《建筑十书》(公元前14年)最为著名。书中比较注重处理数学问题，使用了建筑物的平面体和立视图，可以看到画法几何的萌芽。

从西罗马帝国灭亡(公元476年)到11世纪称为欧洲的黑暗时期。西欧文化处于低潮，基督教的绝对统治严重地破坏了科学发展，在数学方面，由罗马人保留下来的仅有的应用知识也被逐渐放弃。在这个时期，只出现少数几位热心学术的学者和教士。罗马的名门后裔博伊西斯是中世纪有名的翻译家，他将数理科学分为四部分，叫做“四道”(即四条道路)，指算术、几何、音乐

和天文四大科。他根据希腊文献选编了这方面的初等读物。他的《几何学》是翻译欧几里得《几何原本》前三卷组成的，但删去了全部证明；他翻译希腊数学家尼科马霍斯的《算术入门》，但删掉其中一些精采的命题，编成《算术入门》一书。这两部水平较低的著作在西欧竟作为权威著作被普遍采用了几个世纪。博伊西斯还是中世纪经院哲学的奠基者之一，他的名著《哲学的慰籍》一直流传至今。英国教士比德是中世纪最大的教会学者之一，被尊为比德大师。他把一切可资利用的古代学术尽可能地搜集起来，为古代学术流传到中世纪作出了贡献，在文艺复兴时期，被称为"英国文化之父"。他对历法计算和指算有较多的研究。另一位英国学者阿尔昆也编写了许多初级教科书，这些书籍在中世纪广为利用。他曾被法国查理大帝请到宫廷中改组教育，设立学校。在他的影响下，英、德等国也开始创办初级学校。10世纪的法国学者热尔贝也是一个著名的教士，他编写了一些初等算术和几何方面的著作，提倡使用算盘。公元999年他被选为罗马教皇，改称西尔维斯特二世。在他任教皇期间，大力推动数学学习。他还扩建了教会学校，主张进行"四艺"训练，在当时是少有的开明教皇。

1100年左右，新的思潮开始影响西欧的学术界。欧洲人通过贸易和旅游，同地中海地区和近东的阿拉伯人以及东罗马的拜占庭人发生接触；十字军的东征还使欧洲人进入阿拉伯人的领地。欧洲人开始从阿拉伯人和拜占庭的希腊人那里得到希腊著作，他们对希腊学术发生了很大兴趣，大力搜寻希腊著作的抄本、阿拉伯文译本和阿拉伯人写的著作。然后将他们译为拉丁文。这些著作使欧洲人大开眼界，由此开始了欧洲数学的第一次复兴和大翻译运动。

12世纪是数学史上的大翻译时期，是知识传播的世纪。主要的传播地点是西班牙和西西里，著名的翻译家有巴斯的阿德拉德，克雷莫纳的杰拉德、切斯特的罗伯特和希斯帕伦西斯等。欧几里得、阿基米德、海伦、西奥多修斯、托勒密、亚里士多德等人的著作，以及阿拉伯学者，如花拉子米的算术和代数著作等都被译成拉丁文。除了数学和天文学著作外，哲学、医学、神学和占星术方面的著作也都翻译过来。这些工作为文艺复兴时期科学的发展准备了条件。

意大利的斐波那契是12至13世纪最出色的学者，他早年到各地旅游，经过比较确认印度-阿拉伯数码及其记数法在实用上最为优越。回到家乡后写成《算盘书》(1202)，这是中世纪最杰出的数学著作之一，印度-阿拉伯数码和阿拉伯数学通过它被介绍到欧洲来。斐波那契的另两部著作《实用几何》和《平方数书》是专门讨论几何学和二次丢番图方程的，在当时也较有影响。

14世纪相对地是数学的不毛之地。这一时期最大的数学家是法国僧侣奥雷姆(1323—1382)，在他的著作中，第一次使用分数指数，还提出用坐标表示点的位置和温度的变

化，出现了变量和函数的概念，他的工作影响到文艺复兴以后包括笛卡儿在内的学者。

12世纪以后，欧洲各地出现了许多大学，它们大都是从原教会学校基础上转变而来。13世纪上半叶，巴黎、牛津、剑桥、帕多瓦和那不勒斯等地的一些大学里数学教育开始兴起，这些大学成为后世数学发展的重要基地。

文艺复兴时期的数学（Mathematics in the Renaissance） 14至16世纪在欧洲历史上是从中世纪向近代过渡的时期，史称文艺复兴时期。14世纪初期，由于城市商品经济的发展，资本主义关系已在欧洲封建制度内部逐渐形成。中世纪束缚人们思想的宗教观，神学和经院哲学逐步被摧毁，出现了复兴古代科学和艺术的文化运动。在自然科学方面，哥伦布地理上的大发现、哥白尼的日心说、伽利略在数学物理上的创造发明等革命性事件相继发生。古希腊著作的翻译出版，阿拉伯科学的输入，都为自然科学和数学的发展创造了条件。

文艺复兴时期，在数学中最先发展起来的是透视法。艺术家们把描述现实世界作为绘画的目标，因此着手研究大自然，研究如何把三维的现实世界绘制在二维的画布上。在这一时期，以达·芬奇（1452—1519）为代表，出现了一批优秀的艺术家兼数学家：意大利的阿尔贝蒂（1404—1472）、弗兰切斯卡（1410—1492）、德国的迪勒（1471—1528）等，他们研究绘画的数学理论，建立了早期的数学透视法思想，这些工作成为18世纪射影几何的起点。此外，一些学者还研究尺规作图、求物体的重心、空间曲线及其投影、地图的绘制等问题。几何学知识在当时得到广泛的传播和应用。

文艺复兴时期印刷出版了一批普及的算术读本，内容多是用于商业、税收、测量等方面的实用算术。印度-阿拉伯数码的使用使算术运算日趋标准化。当时最有影响的算术著作有帕乔利的《算术、几何、比及比例全书》（1494）和维德曼的《商业速算法》（1489），前者是继斐波那契的《算盘书》之后第一本内容全面的数学书，后者首次使用“＋”和“－”符号表示加法和减法。以“计算能手”著称的德国数学家亚当·里斯（1492—1559）的算术书多次再版，有广泛的影响。荷兰数学家斯蒂文在欧洲最早提倡用十进制表示分数及其运算，以及使用十进制的度量衡。他的著作《论十进》（1585）是欧洲第一种研究十进分数的文献，其中系统阐述了十进分数的理论。小数的使用方便了天文计算和数学用表的制作，而印刷术的发达促进了阿拉伯数码字形的确定。

代数学在文艺复兴时期获得了重要发展。最杰出的成果是意大利学者所建立的三、四次方程的解法。卡尔达诺在他的著作《大术》（1545）中发表了三次方程的求根公式，后世称之为“卡尔达诺公式”。但此公式的发现应归功于塔尔塔利亚，关于此事引出了历史上著名的数学竞赛。四次方程的解法由卡尔达诺的学生费拉里发现，在《大术》中也有记载。稍后，邦贝利（1526—1572）在

他的《代数学》中给出了三次方程不可约情形的解法，并使用了虚数，他还改进了当时流行的代数符号。

符号代数学的最终确立是由16世纪最著名的法国数学家韦达完成的。他在前人工作的基础上，于1591年出版了名著《分析术入门》。这部著作对代数学加以系统整理，并第一次自觉地使用字母来表示未知数和已知数，他把代数称为“类的算术”，算术称为“数的算术”，因此代数学更带有普遍性，形式更抽象，应用更广泛。《分析术入门》被西方数学史家推崇为第一部符号代数学。韦达在他的另一部著作《论方程的识别与订正》(写于1591，1615年出版)中，改进了三、四方程的解法，他还对 $n=2,3$的情形，建立了方程的根与系数之间的关系，即现在称为韦达定理的结果。17世纪，笛卡儿改进了韦达的符号体系，用 $a,b,c,\cdots$ 表示已知数，$x,y,z,\cdots$表示未知数，这种表示法一直沿用至今。

在文艺复兴时期，三角学也获得了较大的发展。1450年以前的三角学一般指球面三角学，平面三角学的发展是较晚的事。三角学的新方法是在15世纪末叶到16世纪早期由德国数学家建立起来的。雷格蒙塔努斯的《论各种三角形》在欧洲是第一部独立于天文学的三角学著作。书中对平面三角和球面三角进行了系统的阐述，是在欧洲传播三角学的源泉。书中还有很精密的三角函数表，雷格蒙塔努斯采用印度人的正弦，即弧的半弦，取半径为600,000及10,000,000，分别造了两个正弦表。在这一时期，由于地理上的大发现和天文观测的日益扩大，推算更详细的三角函数值已成为刻不容缓的事。有许多学者热心于三角函数表的制作，哥白尼的学生雷蒂库斯编制了(文艺复兴时期)第一张详尽的正切表和第一张印刷的正割表，在重新定义三角函数的基础上，他勤奋工作十多年，又制作了更精密的正弦、正切、正割表，他的工作由皮蒂斯楚斯(1514—1574)和奥托(1550—1605)等校正和完善。

在文艺复兴时期，在文学、绘画、建筑、科学各领域都取得了巨大的成就。文学、绘画、建筑领域中创造的许多杰作已成为现代文明的一部分。在数学方面，这个时期主要是在中世纪大翻译运动的基础上吸收希腊和阿拉伯数学成果的时期，它为下两个世纪数学的大发展准备了条件。

日本数学(**mathematics in Japan**)　人类从何时才开始定居于日本列岛，至今仍无定论。最早居住在这里的日本原人也称绳纹人。日本的新石器文化有绳纹文化和弥生文化。公元4世纪中叶，在古代的日本建立了第一个统一的国家——大和国。645年，日本发生了“大化革新”，由奴隶社会过渡到封建社会。在10世纪以前，日本国主要吸收外来的文化。中国、朝鲜和印度的文化对日本都有很大影响，特别是中国的文化影响更大。10世纪以后，真正的日本文化才发展起来。日本数学的繁荣则更晚，是17世纪以后的事。

日本人把受西方数学影响以前，按照自己的特点发展起来的数学叫和算，也称日本传统数学。17世

纪后期至19世纪中叶是和算的兴盛时期。

和算渊源于中国数学，并在中国古代数学的直接影响下发展起来。公元6—7世纪，在日本的飞鸟、奈良时代，中国的历法和数学就直接或间接地(通过朝鲜)传入日本。在中国唐朝，日本政府曾多次派留学生来中国学习数学。到8世纪初，日本已仿照隋唐时期的数学教育制度设立算学博士并采用《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《缀术》等中国古算书作为教材。在889—897年间修撰的《日本国见在书目》中就记录了这些书籍。这是中国数学输入日本的第一个时期。

13—17世纪，是中国数学传入日本的第二个时期。宋末和元初，中国算盘和数学书，如《杨辉算法》、《算学启蒙》、《算法统宗》等陆续传入日本，对日本数学的发展有重要影响。1627年出版了吉田光由所著《尘劫记》，使珠算术在日本迅速得到普及。《尘劫记》的内容与《算法统宗》极为相似，只是其中许多例题是根据日本的实际情况编写的。这部著作在日本流行了200多年。还有几部著作是专门介绍和解释朱世杰《算学启蒙》的，如《算学启蒙训点》(久田玄哲，1658)、《新编算学启蒙注解》(星野实宣，1672)、《算学启蒙谚解》(建部贤弘，1696)等。早在17世纪之初，日本数学家就开始写出自己的著作，如毛利重能的《割算书》(1622)、今村知商的《竖亥录》(1639)等。到17世纪末期，通过关孝和等人的工作，逐渐形成了具有独特风格和体系的日本数学——和算。

和算的基本思想，由关孝和、建部贤弘、久留岛义太等建立、经安岛直円、和田宁等发展，取得显著成果。

关孝和在日本被尊为算圣，17世纪末到18世纪初，以他为核心形成一个学派(关流)。关氏学派的主要成就是“点窜术”和“圆理”。“点窜术”是把由中国传入的天元术改为笔算，并改进了算式的记法，这是和算特有的笔算代数学。“圆理”可以看作是和算特有的数学分析。关孝和的弟子建部贤弘用分弧的方法求得弧长的无穷级数表达式，亦称圆理公式

$$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2=\frac{x^2}{2!}+\frac{2^2\cdot x^4}{4!}+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot x^6}{6!}+\cdots$$

关氏学派在行列式、方程理论、连分数、幻方和不定方程等方面也有一些成果。久留岛义太师承建部贤弘，他推广了建部的圆理公式，发展了圆理的极数术(极大极小问题)，并在西方数学家之先发现了欧拉函数和行列式展开定理。早期关氏学派的数学家还有中根元圭、松永良弼和山路主住等。

山路的学生安岛直圆是关氏学派的第四代大师，他对日本和算的发展产生过重要影响。他深入到微积分领域，提出一种求弧长的方法：利用等距的平行线，将圆分成极狭的矩形，并用级数和极限法求面积，然后导出弧长；又将此法推广，形成二重积分，求出了两相交圆柱公共部分的体积。晚期的关氏学派数学

家和田宁进一步改进了圆理，他利用微小的切线线段进行计算，制作了很多数表，使计算弧长、面积、体积等问题更加简化。他使用的方法和现代积分法的原理相近，只是可积分的函数限定某些代数函数。

除了关氏学派以外，还出现了一些较小的学派，例如以会田安明为首的宅间派在18世纪末也活跃起来。他们总结了和算中的各种几何问题；深入研究了计算椭圆、球面等面积和体积的公式；探讨了代数方程理论：解决了某些不定方程问题；等等。

19世纪中叶，日本政府采取了开国政策，西方数学大量传入。明治维新时期，日本政府实行"和算废止，洋算专用"政策，和算迅速衰废（只有珠算仍被沿用至今），同时开始了近代数学的研究。日本政府非常重视数学教育，1887年成立的"东京数学物理学会"(后来发展为"日本数学会")有力地推动了中小学的近代数学教育。20世纪初则加强和提高了大学数学教育水平。除了大批引进西方近代数学经典著作之外，还向欧洲派遣留学生，日本数学很快得到长足的发展。早期的杰出代表是高木贞治，他所解决的"克罗内克青春之梦"是日本数学家第一次作出的具有世界水平的成果。二次大战后又涌现出一批优秀的数学家，其中小平邦彦、广中平祐等曾荣获菲尔兹奖。时至今日，日本已步入世界上数学研究先进国家的行列。

17世纪的数学（Mathematics in 17th century） 17世纪是由中世纪过渡到新时代的时期。欧洲封建社会开始解体，代之而起的是资本主义社会，生产力大大解放。社会经济的发展和生产技术的进步促使自然科学的各学科迅猛发展。例如在航海方面，为了确定船只的位置，要求更加精密的天文观测；在工业上，从工场手工业的生产方式向机械生产的过渡，要求工业资产阶级掌握机械生产的技术；在军事方面，弹道学成为研究的中心课题；准确时计的制造，运河的开凿，堤坝的修筑，行星的椭圆轨道理论等，也都需要很多复杂的计算。这些学科提出了许多新的数学课题，古希腊以来的初等数学已经不能满足需要。自然科学的发展使数学的面貌发生了根本的变化，涌现出许多崭新的数学领域，数学发展开始进入新的时代。

在17世纪初期，纳皮尔发现对数，化简了天文计算；伽利略创立动力学，奠定了近代力学的基础；开普勒发现行星运动三大定律，为牛顿万有引力的发现铺平了道路。在这个世纪中期，德扎格和帕斯卡开辟了射影几何学这一新的领域，笛卡儿、费马创立了解析几何学，费马为近代数论奠基，惠更斯、帕斯卡、费马对早期概率论的发展做出重要贡献。在17世纪末期，牛顿和莱布尼茨在17世纪一大批数学家工作的基础上，创立了微积分学。17世纪对于数学来说，是一个极富创造性的时代。

苏格兰贵族纳皮尔对数字计算颇有研究，曾多次改进计算方法，他制造的"纳皮尔算筹"化简了乘法和除法运算，并用加法代替乘法，用减法代替除法。为化简复杂的天文计

算，他专门用几年时间研究运算体系，根据非常独特的、与质点运动有关的设想构造出所谓对数方法，其实质表现为等差数列与等比数列之间的联系。在他的《奇妙的对数表的描述》(1614)中阐明了对数的原理。开普勒的助手、瑞士数学家比尔吉也独立地发现了对数。他接触到复杂而繁重的天文计算，因此产生化简计算程序的思想，他造出了等差数列与等比数列对比的表，并得出结论：等比数列各项的乘法、除法、乘方和开方运算等，可以用等差数列的与之相应的项的加法、减法、乘法和除法来代替。他建立的对数体系相当于以 e 为底的自然对数。开普勒十分重视比尔吉的发现，鼓励他公诸于世，但是后者拖延了时间，直到1620年才出版了他的对数表。拉普拉斯曾高度评价对数的意义，他说："对数的发现，简化了天文学家的工作，延长了他们的寿命。"

几何学在17世纪发生了重大变革，其中之一是射影几何的建立。文艺复兴时期建立起来的透视法在17世纪得到新的发展，其基本思想是投影和截面取景原理。在对这一原理进行研究时，人们提出了一系列新的问题：一个实物的原形与截景有什么共同的几何性质？一个原形的两个不同截景之间有什么共同的性质？等等。为寻求上述问题的答案，法国数学家德扎格进行了大量的研究，他引进无穷远点、无究远线等概念，将直线看作是具有无穷大半径的圆，而切线是割线的极限。讨论极点与极线、透视、透射等问题。他的重要著作《圆锥曲线论稿》奠定了射影几何的坚实基础，其中给出的"德扎格定理"(若两三角形对应顶点联线共点，则对应边交点共线，其逆亦真)是全部射影几何的基本定理。对射影几何做出贡献的第二个主要人物是帕斯卡，他用投射法来研究圆锥曲线，在1640年写出题为《圆锥曲线论》的著名论文，这是自阿波罗尼奥斯以来圆锥曲线论的最大进步，其中建立了重要的"巴斯卡六边形定理"：内接于圆锥曲线的六边形的三组对边的交点共线，它成为射影几何的基本理论之一。德扎格和巴斯卡的出色工作在当时没有受到应有的重视，人们只是把他们的工作视为欧几里得几何的一部分。直到18世纪末，人们才认识到，他们的方法和结果是几何学一个新分支的开端，这个分支到19世纪被称为射影几何学。

概率论的兴起，最初是由保险事业的发展。但刺激数学家思考概率论的特殊问题却来自与博弈有关的问题。在16世纪，意大利的一些学者开始研究掷骰子等赌博中的一些简单问题，例如比较掷两枚骰子出现总点数为9或10的可能性大小。17世纪中叶，法国数学家帕斯卡、费马及荷兰数学家惠更斯利用排列组合的方法研究了一些较复杂的赌博问题，例如他们曾热烈讨论并解决了一个赌者提出的难题，即"合理分配赌注问题"。后来惠更斯写成《论赌博中的计算》(1657)一书，这是概率论最早的论著。在以后的二百多年中，经过雅各布·伯努利、泊松和拉普拉斯等人的工作，概率论发展成为应用广泛的数学分支。

17世纪最重要的数学成就之一是解析几何学的创立，它标志着变量数学时期的开始。开普勒发现行星沿椭圆轨道绕太阳运动，伽利略发现抛出去的石子沿抛物线轨道飞行，等等。这一切导致人们必须用新的有力工具来研究几何学。法国数学家笛卡儿与费马分享着解析几何创立者的荣誉。笛卡儿是17世纪最杰出的哲学家和自然科学家之一。他试图建立一种普遍的数学，把算术、代数、几何统一起来，这种动机导致他创立解析几何学。他在《几何学》(1637)中阐明了解析几何的原理，后人把它作为解析几何的起点。在《几何学》中，第一次出现变量与函数的思想(不过他没有使用这两个术语)。笛卡儿所谓的变量，是指具有变化长度和不变方向的线段，还指连续经过坐标轴上所有点的数字变量。正是变量的这两种形式使笛卡儿试图创造一种几何与代数互相渗透的科学。笛卡儿从天文和地理的经纬制度出发，建立了平面上的点与实数对(x,y)之间的对应关系，然后指出二元方程$F(x,y)=0$可以确定平面上的一条曲线，而用代数方法处理方程$F(x,y)=0$又可得知曲线的性质。他还根据代数方程的性质将曲线进行分类，提出了一系列新颖的思想。费马继承了韦达用代数来解决几何问题的方法，深入研究轨迹问题。他在《平面与立体轨迹引论》中，专门讨论直线、圆和圆锥曲线，提出一种轨迹理论。其中阐明解析几何的原理："由两个未知量决定的一个方程，它对应着一条轨迹——一条直线或曲线。"这个原理之中孕育着变量的思想。虽然古希腊数学家阿波罗尼奥斯就已使用过坐标法，但是笛卡儿和费马第一次切确地陈述了用方程表示几何图形的一般方法，他们的工作迈出了超越希腊几何学的最重要的一步。应该指出，笛卡儿和费马使用的坐标系是不完善的。意大利数学家卡瓦列里最先使用极坐标求曲线所围的面积，牛顿也把极坐标看成是确定平面上点的位置的一种方法。

解析几何学的产生不仅使几何学本身发生了重大变革，而且改变了整个数学的面貌。随之而来的是微积分的创立，这是17世纪最光辉的数学成就。微积分的思想萌芽可以追溯到古希腊时代，阿基米德的工作中就孕含着定积分的思想。在17世纪，最早研究体积问题的是开普勒，他利用所谓"无限小元素法"(一种类似"原子论"的方法)求出近百个旋转体的体积。在开普勒的影响下，卡瓦列里也开展了这方面的研究。他把"无限小元素法"发展成纯粹的几何方法，提出了著名的"不可分原理"(见不可分原理)并用这个原理确定了一些面积的比值，相当于计算出定积分$\int_0^a x^m dx=\frac{a^{m+1}}{m+1}$。这些带有普遍性的结果对定积分计算方法的建立产生了积极的影响。意大利数学家托里切利、英国数学家沃利斯、法国数学家帕斯卡、费马和罗贝瓦尔等人都力图把卡瓦列里的不可分原理算术化，或者给出较严格的证明。

在17世纪，关于求曲线切线的问题，最先发表的是笛卡儿关于法

线的作法(1637),后来他又给出另一种作法,其实质是把切线看成是割线的极限位置。费马在他的论文《求极大值与极小值的方法》中,建立了求函数极值的一种方法,相当于给出可微函数取极值的必要条件。他还利用同样的方法求出了平面曲线的切线。罗贝瓦尔和托里切利从运动学的角度来研究曲线切线的作法,他们把曲线视为质点的运动轨迹,并把质点的运动看成是铅直运动和水平运动的合成。如果这两个运动的大小和方向是已知的,则其合成运动的方向就是曲线在这点的切线方向——由平行四边形法则来确定。牛顿的老师,英国数学家巴罗在他的《几何学讲义》中,也研究了切线的作法。他利用"微分三角形"把切线的斜率定义为函数增量和自变量增量这两个无穷小量的比。他的方法中已包含现代微分法的要领。牛顿和莱布尼茨的先驱者们为微积分的创立作了大量的准备工作,但是他们都没能揭示出微分和积分的内在联系。最后这关键的一步是由两位大师完成的。

牛顿早年在剑桥得到巴罗的指导,他研究了笛卡儿、沃利斯和巴罗等人的著作,这些工作对他发现微积分学起到强烈的刺激作用。牛顿从运动学的角度来考虑问题,认为所谓变量就是量的连续运动。他称变量为流数,称其变化率为流率。他的创造性工作在1665—1666年完成,主要体现在下面三本小册子中:《运用无穷多项方程的分析学》、《流数法与无穷级数》和《曲线求积法》。牛顿关于微积分的基本论著完成之后,经过很长时间才发表出来。他在《自然哲学的数学原理》(1687)中使用了流数法及其逆运算,他的流数法才公布于世。莱布尼茨在1675年前后得到微积分的要领。他从几何学的角度考虑问题,研究了巴罗等人的著作,意识到微分和积分是相反的过程。他把微分看作是变量相邻二值的无限小的差,而积分则以变量分成的无穷多个微分之和的形式出现。莱布尼茨关于微积分学的最早论文于1684年发表在《学艺》杂志上。他所创立的优越符号对微积分的传播和发展有很大影响。现在所使用的$\frac{dy}{dx}$、$\int dx$等符号就是莱布尼茨创始的。他的微积分为伯努利家族和欧拉等数学家所继承,在18世纪得到发扬光大。

综上所述,17世纪的数学是沿着超越希腊数学传统的趋势而发展起来的,人们冲破希腊人的框框使数学向代数化方向前进。数学和其他自然科学紧密联系在一起,伽利略确定的实验科学和理论力学基础,为牛顿开辟了道路,促进了数学的发展,也确立了数学在自然科学中的地位。数学知识在17世纪得到广泛的交流和传播,意、法、英、德、俄等国相继成立了科学学会或研究院,它们所创办的科学刊物成为交流新科学思想的重要工具。所有这些都为下个世纪的数学繁荣准备了条件。

18世纪的数学(**mathematics in 18th century**) 18世纪是文化史上称为启蒙时期的时代。英国首

先发生工业革命，以后遍及欧洲。法国和德国相继兴起了启蒙运动，反对封建制度和宗教权威，提倡民主和自由。人类的思想得到进一步解放，为科学的发展创造了良好的条件。

微积分学自17世纪创立以来，在稳步而深入地向前发展，并在理论物理、力学和天文学许多方面得到大量应用。这些应用刺激和推动了许多新分支的产生：微分方程、无穷级数论、微分几何、变分学、复变函数论等。微积分本身及这些学科的发展是18世纪数学最重要的内容。正是由于这些新学科的出现和发展，使分析学形成了在内容和方法上都具有鲜明特点的独立的数学领域，它成为与代数、几何并列的数学三大分支之一。18世纪数学本身的发展，以及这个世纪后期数学研究活动的扩张和数学教育的改革都为19世纪数学的发展准备了条件。

微积分学的深入发展，在英国和欧洲大陆是循着不同的路线进行的。

18世纪早期英国牛顿学派的代表人物有泰勒、马克劳林、棣莫弗和斯特林等。泰勒发现的著名定理

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

是把函数展成无穷级数的最有力的方法。为反驳伯克利主教对牛顿流数法的攻击，马克劳林发表了著名的《流数通论》(1742)，对微积分作出系统处理。泰勒、马克劳林之后，英国数学陷于长期停滞、僵化的状态。这是因为，17世纪末即已爆发的发明微积分优先权的争论，滋长了不列颠数学家们狭隘的民族偏见，他们出于对牛顿的崇拜，固守牛顿迂回的几何手法，停止了与欧洲大陆的数学交流。

与此对照，在海峡对岸，新分析在莱布尼茨的继承者们的推动下蓬勃发展起来。伯努利家族的数学家们首先继承并推广莱布尼茨的学说。雅各布第一运用莱布尼茨引用的符号$\int$，并称之为积分，莱布尼茨采用他的建议，并列使用“微分学”与“积分学”两个术语。他还利用莱布尼茨的计算方法，解决了一系列的几何问题，如定义了平面曲线的曲率半径，研究了对数螺线，悬链线，发现了双纽线等。雅各布第一的弟弟约翰第一在莱布尼茨的协助之下发展和完善了微积分学。他借助于常量和变量，用解析表达式来定义函数，这比在此之前对函数的几何解释有明显的进步。他在求$\frac{0}{0}$型不定式的值时，发现了现称为洛必达法则的方法。他还完善和发展了积分计算法，例如，他解决了有理分式的积分问题。约翰的学生、法国数学家洛必塔根据约翰的讲义，编写了第一本系统论述微分学的教程，对传播微分学起到很大作用。

欧拉在伯努利家族的影响下成长起来，成为18世纪数学的中心人物。他把由伯努利家族继承下来的莱布尼茨的分析学加以系统整理，于1748年出版了《无穷分析引论》，这部巨著与他随后发表的《微分学原理》(1755)、《积分学原理》(1768—1770)，标志着微积分历史

上的一个转折:以往的数学家们都以曲线作为微积分的主要研究对象,而欧拉则第一次把函数放在中心位置。微积分从此被看作是关于函数的理论,并且是建立在函数的微分的基础之上。函数概念本身也由于欧拉等人的研究而大大丰富。数学家们开始明确区分代数函数与超越函数,隐函数与显函数、单值函数与多值函数等;通过对一些困难积分问题的求解,建立了一系列新的超越函数,如Γ函数,B函数、椭圆不定积分等;已有的对数、指数和三角函数的研究不仅进一步系统化而且被推广到复数领域。

在整个18世纪,数学家们忙于获得新成果,对微积分本身的严密性很少注意。人们对函数、导数、微分、连续性等基本概念还没形成统一的认识,对级数与积分的收敛问题,累次积分交换次序问题,微分方程解的存在与唯一问题等,都很少过问。尽管如此,也有一些数学家对建立微积分的严格基础作出了重要尝试。除了欧拉的函数理论外,18世纪另一位天才的数学大师拉格朗日试图使微积分摆脱无穷小量和极限,而采取了所谓"代数的途径"。他在1797年出版的《解析函数论》中,提出用函数的泰勒级数来定义它的各阶导数,并以此作为微积分理论的出发点。法国数学家达朗贝尔也试图对微积分作出严格的论证,他首次把极限理论作为微积分的基础,并给出单调递增变量的极限的严格定义。欧拉、拉格朗日和达朗贝尔的工作为19世纪微积分的严格表述提供了方向。

在这个世纪里,同物理、力学的有机结合是数学发展的显著特色之一。几乎所有的数学家都以极大的热情致力于运用微积分的新工具去解决各种物理、力学问题。18世纪数学界的代表人物欧拉同时也是杰出的理论物理学家,而分析大师拉格朗日最负盛名的著作是《分析力学》。分析数学的发展直接受到物理和力学问题的推动,一方面数学为解决物理、力学(及天文学)而创造出新的方法和理论,另一方面,物理学和力学的进展也越来越需要新的数学方法和理论作为它的工具。这种广泛的应用使一系列新的数学分支在18世纪成长起来。

常微分方程的发展从17世纪末开始。三体问题、摆的运动及弹性理论等的数学描述引出了一系列常微分方程。18世纪的数学家主要致力于寻找常微分方程的通解。莱布尼茨给出齐次方程和线性方程的通解,他还和伯努利兄弟利用某种变换把所谓"伯努利方程"化为线性方程。约翰第一·伯努利还给出高阶线性方程的降阶法。欧拉从1728年开始对二阶方程进行系统研究,他用指数变换 $x=e^t$ 求出常系数线性方程的通解,还建立了任意阶常系数齐线性方程的古典解法。丹尼尔·伯努利、斯图姆、刘维尔、里卡蒂等人也都对二阶方程进行了深入研究。

在18世纪中叶,由于数学物理中的问题,首先是关于弦振动的问题,开始了偏微分方程的研究。1746年达朗贝尔建立了第一个弦振动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}。$$

这种方程很快被欧拉推广到二维和三维的情形。由于对万有引力的研究,欧拉在1752年又建立了所谓“位势方程”

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0。$$

拉格朗日和勒让德特别是后者深入研究了位势方程的解的性质,由此引出所谓“勒让德多项式”。一阶偏微分方程首先出现在流体力学和几何问题之中,在流体力学中还出现了第一个偏微分方程组(1755)。

到18世纪末期,微分方程已发展成为一门极重要的数学学科,并且成为研究自然科学的有效工具。

变分法的发展是与微积分的发展交融在一起的。在17世纪末,约翰第一·伯努利曾向数学界提出挑战,征求对“最速降线”问题的解。问题的提法与求普通的函数极值不同,它是寻求一个满足某些条件的极值函数,即泛函的极值。牛顿、莱布尼茨、洛必达、伯努利兄弟等都给出了正确的答案(摆线)。变分法的奠基者是欧拉,他从1728年开始寻求泛函极值的一般解法,1736年得到泛函极值有解的必要条件,并陆续求出许多泛函问题的极值。法国数学家克莱罗于1733年发表的论文《论极大极小的某些问题》是变分学的第一篇重要论著,而欧拉1744年的论文《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》标志着变分法的诞生。拉格朗日在18世纪中期开始研究变分法,在1755年的论文中解决了更广一类的问题,同时也得到了欧拉的必要条件。拉格朗日和欧拉通信讨论有关泛函极值的问题,并把这种新方法称为变分法。拉格朗日还首先把变分法置于分析的基础之上,充分利用变分法来建立分析力学体系。全部力学被他化归为一个统一的变分原理——虚功原理。

在18世纪30至40年代,欧拉曾利用幂级数详细讨论过初等复变函数的性质,并得到了著名的欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$。达朗贝尔和欧拉分别在1752和1777年的论文中讨论复函数 $f(z)=u+iv$ 的导数存在的条件,导出了著名的达朗贝尔-欧拉方程(后来更多地称为柯西-黎曼方程)。拉普拉斯在这一时期也研究过复函数的积分。但是以上三人的工作都存在着本质上的局限性(没有把 $f(z)$ 看成是一个基本实体)。第一个试图建立复变函数的系统理论的是拉格朗日,他想利用幂级数来建立解析函数的全部理论,但是没有获得成功。尽管如此,他们的工作已为19世纪复变函数的全面发展奠定了基础。

这些新分支与微积分本身一起,形成了被称之为“分析”的广大领域。在18世纪,其繁荣程度远远超过代数与几何。数学家力图用纯分析的手法以摆脱对几何论证的依赖,这种倾向是18世纪数学发展的一个特点。

在18世纪,几何与代数也都获得了一定的发展。解析几何在这个世纪成为一个独立的且充满活力的数学分支。虽然牛顿和雅格布第一·伯努利对特殊问题曾使用过极坐

标，但极坐标的正式、普遍使用开始于瑞士数学家赫尔曼1729年的工作，他利用极坐标研究一般的曲线，并建立了从直角坐标到极坐标的变换公式。英国数学家斯特灵把平面二次曲线的一般方程化为标准形(1717)，欧拉建立了平面曲线的参数方程(1748)。空间解析几何是在18世纪发展起来的。约翰第一·伯努利引进了现在通用的三个坐标平面(1715)；法国数学家帕朗最早使用三个坐标变量的方程表示曲面；克莱罗和赫尔曼建立了空间曲线和二次曲面的方程；等等。欧拉和蒙日对空间解析几何也都有过重要工作，前者用坐标变换把三个变量的二次方程化为标准形，得到了6种曲面；后者则阐明二次曲面的截线是二次曲线，并研究了直纹曲面的性质等。

微分几何在很大程度上也是微积分的自然产物，它与解析几何同时发展起来并在18世纪形成独立的学科。对于平面曲线的研究，在17世纪末已得到许多结果，18世纪主要是发展空间曲线和曲面的理论。空间曲线的理论由克莱罗开创经欧拉的工作而完善。克莱罗(1731)解析地论述了空间曲线的基本问题，他称空间曲线为“双曲率曲线”，研究了其切线、法线、给出了弧长表达式。欧拉最初(1774)是为探索扭曲线的形状问题而开始空间曲线的研究，他用参数方程(以弧长为参数)来表示空间曲线，并引进了球面指标线的概念，推导出曲率半径的表达式。法国数学家朗克雷也研究了空间曲线理论，给出了挠率的表达式。他们的工作在19世纪被柯西发展。曲面理论是从研究曲面上的测地线开始的。欧拉在1760年的论著《关于曲面上曲线的研究》中建立了曲面的理论，对微分几何作出重要贡献。蒙日自1771年开始发表的一系列论文使微分几何在18世纪的发展达到高峰，他及其学生全面概括了空间曲线的一般理论，并在可展曲面、极小曲面、曲面曲率及各种曲面簇等方面获得了系统的结果。蒙日还通过其几何研究建立了偏微分方程的特征理论。蒙日的《画法几何学》在18世纪重新唤起对综合几何的兴趣，他指出画法几何只是投影几何的一个方面，这促进了更一般的投影几何学与几何变换理论的发展。

在18世纪，代数很难与分析分开，它在许多情形下都服从于分析，而促进代数发展的大量因素也来自分析。人们对于无理数和复数的认识有了一定进展。欧拉、兰伯特和勒让德等研究了 π 的无理性，并区分了代数数和超越数。欧拉提出复数的对数的正确认识，达朗贝尔关于一切虚数都有形式 $a+bi$ 的断言开始被同时代人接受。对方程理论的研究，是18世纪代数学的主要内容。从18世纪中叶开始，许多数学家如达朗贝尔、拉格朗日、欧拉等都在研究代数基本定理。直到1799年，高斯才给出第一个实质性的证明。高于四次的代数方程的根式求解问题始终困扰着18世纪的数学家，高斯对二项方程的研究及拉格朗日对方程的根的有理函数及其置换的研究为19世纪代数学的革命性发展开辟了道路。

18世纪的数学研究活动，大部分与欧洲各国的科学院相联系，在大学里长期存在数学教学与研究分离、脱节的现象。到18世纪末，格丁根大学开始强调教学与研究的结合。法国大革命时期建立的巴黎综合工科学校和巴黎高等师范学校则成为新型的科学教育和研究机构的典范。它们对19世纪数学研究的开展有极大的影响。社会政治环境对18世纪数学的发展有直接的影响。英国学术界的保守气氛，同拥教保王的政治环境不无关系，而法国大革命则提供了社会变革影响数学事业的典型史例。18世纪法国最优秀的数学家，几乎都被吸收到革命政权的各项改革活动中去。而拉格朗日、拉普拉斯、蒙日、勒让德等都受聘出任巴黎综合工科学校或巴黎高等师范学校的数学教授。蒙日还兼综合工科学校的校长。他们的工作，使这两所学校成为新一代数学家的摇篮。

19世纪的数学（**mathematics in 19th century**）　19世纪是整个人类文化发展史上的一个重要时期，近代自然科学在这一世纪发展到更深入、更全面的地步，在数学领域则表现出前所未有的发展和成就。非欧几何的诞生和射影几何的复兴，函数论的创立与分析学的严格化，近世代数的创始，数学公理化运动的开端等都是19世纪最典型的数学成就。空前的创造精神与高度的严格精神是19世纪数学发展的主要特征。

18世纪数学发展的主流是微积分学的扩展，它与物理、力学和天文学的问题密切相联。微积分的运用使这些自然科学领域迅猛发展，到18世纪末，已经达到一种相对完美的程度。这使得数学界产生一种对数学发展前途悲观的情绪，许多著名的数学家觉得数学源泉已经枯竭。而事实上，数学却正处于全面兴旺发达的前夜：18世纪的数学家忙于获取微积分的成果与应用，较少顾及其概念与方法的严密性，到18世纪末，为微积分奠基的工作已迫切地摆在数学家面前；另外，分析学之外的数学分支在18世纪也积累了一批重要问题，如复数的意义，欧氏几何中平行公设的地位、高次代数方程根式可解性等，在18世纪末已引起数学家极大的关注；再有，从18世纪开始，自然科学出现众多新的研究领域，从数学外部给予数学以新的推动力。这些因素促成了19世纪数学的蓬勃发展。

19世纪欧洲的社会环境也为数学发展提供了适宜的舞台。法国资产阶级大革命所造成的民主精神和重视教育的风尚，鼓励大批有才干的青年进入数学教育和研究领地。法国在19世纪一直是最活跃的数学中心之一，涌现出一批优秀人才，如傅立叶、泊松、庞斯列、柯西、刘维尔、伽罗瓦、埃尔米特、若尔当、达布、庞加莱、阿达马等。法国革命的影响波及欧洲各国，使整个学术界思想十分活跃，冲击到所有禁区。英国新一代数学家克服了近一个世纪以来以牛顿为偶像的固步自封局面，成立了向欧洲大陆数学学习的“分析学会”，使英国进入世界数学发展的潮流。英国数学界的杰出人

物有皮科克、格林、哈密顿、德·摩根、西尔维斯特、凯莱、布尔等。从18世纪下半叶起，德国的思想意识领域一直十分活跃，这对数学的发展产生了很大影响。从高斯登上数学舞台，德国逐渐成为与法国并驾齐驱的又一个世界数学中心。除高斯外，麦比乌斯、施陶特、普吕克、雅可比、狄利克雷、格拉斯曼、库默尔、外尔斯特拉斯、克罗内克、黎曼、戴德金、G.康托尔、C.F.克莱因、希尔伯特等都是19世纪最重要的数学家。处于数学中心之外的地区和国家，也出现了不少优秀人才，最杰出的有挪威的阿贝尔和李，捷克的波尔查诺，俄国的罗巴切夫斯基、切比雪夫和柯瓦列夫斯卡娅，瑞士的施泰纳，意大利的贝尔特拉米、里奇和皮亚诺等。这种人才辈出的局面在数学史上是空前的。

在19世纪，数学教学与研究有机地结合在一起，已成为一种社会职业。数学家人数与成果剧增，为交流研究成果，出现了一批数学期刊，最早问世的是法国的《纯粹与应用数学年刊》(1810)、最著名的有克雷尔创办的德文的《纯粹与应用数学杂志》(1826)和刘维尔创办的法文的《纯粹与应用数学杂志》(1836)。到19世纪后期，各国的数学会相继成立。最早成立的是伦敦数学会(1865)，之后创建的有法国数学会(1872)、美国数学会(1888)和德国数学会(1890)等。在1897年，由各国数学会发起，在瑞士苏黎世召开了第一届国际数学家大会，以后成为一项定期举办的国际学术活动。

1801年，高斯发表《算术研究》，这部象征近代数论起点的巨著，同时也打开了数学新世纪的大门。19世纪前的数论，有一些漂亮但却孤立的成果，高斯将这些成果系统化，对问题及方法加以分类，同时开辟了全新的课题及方法。他在数论中树立了严格证明的典范，其观点代表了19世纪追求数学严密性的时代精神。狄利克雷是高斯数论工作的传播者和拓广者。高斯的《算术研究》十分难读，狄利克雷撰写一部《数论讲义》(1863)对高斯的思想进行解释和传播。1837年，他在证明每一个算术序列$\{a+nb\}$(a、b互素)包含无穷多素数时，精心地使用了级数理论，他的工作开辟了近代解析数论的研究领域。黎曼在1859年发表的关于素数分布的论文中，研究了黎曼ζ函数，给出了ζ函数的积分表示与它满足的函数方程，并提出著名的黎曼猜想。他的工作极大地推动了解析数论的发展。在19世纪中叶，刘维尔开创了对超越数论的研究，他在1844年构造出历史上第一批超越数。1873年，埃尔米特证明了e是超越数，1882年，林德曼证明了π是超越数，从而解决了古希腊数学家提出的“化圆为方”问题。19世纪超越数论的最高成就是林德曼和外尔斯特拉斯建立的著名定理。由高斯在19世纪初开创的代数数论的研究，经由戴德金和克罗内克等人的推进，形成为内容丰富的现代数学分支。戴德金引进一种代数数类代替库默尔的理想数，重建了代数数域中的唯一因子分解定理，创立了理想论。克罗内克则另辟蹊径，得到相似的概念，并创立了有

理函数域论，引进在域上添加代数量生成扩域的方法。

非欧几何的发现是19世纪最富革命性的创造。自古希腊时代起，欧氏几何一直被认为是客观物质空间唯一正确的理想模型，是严格推理的典范。但欧氏几何的平行公设曾引起历代数学家的关注，以弄清它和其他公理、公设的关系。这个困扰了数学家几百年的问题，终于被高斯、罗巴切夫斯基和波尔约各自独立解决。高斯在1816年已认识到平行公设不可能在欧氏几何其他公理、公设的基础上证明，得到非欧几何的要领，但他担心受人指责而未公开发表。1826年前后，罗巴切夫斯基和波尔约几乎同时分别发现平行公设的不可证明性，并在平行公设不成立的假设下建立了一种新的几何体系。罗巴切夫斯基在1829年发表的《几何学基础》是最早的非欧几何文献，因此后人也称这种几何为罗巴切夫斯基几何。非欧几何的技术细节是简单的，但观念的变革是深刻的。非欧几何的发现打破了两千多年来欧氏几何的一统天下，从根本上革新和拓广了人们的几何学观念，为几何学乃至整个数学及其应用开辟了崭新的途径。但是，由于非欧几何违背传统，所以在创立之初未受到数学界的重视，只是到高斯去世后，他关于非欧几何的通信和笔记出版时，才因高斯的名望而引起数学界的关注。非欧几何的真正确认是在1868年。这一年，贝尔特拉米发表重要论文，在伪球面上实现了罗巴切夫斯基几何，他在欧氏空间中给出直观上难以想象的非欧几何模型。之后，C. F. 克莱因(1871)和庞加莱(1882)分别给出各自的非欧几何模型，说明非欧几何本身的相容性与欧氏几何一致，加速了人们接受非欧几何的进程。

在解析几何产生的百余年内，代数的和分析的方法统治了几何学，几乎排斥了综合的方法。射影几何在17世纪曾经有过相当活跃的时期，但很快被解析几何和微积分的兴起所淹没。随着18世纪后期学术思想的活跃和由蒙日等人唤起的对纯几何课题的重视，射影几何复兴了，并且成为19世纪上半叶最热门的课题。这项工作开始于卡诺，他研究了四个点和四条直线的交比及其射影不变性。紧接着，庞斯列沿着蒙日开辟的方向，探讨几何图形在任一投影下所有截影共有的性质。他的《论图形的射影性质》(1822)是射影几何的奠基性著作。施泰纳和普吕克等人继承了彭赛列的工作，前者运用综合法研究代数曲线和代数曲面；后者引入射影坐标，用代数方法研究射影几何的性质，他们的工作丰富了射影几何的内容。19世纪下半叶，数学家对射影几何的认识进一步深化。C. F. 克莱因拓广凯莱关于射影度量的概念，把几种经典几何(欧氏几何、非欧几何等)都看成是射影几何的子几何，彻底澄清了射影几何与那些度量几何的关系，为几何学公理化运动开辟了方向。1882年，德国数学家帕施建立了第一个严格的射影几何演绎体系。

19世纪的数学家在研究纯粹几何的同时，仍然十分注意分析方法在几何中的应用。微分几何创立于

18世纪，当时的内容仅涉及用分析方法研究位于欧氏空间的曲线、曲面的性质。高斯在20年代初开始研究微分几何，他在1827年发表的《关于曲面的一般研究》开创了微分几何的现代研究。在这篇论文中，高斯把握住微分几何中最重要的概念和带有根本性的内容，建立了曲面的内蕴几何学，这些工作有着深远的影响。微分几何更重要的发展属于黎曼，他在1854年发表的就职讲演《关于几何基础的假设》中，发扬了高斯关于曲面的微分几何研究，他以二维微分形式定义流形的度量，给出流形曲率的概念，建立起任意维空间的内蕴几何。他还把欧氏几何、非欧几何都包罗在他的体系之中。黎曼的深刻思想在当时很少有人能理解，经19世纪60年代贝尔特拉米等人的介绍与推进，黎曼的理论才开始为广大数学家领悟。

微积分在18世纪已发展成为一门独立的学科，具备了极为丰富的内容和十分广泛的应用，但它自己尚未形成逻辑严密的理论体系，甚至它最基本的概念，如函数、导数、微分、积分、极限、连续性等，都还没有给出严密的定义。19世纪分析的严格化开始于高斯、波尔查诺、柯西、阿贝尔和狄利克雷的工作，并由外尔斯特拉斯进一步发展。1812年高斯对超几何级数所进行的严密研究是数学史上第一项有关级数收敛性的重要工作。1817年，波尔查诺首先抛弃无穷小量概念，用极限观念给出导数和连续性的定义，并得到判别级数收敛的一般准则，但他的工作被长期淹没。柯西是对分析严格化影响最大的学者。他的《分析教程》(1821)除独立得到波尔查诺的结果，还用极限概念定义了连续函数的定积分。这是建立分析严格理论的第一部重要著作。阿贝尔在1826年最早使用一致收敛的思想证明了连续函数的一个一致收敛级数的和在收敛区域内部连续。1837年，狄利克雷在研究三角级数的论文中给出现代意义下的函数定义。1841年以后，外尔斯特拉斯开始了将分析算术化的工作，他发展了柯西的极限概念，用 ε—δ 说法，给出函数连续性的确切定义。他还使用明确的一致收敛概念，使级数理论更趋完善。分析的严密化促进了实数系的逻辑基础的建立。1872年，外尔斯特拉斯、康托尔和戴德金等人在确认有理数存在的前提下，通过不同途径(戴德金分划、有理数的基本序列等)给无理数以精确定义。又经过不少数学家的努力，最终由皮亚诺在1881年建立了自然数的公理体系，并由此从逻辑上严格定义有理数。至此，分析的严格化运动告一段落。

在18世纪，欧拉、达朗贝尔和拉普拉斯等人联系着力学的发展，对于单复变函数已经做了不少工作，但函数论作为一门独立学科是在19世纪发展起来的。柯西、黎曼、外尔斯特拉斯三大家奠定了复变函数的基础。柯西在1814—1825年间，得到了计算复函数沿复平面上路径积分的基本定理和留数计算公式。黎曼在1851年的博士论文中第一次明确了单值解析函数的定义，指出实函数和复函数导数的基本差别，阐明

现称为黎曼面的概念和共形映射定理，开创了多值函数研究的深刻方法，打通了复变函数论深入发展的道路。外尔斯特拉斯从研究幂级数出发，提出复函数的解析开拓理论，引入完全解析函数的概念。此外还有阿贝尔和雅可比的椭圆函数论，以及米塔-列夫勒、皮卡、阿达马等人的工作，成果十分丰富，以致有人称19世纪是函数论的世纪。

在19世纪，微分方程在微积分的新概念和新方法的影响下进入了新的发展阶段。特别是傅立叶在1822年解热传导方程时，提出的用三角级数表示方程的未知解的工作，不仅推进了偏微分方程理论，而且开始了傅立叶级数的研究。成批的数学家围绕常微分方程和偏微分方程的理论与应用做了大量的工作，获得丰硕的成果。

19世纪数学中的另一项重大变革来自代数学。1824年，阿贝尔证明了五次以上的一般代数方程无根式解。1830年，皮科克的《代数通论》问世，书中对代数运算的基本法则进行了探索性研究，为代数结构观点的形成及代数公理化研究作了尝试，德·摩根和布尔也围绕这个目标作出努力。代数中更深刻的思想来自数学史上传奇式人物伽罗瓦。他在1829—1832年之间，提出并论证了代数方程可用根式解的普遍判别准则，从概念和方法上为最基本的一种代数结构——群的理论奠定了基础，阐明了群的正规子群和同构等重要概念。伽罗瓦的创造性工作在他生前没能被数学界了解。另一项引起代数观念深刻变革的成果来自哈密顿和格拉斯曼。哈密顿在1843年创立了四元数理论，四元数是第一个不满足乘法交换率的数学对象。从此数学家便突破了实数与复数的框架，比较自由地构造各种新的代数体系。四元数理论很快成为向量代数、向量分析以及线性结合代数的先导。1844年，格拉斯曼在讨论 n 维几何时，独立地得到更一般的具有 n 个分量的超复数理论，但他的工作由于表达晦涩而无法使当时的学者接受。在数论方面，由于对费马大定理的研究，德国数学家库默尔在1845——1847年间引进了“理想数”概念。在此基础上，戴德金发展了理想理论。这项工作不仅对代数数论的发展有重要影响，也开辟了代数学发展的道路。1854年，布尔发表了《思维规律的研究》。创立了符号逻辑代数，这是使演绎推理形式化的有力工具。在布尔工作的影响下，凯莱和西尔维斯特共同创造了代数型的理论，奠定了关于代数不变量理论的基础。1870年，若尔当发表《置换与代数方程》，第一次对伽罗瓦的贡献给出全面清晰的阐述，为群论在19世纪末的发展奠定了基础。19世纪末期，数学家们从许多分散出现的具体研究对象抽象出它们的共性来进行公理化研究，完成了来自上述几方面工作的综合，终于使以研究方程理论为主的代数学发展成为以研究各种代数结构为主的抽象代数学。

19世纪末期，随着分析严格化的完成，数学家们又开始对数学基础进行更深入的探讨。康托尔在探讨实数定义的同时，研究了傅立叶

级数收敛点集的结构，从1874年起发表一系列有关无穷集合的文章，开创了集合论这一基础性的数学分支。康托尔把无穷集本身作为研究对象，通过一一对应方法，区分无穷集的大小；定义集合的基数，引进序型、序数以及一些属于拓扑学的基本概念。他还提出了著名的连续统假设。康托尔的工作意义十分深远，但一开始在数学界也遭到激烈反对，十几年后才得到确认，并成为20世纪数学研究的基础。

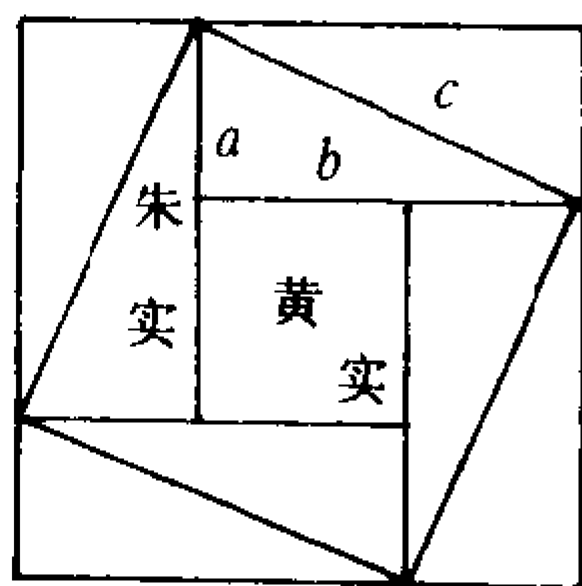
随着皮亚诺关于自然数公理体系和帕施关于射影几何公理体系的建立，在19世纪出现了数学公理化运动的热潮，其中最著名的是希尔伯特于1899年在《几何基础》中阐述的欧几里得几何的公理系统。他考虑了公理系统的独立性、相容性和完备性，并证明欧氏几何的相容性可以归结为算术的相容性。数学家们在为各数学分支建立公理体系的同时，还通过完善所论体系的公理来探索新问题。

还有一些新的分支，如函数逼近论，组合拓扑学、实变函数论、积分方程的一般理论等都在19世纪末登上数学舞台。总之，到19世纪末，数学已发展成为拥有众多分支的广大领域。数学研究越来越专门化，但是，在数学研究专门化的趋势之中也蕴含着整体化的因素。群论的新应用就是最好的例证。1872年，C. F. 克莱因在著名的《埃朗根纲领》中根据变换群的观点，对几何进行系统分类，揭示了群的概念在几何中的统一作用，开拓了研究几何的一种有效方法。1874年，挪威数学家李在研究常微分方程与保持这些方程的解不变的变换群之间的关系时，创立了连续变换群理论及相应的代数。

与18世纪末的情况形成鲜明的对照，在19世纪末，领头的数学家，如庞加莱、希尔伯特等对数学的前途充满信心。1900年，希尔伯特在第二届国际数学家大会上所作的题为《数学问题》的报告，提出了在当时数学前沿上尚未解决的23个问题。他的报告成为迎接20世纪数学大发展的宣言书。

数 学 家

赵爽(Zhao Shuang,公元 3 世纪初) 中国数学家。东汉末至三国时代人。生平不详,约生活于公元 3 世纪初。字君卿,东吴人。据载,他研究过张衡的天文学著作《灵宪》和刘洪的《乾象历》,也提到过“算术”。主要贡献是约在 222 年深入研究了《周髀算经》,为该书写了序言,并作了详细注释。其中一段 530 余字的“勾股圆方图”注文是数学史上极有价值的文献。它第一次给出勾股定理的理论证明,将勾股定理表述为“勾股各自乘,并之,为弦实。开方除之,即弦。”证明方法叙述为“按弦图,又可以勾股相乘为朱实二,倍之为朱实四,以勾股之差自相乘为



弦 图

中黄实,加差实,亦成弦实”。即 $2ab+(b-a)^2=c^2$,化简便得 $a^2+b^2=c^2$。其基本思想是图形经过割补后,面积不变。刘徽在注释《九章算术》时更明确地提出了出入相补原理,这是后世演段术的基础。赵爽注文中证明了勾股形三边及其和、差关系的 24 个命题。例如 $\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)=a$,$\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)=b$,$\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)+(c-b)=c$ 等等。他还研究了二次方程问题,得出与韦达定理类似的结果,并得到二次方程求根公式之一。此外,创用“齐同术”,在乘除时应用了这一方法,还在“日高图论”中给出重差术的证明。赵爽的数学思想和方法对中国古代数学体系的形成和发展有一定影响。

刘徽(Liu Hui,263 年左右) 中国数学家,魏晋年间人。籍贯与生卒年不详。据《隋书·律历志》(公元 7 世纪)记载,他于公元 263 年注释《九章算术》。刘徽在该书序中自叙说“徽幼习《九章》,长再详览”,可知他早年就学习过《九章算术》,成年后又继续深入研究。他除了注释《九章算术》外,还撰写了《重差》作为该书第 10 卷。唐初以后,《重差》以《海岛算经》为名独立成书。《九章算术》是中国古代流传下来最早也是最重要的数学著作,几乎集中了当时的全部数学知识。刘徽全面论述了《九章算术》所载的方法和公式,指出并纠正了其中的错误,在数学方法和数学理论上做出杰出贡献,成为中国古代数学理论的奠基者。他的贡献有:创立割圆术,运用朴素的极限思想计算圆面积及圆周率,得到 $\pi=157/50$、$3927/1250$ 两个近似值;发展了天文观测中的重

差术，提出重表法，连索法，累距法三种基本方法；重视逻辑推理，同时又注意几何直观的作用，采取“析理以辞，解体用图”的注释方法；在求体积问题上指出《九章算术》中球体积公式的错误，设计了牟合方盖，（直径相同的两个正交圆柱的公共部分），为日后祖暅原理的建立指明方向。刘徽还创造了解线性方程组的互乘相消法；在中国第一次提出不定方程问题；建立了等差级数前几项和的公式；改进了许多问题的解法。经过刘徽注释的《九章算术》影响深远，支配我国数学的发展一千多年，成为东方数学的代表作。

祖冲之（Zu Chongzhi，429—500） 中国数学家、科学家。南北朝时期人，字文远，生于宋文帝元嘉六年(429)，卒于齐昏侯永元二年(500)。祖籍范阳郡遒县(今河北涞源县)。先世迁入江南，祖父掌管土木建筑，父亲学识渊博。祖冲之从小接受家传的科学知识。青年时进入华林学省，从事学术活动。一生先后任过南徐州(今镇江市)从事史、公府参军、娄县(今昆山县东北)令、谒者仆射、长水校尉等官职。主要贡献在数学、天文历法和机械三方面。在数学方面他写了《缀术》一书，被收入著名的《算经十书》中，作为唐代国子监算学课本，可惜后来失传了。《隋书·律历志》留下一小段关于圆周率的记载，祖冲之算出 π 的真值在 3.1415926(朒数)和 3.1415927(盈数)之间，准确到小数第 7 位，成为当时世界上最先进的成就。这一纪录直到 15 世纪才由阿拉伯数学家卡西打破。祖冲之还给出 π 的两个分数形式：22/7(约率)和 355/113(密率)，其中密率准确到小数第七位，在西方直到 16 世纪才由荷兰数学家奥托重新发现。祖冲之还和儿子祖暅一起圆满解决了球体积的计算问题，得到正确的球体积公式。在天文历法方面祖冲之创制了《大明历》，最早将岁差引进历法；采用了 391 年加 144 个闰月的新闫周；首次精密测出交点月日数(27.21223)，回归年日数(365.2428)等数据，还发明了用圭表测量冬至前后若干天的正午太阳影长以定冬至时刻的方法。在机械学方面设计制造过水碓磨、铜制机件传动的指南车、千里船、计时器等等。此外他在音律，文学，考据方面也有造诣，是历史上少有的博学多才的人物。

祖暅（Zu Geng，5～6 世纪） 中国数学家、天文学家。祖冲之之子，5～6 世纪人，字景烁。在梁朝担任过员外散骑侍郎、太府卿、南康太守、材官将军、奉朝请等职务。青年时代已对天文学和数学造诣很深，是祖冲之科学事业的继承人。主要贡献是修补编辑祖冲之的《缀术》，因此可以说《缀术》是他们父子共同完成的数学杰作。《九章算术·少广》章李淳风注所引述的“祖暅之开立圆术”，详细记载了祖冲之父子解决球体积问题的方法。刘徽注释《九章算术》时指出球与外切“牟合方盖”的体积之比为 $\pi:4$，但他未能求出牟合方盖的体积。祖冲之父子采用了“幂势既同，则积不容异”(二同高的立体，如在等高处的截面积恒相等，则体积相等)的原理，解决了这一问题，从而给出球体积的正

确公式。这一原理后人称之为“祖暅原理”，在西方，直到17世纪才由意大利数学家卡瓦列里重新发现。在天文学方面祖暅曾于504、509和510年三次上书建议采用祖冲之的《大明历》，最后一次终于实现了父亲的遗愿，《大明历》被梁武帝天监采用颁行。他还亲自监造八尺铜表，测量日影长度，并发现了北极星与北天极不动处相差一度有余，改进过当时通用的计时器—漏壶。著作有《漏刻经》、《天文录》等，但前者失传，后者仅存残篇。

王孝通（**Wang Xiaotong，公元7世纪初**） 中国数学家、天文学家。唐朝人，生平不详。据《新唐书·历志》载，唐朝初年曾任算历博士。武德六年（623）与吏部朗中祖孝孙一起校勘傅仁均所订的《戊寅元历》（618），可知他对历法颇有研究。武德九年（626）任通直郎太史丞。他在《上缉古算术表》中自述道，少小学算，任太史丞。主要贡献在数学方面，著有《缉古算术》（约630），唐显庆元年（656），李淳风等人将它收入十部算经并立于学馆，改称《缉古算经》。这是算经十书中最晚的一种，也是最难懂的一种。主要贡献是在世界上最早提出三次代数方程的解法。书中共收20题，从求三次方程的正根入手，解决了土建水利等工程中出现的大量问题。除第一题涉及历法外，其余题目都是体积计算和勾股定理应用，大多数题目的解法用到三次方程。这比西方13世纪斐波那契特殊三次方程的数值解早600多年，比16世纪意大利出现的一般三次方程解法提前8～9个世纪。他的问题一方面要求根据工程情形计算体积，另一方面要从已知某一部分工程的体积，返求这一部分的长、宽、高，因而可以解决大工程中逐段验收的问题。其中设计上下宽窄不一，前后高低不同的堤体或沟渠的体积计算问题颇具匠心，使所列方程的系数都是正数，其正根恰为有理根。他的工作是宋元时期“天元术”的雏形，为这一方法提供了素材。此外他还对《周髀算经》勾股圆方图论作了补充和发展，并对双二次方程给出两次开方法。

李淳风（**Li Chunfeng，604—672**） 中国数学家、天文学家。唐代人，约生于隋文帝仁寿四年（604），约卒于唐高宗咸亨三年（672）。生于岐州雍县（今陕西凤翔）。父李播任过隋朝官职，很有文学成就。李淳风少时聪颖，受家父影响博览广识，对天文、数学尤感兴趣。贞观（627—649）初因驳傅仁均的《戊寅元历》之谬误受唐太宗赏识，授予将仕郎，入太史局（相当于现在的天文台）。641年任太史丞（相当于天文台副台长）。648年升为太史令（台长）。656年因修订国史有功被封为昌乐县男（爵位），662年改为书阁郎中，后复为太史令至终。他数学上以注释十部算经而著称，其中有《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《缉古算经》、《缀术》等。注释后的这十部算经于656年被定为国子监教科书刊用全国。李淳风在注释中不乏提出新的算法，或创新说、立新意，也纠正原书存在的缺点错误，

常为后人称道。在《九章算术》少广章开立圆术注文中，他引用祖冲之父子对球体积的研究论述，使《缀术》失传后，这些成果得以流传至今。他还在《隋书·律历志》中记载了祖冲之有关圆周率的结果，后人据此得知，祖冲之已求得精确到7位小数的圆周率值，还得到"密率"$\frac{355}{113}$和"约率"$\frac{22}{7}$两个近似分数值。他还对大量天文气象史料做了记录、解释和分类，并"增损刘焯《皇极历》，改撰《麟德历》"，该历在格式推算上均有改进，于665年后行用60余年。

一行（**Yi Xing，683—727**） 中国数学家、天文学家。唐代人，生于唐高宗弘道元年(683)，卒于唐玄宗开元十五年(727)。原名张遂，魏州昌乐（今河南南乐）人。曾祖张公谨任过襄州都督、郯国公，父张擅当过武功县令。一行自幼聪敏好学，"博览经史，尤精历象、阴阳、五行之学"。青年时以学识渊博闻名，武则天侄儿武三思"慕其学行，就请与结交"，一行避之，不久就剃度为僧，取名一行，隐居嵩山、天台山，学习佛教经典和天文数学。后多次受召，均拒绝。直到717年才回长安。721受玄宗之命主持编修新历。他主张在实测的基础上编订历法，为此首先制造了大批测量天体用的仪器，其中较著名的有黄道游仪、水运浑象等。724年又发起天文大地测量，得到地球子午线一度之长为351里80步的结论，是世界上第一次子午线实测。725年开始编写《大衍历》、历经两年写成草稿后不幸早逝，年仅45岁。《大衍历》后经张说和历官陈玄景等人整理成书，于729年施行。该历比唐代已有历法都更精密，734年曾传入日本，行用近百年。在中国虽然只用了29年，但其编写方法和格式为后代历法家采用，影响深远。他的数学贡献是在编制历表的计算中使用了不等间距的二次内插法，将刘焯的内插法推进了一步。他还提出全国不同地点相对于标准点阳城计算蚀差的方法，使用了具有正切函数性质的表格和含有三次差的近似内插公式等。此外著有佛教论述多种，故亦被称为佛学家。

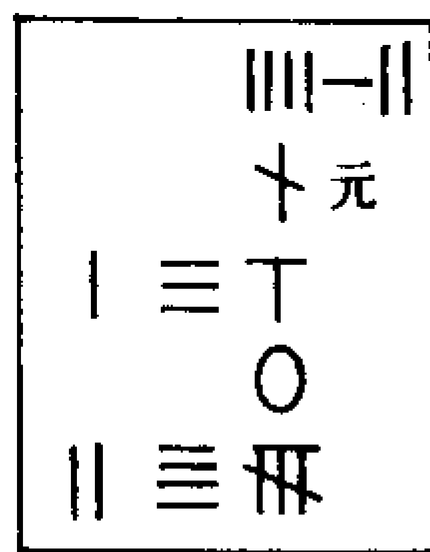
沈括（**Shen Kuo，1033—1097**） 中国科学家。北宋人，约生于明道二年(1033)，约卒于绍圣四年(1097)。字存中，浙江钱塘（今杭州）人。自幼受家庭影响，爱好学习。少年随父走南闯北，增长见识。12岁延师受业，喜博览群书。1051年受任为沭阳（今江苏沭阳）主簿，着手治理沭水，提倡修圩造田，使七千顷地变为良田。1505年赴东海（今江苏东海）代县令。1601年任宣州宁国（今安徽宁国）县令，两年后进京（今开封）应举进士，后编校昭文书籍，还任过司理参军和司天监翰林学士和权三司使等多种官职。1085年移居润州梦溪园私宅，潜心著述，于1088年完成巨著《梦溪笔谈》26卷。该书共载有200多条科学技术论述，内容涉及数学、物理学、化学、天文、地质、地理、气象、工程技术、生物和医学等多种学科，不仅是我国古代科技史上不朽的杰作，也是世界科技资料库中的一份宝贵遗产。在数学方面他在卷18

《技艺》中首先提出"隙积术"，纠正了古代刍童(长方台)法"常失于数少"的错误，给出依次堆成长方台型的物体的总个数公式

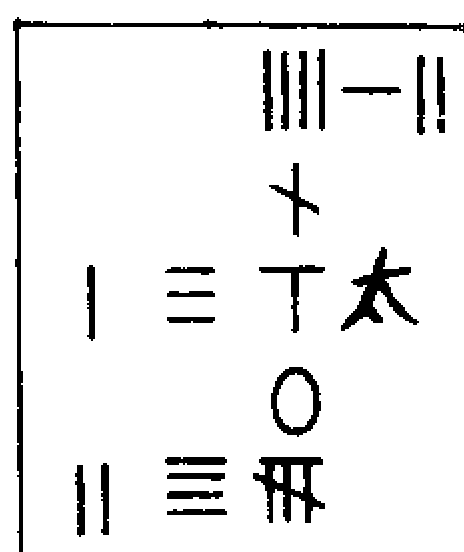
$$S=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a)$$

(其中 a、b、c、d 分别是顶层和底层的长和宽的个数，n 为层数)，开辟了研究高阶等差级数求和问题的新方向，为南宋杨辉"垛积术"，元代郭守敬的"招差术"开辟了道路。他还创立"会圆术"，给出已知弓形的高和圆的直径求底长和弧长的方法，在郭守敬《授时历》中得到应用。此外他将数学知识广泛应用于天文、历法和军事、工程中，得到许多重要结果。他还在诸多学科中有重要记载和发现。如中国古代四大发明中就有两项(活字印刷和指南针)出自《梦溪笔谈》，其著作仅注册的就有155卷。传世的尚有《良方》、《长兴集》等。

李冶(Li Ye，1192—1279) 中国数学家。金元时期人，生于金明昌三年(1192)，卒于元十六年(1279)。原名李治，字仁卿，号敬斋，金朝真定府栾城县(今河北栾城县之北)人。"自幼喜算术"。1230年考中"词赋进士"，在钧山(河南禹县)任知事两年。后钧州被蒙古军破，李冶弃职北走，隐居崞山(今山西太原北)，潜心学问。1248年著成《测圆海镜》12卷。1251年回元氏封龙山隐居讲学，结交张德辉、元好问，号称"龙山三老"。元世祖忽必烈曾多次召见，许以高官厚禄，他都辞官不受，以老病为名婉言拒绝。1259年又写成《益古演段》3卷。这两部数学著作一直流传至今，成为我国宋元数学的宝贵遗产。《测圆海镜》是李冶生平得意之作，他在自序中说该书是根据洞渊"九容"之说推衍而得，全书共170问，都是已知直角三角形三边求内切圆、旁切圆等的直径之类的问题，被称为解勾股形，也是现存最早的一部系统论述"天元术"的著作。宋、元的"天元术"相当于现在的代数或方程论。李冶在书中明确使用"天元"代表未知数 x，以常数项为"太极"在旁边记"太"字，x 的系数旁边记"元"字。例如 $4.12x^2-x+136-248x^{-2}$ 表示为



或



李冶创用在筹上加斜画表示负数，并以位置表示小数。《益古演段》共64题，是为普及天元术而作的，主要讨论各种平面图形间的面积关

系。此外他还著有100多卷文学、史学等其他论著,可惜多已失传。

秦九韶(Qin Jiushao,1202—1261) 中国数学家。南宋人,约生于宋嘉泰二年(1202),卒于景定二年(1261)。字道古。普州安岳(今四川安岳县)人。父亲当过潼川(四川三台)郡守。秦九韶早年曾在杭州"访习于太史,又尝从隐君子受数学"。18岁"在乡里为义兵首",以后离开四川,在湖北、安徽、江苏等地做官。晚年被贬到梅州(今广东梅县),不久便死在那里。他学术渊博,被称为"性极机巧,星象、音律、算术以至营造等事无不精究"。在数学上的贡献是于1247年完成《数学大略》18卷的写作,明代后期改名为《数书九章》。全书共有81个问题,分为9类,每类9个问题。内容包括一次同余式的解法,历法计算和降雨降雪量的测量,面积计算,勾股重差,均输税收,粮谷转运与仓窖容积,建筑施工,营盘布置及军需供应,交易与利息等问题。主要贡献是一次同余式和高次方程的解法。他总结了历算家计算上元积年的方法,在《孙子算经》"物不知数"题的基础上,提出"大衍求一术",并针对不同的情况,提出不同的程序,完整地解决了一次同余问题,比西方同类解法早500多年。在解高次方程时,他总结了和巩固了前人的开方法,提出正负开方术,有系统地应用到任意次方程的有理或无理根的求解上去,比西方同类解法早近600年。此外他还独立发现了用三角形三边表示其面积的公式,改进了线性方程组的解法,并第一次用十进分数表示无理数的近似值。该书还翔实反映了南宋社会的经济情况,是非常有价值的历史资料。

杨辉(Yang Hui,13世纪中下) 中国数学家。南宋人。生平不详,约在13世纪中叶至后半叶活动于苏、杭一带。字谦光,钱塘(今杭州)人。著有5部共21卷数学书,对了解当时数学的发展情况具有重要意义。其中《详解九章算法》12卷(1261),取《九章算术》246问中80问进行详解,分为解题(包括解释题意,名词术语,文字校勘和评论等内容),细草和比类三项,并附有纂类,将《九章算术》题目按解题深浅程度重新编排。书中的"开方作法本源图"曾被称为杨辉三角形,杨辉指明此系贾宪(约11世纪)所用。西方称这样的二项式系数排列为"帕斯卡三角形",从时间上看已分别在杨辉和贾宪之后400和600年了。《日用算法》2卷(1262)为通俗实用算书,《乘法通变本末》3卷(1274)论四则运算等方法,《田亩比类乘除捷法》2卷(1275)记叙开方术,《续古摘奇算法》2卷(1275)论纵横图,并说《海岛算经》,保存了许多珍贵的数学史料。他的著述广征博引,强调数学研究与教育工作应放在计算技术方面,提倡循序渐近和熟读精思的学习方法,还特意为初学者制定了"习算纲目",因此他被称为杰出的数学教育家。杨辉在数学上以乘除捷法、纵横图研究、级数求和等成就被列为与秦九韶、李冶和朱世杰齐名的宋元四大家,为数学的发展做出重要贡献。同时他的先进的教育思想和数学方法对后世也有深刻的影

响，在中国数学教育史上占有重要地位。

郭守敬（Guo Shoujing, 1231—1316） 中国数学家。元代人。生于元太宗三年(1231)，卒于元仁宗延祐三年(1316)。字若思，顺德邢台(今河北邢台)人。祖父郭荣通晓五经，对数学和水利都很有研究，并与元世祖忽必烈的谋臣刘秉忠为友，经常在一起探讨学术问题。郭守敬自幼受家庭亲长熏陶，喜欢读书。后被祖父送到刘秉忠处学习，与王恂为友，攻读天文历法，数学和水利。1263年任银符河渠副使，后任过都水监，工部郎中，同知太史院事，太史令等职。1276年元帝忽必烈下令改历，郭守敬与许衡、王恂等人负责工作。他创制多种天文仪表，建立天文台进行大规模天文观测，推算精确的回归年长度，经过4年努力，于1280年制成《授时历》，翌年颁行时，许、王二人均已逝世，新历最后清稿、定稿等工作都是郭守敬独立完成的，因而该历常冠以郭守敬的名字。其数学贡献主要有，与王恂共同创立“招差术”，用以计算太阳在黄道上的逐日速度和它在黄道上的径度，这种等间距三次内插法由朱世杰进一步发展，成为宋元数学的杰出成就之一；在黄赤道差和黄赤道内外度的计算中创用弧矢割圆术，他将解法列成公式，给出详细证明，与现代球面三角学的计算方法相当。郭守敬完成天文历法著作共计14种105卷，还制成简仪、浑天象，日月食仪等天文观测仪器数十种。此外，他长年致力于河工水利，提出并主持完成大都到通州的运河工程。

王恂（Wang Xun, 1235—1281） 中国数学家，天文学家。元代人，生于元太宗七年(1235)，卒于元世祖至元十八年(1281)。字敬甫，中山唐县(今河北省唐县)人。父亲多闻博识，对他早年教育影响很大。王恂自幼承父学习，少年时代已对天文、数学融会贯通。后从刘秉忠(忽必烈的谋臣)到邢台附近的紫金山读书，与郭守敬同学，其间进步显著，成为数学名家。1253年由刘秉忠举荐，受忽必烈委任太子伴读，后升太子赞善、国子祭酒等职。元十三年(1276)奉命改历，与郭守敬一道组织太史局(1279年改称太史院)，王恂任太史令，负责天文观测和推算方面的工作。1280年编成新历—《授时历》。他在改历工作中的数学贡献是多次使用三次内插法，并造了三次差分表；第一次研究了球面上弧与弧的关系；把高次方程用于历法研究。这些成就当时在世界上都处于领先地位，其贡献与郭守敬同名。王恂自己没有著作流传，但世人对他的评价甚高，称他为“算术冠一时”的数学家。

朱世杰(Zhu Shijie, 13世纪末到14世纪初) 中国数学家。元代人，生平不详。字汉卿，号松庭，寓居燕山(今北京附近)。著有《算学启蒙》(1299)和《四元王鉴》(1303)传世，与秦九韶、李冶、杨辉一起被称为宋元四大名家。从莫若、祖颐为《四元玉鉴》所写的序言中得知，他曾“以数学名家周游湖海二十余年，四方之来学者日众”，说明他以数学研究和数学教学为业游学四方，活

动年代约在13世纪末和14世纪初。《算学启蒙》共3卷259问，内容包括四则运算、高次开方、天元术等，由浅入深，形成较完整的体系，是一部当时较好的数学启蒙书。其中所给出的正负数乘除法则和完整的九归除法口诀，为中国数学史上首次出现。该书流传到朝鲜、日本等国，在我国一度失传。1839年得到朝鲜翻刻本重新翻印流传，后人多有注释。《四元玉鉴》共3卷288问，内容包括高次方程组(最多可包括4个未知数)的解法，高阶等差级数求和，高次内插法等重要贡献。朱世杰集前贤之大成，建立四元高次方程理论，称之为"四元术"。他用天、地、人、物表示四个未知数，相当于现在的x,y,z,u，把常数项放在中央(记为"太")，各未知数的各次幂依次放在上下左右，而各未知数各次幂的两两乘积则置于平面的相应位置。书中还出现最早的多项式运算和多元高次方程组的解法。此外朱世杰将高阶等差级数求和高次内插法进行了发展，实际上已得到任意高次差的招差公式，比西方同类结果早近400年。《四元王鉴》被认为是中国数学著作中较重要的一部。也是整个中世纪最杰出的数学著作之一。朱世杰等人的工作在许多方面居世界前列，使中国古代数学发展到顶峰。

程大位(Cheng Dawei，1533—1606) 中国数学家。明代人，生于明嘉靖十二年四月初十(1533年5月3日)，卒于万历三十四年八月十七(1606年9月18日)。字汝思，号宾渠。安徽休宁人。少年时读书广博，对书法和数学感兴趣。20岁时在长江中下游经商，因商务计算需要，留心数学，遍访名师，搜集古籍，刻苦钻研，并时有心得。40岁返家，潜心学术。60岁时(1592)完成《直指算法统宗》(简称《算法统宗》)17卷，并详述编写经过。后"删其繁芜，揭其要领"，缩编为《算法纂要》4卷，于1598年出版。《算法统宗》是中国古算书中印行数量最多，流传和影响最广的一部数学著作，以系统总结珠算术理论而著称。全书595个问题，绝大多数取自前人的算书，用珠算方法加以解答。书中详细记述了珠算盘的定位方法和加减乘除口诀，多数口诀与现在相同，许多算法为后世珠算长期沿用。书中最早提出珠算开平方开立方的方法，创造了测量田地用的"丈量步车"(类于现在测量用的卷尺)，介绍了民间算法"金蝉脱壳"、"一掌全"(一种指算法)、"铺地锦"(格子乘法)等，记录了多种幻方(纵横图)，并附有北宋元丰七年(1084)以来各种数学书目51种，对了解当时数学书传布的情况颇有价值。《算法统宗》对珠算的普及起了重要作用，以致于"握算持筹之士，莫不家藏一编"。明朝末年，该书传入朝鲜、日本及东南亚各地，对这些地方传播珠算也起了重要作用。

徐光启(Xu Guangqi，1562—1633) 中国数学家、科学家。明代人，生于嘉靖四十一年三月二十(1562年4月24日)，卒于崇祯六年十月初七(1633年11月24日)。字子先，号玄扈，上海徐家汇人。1597年赴京参加顺天府乡试中第

一名举人。曾以教书为生。1604年北京会士中进士，同年改充翰林院庶吉士。1607年任翰林院检讨，1629年升为礼部左侍郎，1633年官至文渊阁大学士。不久病故。徐光启是介绍和吸收欧洲科学技术知识的先驱和积极推动者，在数学、天文学和农学等方面都做出重要贡献。他认识到数学是“众用之基”，力主在引进西方科学书籍时首先翻译数学书。1606年与意大利传教士利玛窦合作翻译了欧几里得《几何原本》前6卷，于1607年在北京付印。这是中国现存的第一部数学译著，也是第一次将西方数学的严密逻辑体系和推理方法引入中国，译文文字简练，意义准确，全部数学译名都是首创，其中许多至今仍在沿用，如点、线、面、平面、曲线、曲面、直角、钝角、锐角、垂线、平行线、对角线、相似、外切等等。该译本被称赞为“字字精金美玉，是千古不朽之作”。徐光启还与利玛窦合译了《测量法仪》(1607)、《简平仪说》(1611)等书，并亲自撰写了《测量异同》和《勾股义》，将西方三角学和测量方法引入我国。1629年，受皇帝之命组织历局，进行历法改革，数年后编译出137卷的《崇祯历书》，系统介绍西方天文历法和三角学，影响深远。此外他编著的《农政全书》(1625—1628)60卷对中国农学发展作出重大贡献。

梅文鼎（**Mei Wending, 1633—1721**） 中国数学家、天文学家。清代初年人，生于明崇祯六年(1633年3月16日)，卒于清康熙六十年(1721)。字定九，号勿庵，安徽宣城人。幼年跟随父亲梅士昌及私塾老师罗王宾学习天文知识，知其大略。27岁(1660)跟随倪正学习《大统历》，并订正其讹误，写成心得《历学骈枝》2卷(后增修成4卷)，自此立志研习历算。1679年在臬台金长真幕下当教席。1689年曾到北京教书5年。他学习勤奋，研究刻苦，据自撰《勿庵历算书目》(1702)载，共著有天文学、数学著作70余种，其中数学著作20余种。其孙珏成1761年重编《梅氏丛书辑要》60卷，其中数学著作13种共40卷。梅文鼎坚信中国传统数学“必有精理”，对古代数学名著作了深入研究，同时又能正确对待西方数学，使移植过来的西方数学在中国扎根。其著作冶中西数学于一炉，集古今中外之大成，对弘扬民族文化有积极作用，对后世数学产生较大影响。主要成就有：在《方程论》(1672)中对系数为分数的一次方程组提出新解法，将传统数学分为算法和量法；在《勾股举隅》中全面论述了解勾股形问题；在《少广拾遗》(1692)中重新发展了求高次幂正根的方法；他在全面系统整理和会通西方数学的同时有所创造，除介绍笔算，纳皮尔算筹、伽利略比例规算法、正多面体体积公式等知识外，还对三角学中“不详其理”的公式和定理进行推导与证明，研究了许多复杂的正多面体的作图，并用传统的勾股算法对《几何原本》的若干定理进行证明。此外著有天文著作62种。康熙皇帝于1705年曾三次召见他，向他请教天文数学。梅文鼎的弟弟、儿子、孙子、曾孙共有十数人研习数学，是我

国数学史上少有的数学家族。

年希尧（Nian Xiyao，？—1738） 中国数学家。清代人，生年不详，卒于乾隆三年(1738)。字允恭，广宁(今辽宁锦州北镇)人。活动于康熙雍正年间，先后在云南、河北、安徽等地做官。对科学颇感兴趣，主要研究数学和医学，突出成就是系统论述了画法几何学理论。他在宫廷供职时，正值意大利画家郎世宁为清宫作画。年希尧向郎世宁学习透视技术，后潜心钻研，多有心得，成《视学》2卷，于1729年刊刻。后继续研究，补充附图，于1735年刊出修订再版本。这是介绍西欧画法几何学的最早著作，其中有许多工作是年希尧的独创，成为画法几何学的系统专著，比法国数学家蒙日1799年出版的《画法几何学》一书早70年。主要内容有：论述用"量点法"作出图形的平行透视图和成角透视图；利用几何体二视图以及视线在坐标轴上截距作出透视图；轴测图中心光源阴影作图法。书中给出大量精美插图，在中国版画史上也属罕见佳作。其中有许多表现实物的二视图，包括球等曲面体的图例，反映出他对投影法的掌握已很熟练。一些近代画法几何教科书中的方法已在《视学》中设专题论述。但此书流传极少，据说国内仅存两部再版本。此外，他还撰有《测算刀圭》3卷，讲述三角学及三角对数；《面体比例便览》1卷，论及对数知识。

明安图（Ming Antu，1692—1764） 中国数学家，天文学家。清代人，约生于康熙三十一年(1692)，约卒于乾隆二十九年(1764)。字静庵，蒙古族正白旗人。青少年时为官学生，后入钦天监(相当于现在的天文台)学习天文、历法和数学，曾"受数学于圣祖(清康熙帝玄烨)"。结业后一直在钦天监工作，曾任钦天监时宪科五官正近40年，分官历法的推算、编订及翻译。乾隆二十四年(1759)，升任钦天监监正(相当于现在天文台长)，直至去世。他在数学上以研究三角函数和反三角函数的幂级数展开式而著称，将中国古代传统数学知识与当时传入的西方数学知识结合起来，创用割圆连比例法和级数回求法，证明了清初法国传教士杜德美向中国学者介绍的π的无穷级数公式，正弦和正矢的幂级数展开式三个公式，分别称之为圆径求周式，弧背求正弦式和弧背求正矢式，还得出有关弦、弧、矢和半径相互关系的另外六个公式。晚年草成《割圆密率捷法》4卷，给出所得到的各无穷级数公式及证明和在数学、天文学中的应用，后由其学生陈际新、张肱，其子明新于1774年续成。他的思想方法对我国19世纪数学发展有一定影响，促进了积分学方面的研究。在天文学方面他早年参加过《律历渊源》的编纂工作，后来参与过三部重要专著的编写。在《历象考成》(42卷)任考测工作，在《历象考成后编》(10卷)中任总裁和汇编，在《仪象考成》中任推算工作。这些著作在天文学史中占有重要地位，其中有些成果达到当时世界先进水平。

焦循（Jiao Xun，1763—1820） 中国数学家、哲学家。清代

人，生于乾隆二十八年(1763)，卒于嘉庆二十五年(1820)。字理堂、号里堂。江苏甘泉(今扬州市阡江县)人。25岁始学数学，且“学无师授”。因勤学善思，进步显著，成为数学名家。可谓大器晚成。1801年38岁时成为举人。博学多识，经、史、历、算、声韵、训诂诸学无所不精。与汪莱、李锐共同探讨数学问题，号称“谈天三友”。在数学上著有《释轮》2卷(1796)、《释椭》1卷(1796)、《释弧》3卷(1798)、《加减乘除释》8卷(1798)、《天元一释》2卷(1800)，以上5种合刊为《里堂学算记》。另有《开方通释》1卷(1801)、《乘方释例》5卷(1790)等。主要贡献是总结了当时传入的西方天文学中的数学基础知识，如椭圆的几何理论，三角八线的产生和球面三角形的解法等；对中国古代传统数学成果进行了整理与研究；阐述了算术的若干基本理论，如加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律，加法与乘法的分配律，整指数的二项定律等；开创我国符号代数学研究的先河，用甲、乙、丙、丁等天干字代表不同的数，并以此为基础阐述加减乘除规则，这在我国数学史中具有重要意义。他也被人称为经学家或数理哲学家，曾用数理解释《周易》，著有《雕菰楼易学》等大量经学专著。此外亦通地理博物，著有《论语地理考》、《北湖小志》等书。

汪 莱(Wang Lai，1768—1813) 中国数学家。清代人，生于乾隆三十三年(1768)，卒于嘉庆十八年(1813)。字孝婴，号衡斋，安徽歙县人。出身贫苦，幼年读书不多。但刻苦用功，“不由师傅，深造自得”，终于博通经史及天文、数学。成年后以教书为业，与焦循、李锐共同探讨天文数学问题。1806年受聘负责测量六塘河入海口，供治河参考。1807年到北京考取八旗官学教习，入国史治纂修《天文志》、《时宪志》等民用历书。因修书有功，1809年被选授石埭县(今安徽石台县)儒学训导(主管文教)，直至早逝。著有《衡斋算学》7册(1796—1805)和遗稿《衡斋遗书》9卷，由学生夏燮整理后合刻刊行。主要贡献有：发展了中国古代的方程理论，提出高次方程正根的存在及数目问题和方程系数应具备的条件，当方程的根均为正根时，得到了与三次方程韦达定理一致的结果；系统讨论了球面三角形6种基本问题的求解，分别得出了有解和无解的条件；得到一系列组合公式。他还对勾股问题、P进位制等问题有创见，著有《递兼数理》、《参两算经》等专著。其中《参两算经》是中国数学史上第一篇专论P进位制的著作，意义深远。此外为观测和修历需要，设计制造过浑天仪、简平仪、一方、勺漏等天文仪器。

李锐(Li Rui，1769—1817) 中国数学家。清代人，生于乾隆三十三年十二月八日(1769年1月15日)，卒于嘉庆二十二年六月三十日(1817年8月12日)。字尚之，号四香，江苏元和(今苏州)人。幼时聪敏，自读《算法统宗》，能“心通其义”。后师事于清代著名学者钱大昕，潜心数学研究，成为他的得意门生。1796年读秦九韶、李冶的数学著作，加以校勘注释。次年入浙江学

政阮元幕府，参与纂修《畴人传》46卷，实际上主持编写工作。1803年成为杨州知府张敦仁幕宾，参与古代数学典籍的整理，并算校张敦仁的所有著作。他还与焦循、汪莱为友，共同研讨数学，号为“谈天三友”。他在《勾股算术细草》和《弧矢算术》中试以天元术解决勾股问题和弧矢问题，又撰《方程新术草》和《开方说》，得到与现代方程论中的笛卡儿符号法则一致的论断等结果。例如方程各项系数出现一次变号，可有一个正根，出现两次变号可有两个正根，出现三次变号，可有三个或一个正根，出现四次变号可有四个或两个正根。其它成就有：讨论了负根和无实根的方程；在整数范围内提出了无实根的二次方程与双二次方程的判别条件；讨论了重根问题；提出“代开法”等。他对宋元数学家有关方程的理论进行概括，运用科学的归纳方法和抽象方法对传统数学深入研究，做出突破性的结果，使我国的方程论形成一门较完整的学科。他还对《测圆海镜》、《益古演段》、《九章算术》、《孙子算经》等宋元时代和《算经十书》中的许多古代经典算书进行了校释或整理。主要著作收入《李氏算学遗书》中。

项名达(**Xiang Mingda，1789—1850**) 中国清代数学家，原名万准，字步莱，号梅侣，浙江钱塘（今杭州市）人，祖籍安徽歙县。1816年为举人，考授国子监学正，1826年成进士，改任知县，但未就职。应考进士期间，曾在京盘桓数年，与友人研讨数学，后返居故里。1837年任余杭苕南书院主讲。此后在杭州著名的三大书院之一紫阳书院执教，并研究数学。1846年退职还家。主要著作有《象数一原》(1849)、《勾股六术》(1825)、《三角和较术》(1843)、《开诸乘方捷术》(1845)，后三种合刊为《下学庵算术》印行。

《象数一原》的主要内容是论述三角函数幂级数展开式问题。推广了明安图和董祐诚的结果，归纳出两个新的幂级数公式。项名达还求出椭圆周长公式，是中国在二次曲线研究方面最早的重要成果。还据此推出圆周率倒数公式。项名达与友人戴煦共同讨论求二项式 n 次根的简法，在《开诸乘方捷术》中提出了幂指数为 $\frac{1}{n}$ 的二项式定理以及用逐次逼近法开 n 次方的递推公式。《象数一原》全书共6卷，项名达在撰写此书时已年老病重，其中卷四和卷六未能完稿，后由戴煦遵从他的嘱托于1857年补写完成。《勾股六术》与《三角和较术》是项名达为初学者撰写的数学入门书。在这两卷书中，对于勾股形、平面三角形及球面三角形的各边及其和、差的互求关系，做了较系统的分类与总结。

戴煦(**Dai Xu，1805—1860**) 中国清代数学家。字鄂士，号鹤墅，又号仲乙。钱塘（今杭州市）人。少年时代就对数学有浓厚兴趣，一生致力于数学，淡于功名进取。与当时的数学家罗士琳、徐有壬及李善兰等人均有交往，尤与项名达成忘年好友，共同研讨数学问题。戴煦著述甚丰，著有《音分古义》二卷，《庄

子内篇顺文》一卷,《元空秘旨》一卷,《重差图说》若干卷,《勾股和较集成》一卷,《四元玉鉴细草》若干卷,《广割圆捷法》一卷,但均未刊行。戴煦的代表作是《求表捷术》九卷,其中包括论对数表造法的《对数简法》二卷(1845)和《续对数简法》一卷(1846),论三角函数表造法的《外切密率》四卷(1852)及论三角函数对数表造法的《假数测圆》二卷(1852)。戴煦所给的三种表的造法,在中国数学史上均有超越前人的成就。他独立发现了指数为有理数的二项式定理、对数函数及某些三角函数的幂级数展开式。英国传教士艾约瑟将其著作译成英文寄给"算学公会"。1860年2月太平军攻克杭州,戴煦与其长兄同日自尽。

李善兰(Li Shanlan,1811.1.2—1882.12.9) 中国清代数学家、天文学家、翻译家和教育家。原名心兰,字竞芳,号秋纫,别号壬叔,浙江海宁县硖石镇人。李善兰自幼酷爱数学。十岁时读《九章算术》。十五岁时读了欧几里得《几何原本》前六卷。以后又寻阅各种数学书籍,逐渐学懂了李冶的《测圆海镜》、戴震的《勾股割圆记》等数学名著。经常与数学家顾观光、张文虎、汪曰桢、戴煦、罗士琳及徐有壬等人进行学术交往,时有心得,辄复著书,1845年前后发表了具有解析几何思想和微积分方法的研究成果——"尖锥术"。

1852—1859年,李善兰在上海墨海书馆与英国传教士、汉学家伟烈亚力等人合作翻译出版了《几何原本》后九卷,以及《代数学》、《代微积拾级》、《谈天》、《重学》、《圆锥曲线说》、《植物学》等西方近代科学著作,又译《奈端数理》(即牛顿《自然哲学的数学原理》)四册(未刊),这是解析几何、微积分、哥白尼日心说、牛顿力学、近代植物学传入中国的开端。在译书工作中,李善兰创造了许多科学名词。今天我们经常用到的"代数"、"常数"、"函数"、"变数"、"微分"、"积分"、"切线"、"法线"、"渐近线"等都出自他的手。19世纪60年代,"洋务运动"兴起,他先后在徐有壬、曾国藩军中作幕僚,从事有关的科技学术活动。1867年在南京整理出版了他过去的各种天算著作,定名为《则古昔斋算学》,其中包括《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》、《垛积比类》、《四元解》、《麟德术解》、《椭圆正术解》、《椭圆新术》、《椭圆拾遗》、《火器真诀》、《对数尖锥变法释》、《级数回求》和《天算或问》等13种24卷。其中《垛积比类》四卷是李善兰最出色的著作之一,书中包含着不少独特的创造,例如引入了著名的李善兰恒等式。1866年,随着洋务运动的发展,北京同文馆增设天文、算学、化学等学科,请李善兰就任天文算学总教习,他于1868年到任,直至1882年他逝世为止,从事数学教育十余年,其间审定了《同文馆算学课艺》、《同文馆珠算金鍼》等数学教材,培养了一大批数学人才,是中国数学教育的鼻祖。他的重要数学著作还有《考数根法》、《粟布演草》、《测圆海镜解》和《九容图表》等。《考数根法》撰成于1872年,是我国最早的素数论专著。在判别一个自然

数是否为素数时，李善兰证明了著名的费马素数定理，并指出了其逆定理不真。

华蘅芳（**Hua Hengfang，1833—1902**） 中国清代数学家、翻译家和教育家。字若汀。江苏金匮（今无锡市）人。少年时代酷爱数学，遍览当时的各种数学书籍。研究了中西数学的不同风格和各自的长处。青年时他到上海向李善兰请教，李氏向他推荐西方的代数学和微积分，对他走上数学道路有很大影响。1861年他与同乡好友徐寿受聘到曾国藩的安庆军械所，绘制机械图并造出中国最早的轮船"黄鹄"号。1865年，华蘅芳参与筹划创设江南制造总局。1868年局内增设翻译馆，华蘅芳与徐寿积极从事，专门介绍西方先进的科学技术，分门别类地进行系统译述。华蘅芳同外国学者合作翻译的书籍一类属于矿物、地质、气象和军事工程等，一类是数学。他同英国人傅兰雅共译出《代数术》二十五卷，《微积溯源》八卷，《三角数理》十二卷，《代数难题解法》十六卷，《决疑数学》十卷，《合数术》十一卷，《算式解法》十四卷等。华蘅芳的译书在概率论、微积分学、代数学、三角学等方面都有许多新的内容，其译文流畅易懂，他是李善兰之后引进西算影响最大的人。华蘅芳的数学著作有《开方别术》、《数根求解》、《开方古义》、《积较术》、《学算笔谈》、《算草丛书》以及《算学须知》、《西学初阶》、《平面三角测量法》、《抛物线说》等。前六种收入文集《行素轩算稿》中，重刻过多次。华蘅芳长期从事教学，1880年在上海公书院教书，1887年在天津武备学堂任算学教习，1892年在武昌两湖书院主讲算学。他与李善兰、徐寿齐名，成为有声望的一代学者。

姜立夫（**Jiang Lifu 1890. 7. 4—1978. 2. 3**） 中国数学家、数学教育家。原名姜将佐。生于浙江平阳，卒于广州。1911年留学美国，1915年在加州大学获学士学位，1919年在哈佛大学获博士学位。1920年到南开大学任教授。1934年后到德国格丁根大学进修两年。抗日战争期间在西南联大任教，主持数学所的工作。1946年到美国普林斯顿高等研究院进修。解放后在广州岭南大学和中山大学任教。姜立夫是中国现代数学教育的先驱。他在南开大学时基本上是一个人办起数学系，培养了包括江泽涵、陈省身在内的一批杰出数学家。他十分注意数学文献的收集和保管，使南开大学的数学图书馆一度在全国领先。他还倾注大量精力从事数学名词的审定工作，出版了《算学名词汇编》（1938）和《数学名词》（1945）等。姜立夫的数学研究在几何学方面，著有《圆和球的方阵理论》，还翻译过黎曼几何学方面的著作。

钱宝琮（**Qian Baochung，1892. 5. 29—1974. 1. 5**） 中国数学史家、数学教育家。字琢如，浙江嘉兴人。卒于江苏苏州。早年肄业于嘉兴秀水县学堂，1907年考入苏州江苏铁路学堂学习，1908年考取浙江省官费留学欧美学生，同年10月就读于英国伯明翰大学木工工程系。1912年毕业回国，先后在苏州中等工业学校（1912）、南开大

学(1925)、中央大学(1927)、浙江大学(1928)任数学教师、副教授、教授。1928年首任浙江大学数学系主任。1956年调到中国科学院自然科学史研究所任研究员。钱宝琮是中国数学史学科奠基人之一。他从1919年开始从事中算史研究,1921年发表论文,后出版论文集《古算考源》(1933)和专著《中国算学史》(上册,1932)。他在南开大学首次开中国数学史课,并在数学教学的同时悉心钻研数学史,发表论文数十篇。解放后出版了《中国数学史话》(1957)、《算经十书》(校点,1963)等著作,并主持编写了《中国数学史》(1964)、《宋元数学史论文集》等专著。他是《科学史集刊》(1958年创刊)的主编。他的主要著作被整理成《钱宝琮科学史论文选集》(1983)。钱宝琮治学严谨,讲求实际,侧重数学史实的考证分析,其论著许多成为后人引证的依据。他还在教学中做出突出的成绩,培养了一批数学家和数学史家。

李俨(**Li Yan,1892. 8. 22—1963. 1. 14**) 中国数学史家、铁路工程师。原名禄骥,字乐知,福建闽侯人。生于福州,卒于北京。1912年入唐山路矿学堂,1913年考入陇海铁路局,历任实习生、测量员、助理工程师、总段长、工务处长、副总工程师等职,为建设陇海铁路,工作40余年。对工程学颇有研究,著《铁道定线法》(1938)等书。李俨于1955年调入中国科学院,任历史研究所研究员。1957年出任自然科学史研究室主任直至去世。1955年当选为中科院哲学社会科学部学部委员。1959年当选为全国人大代表。李俨是中国数学史研究的奠基人。他从1911年开始从事中国数学史资料的整理和研究,1917年开始发表论著,一生共发表中国数学史研究方面的论著百余种。代表作有《中算史论丛》(1—5集,1954—1955)、《中国算学史》(1937)、《中国数学大纲》(上、下册,1958)、《中国古代数学史料》(1954)等。其论著十分注意史料的考证和整理,为后人的研究提供了宝贵的资料。

陈建功(**Chen Jiangong,1893. 9. 8—1971. 4. 11**) 中国数学家。生于浙江绍兴,卒于杭州。1910年入杭州两级师范学校读书,1913、1918和1926年三次东渡日本留学,1929年获日本东北帝国大学理学博士学位。留学期间曾发表10余篇学术论文,引起日本科学界的重视。回国后,历任浙江大学数学系教授、系主任,中央研究院数学研究所研究员。1947年应邀去美国普林斯顿高等研究所任访问研究员一年。解放后,历任浙江大学和复旦大学教授、杭州大学副校长、中国科学院学部委员、历届中国数学会副理事长等职。还当选为第一、二、三届全国人民代表大会代表。主要贡献在分析数学方面,他是我国函数论方向的学科带头人。共发表60多篇论文和近10种专著和译著,内容涉及三角级数、直交函数级数、单叶函数、实变函数论、函数逼近论、广义解析函数及偏微分方程等分支。1928年,他和英国数学家哈代、李特尔伍德几乎同时解决了函数用绝对收敛的三角级数表示的问题,获

得国际数学界的赞誉。他从1931年起与苏步青合作在浙江大学举办数学讨论班，后又在复旦大学、杭州大学举办数学讨论班，培养了大批数学人才。

熊庆来(Xiong Qinglai，1893.10.20—1969.2.3) 中国数学家。生于云南省弥勒县，卒于北京。1913年派往比利时学习，翌年，转赴法国，先后就读于格伦诺布尔大学、巴黎大学、蒙彼里埃大学及马赛大学。回国后曾任东南大学、清华大学教授。1931—1933年重赴巴黎深造，获理学博士学位。回国后继续在清华大学任教。1937—1949年任云南大学校长。1949年第三次赴法，继续攻研亚纯函数。1957年回国，任中国科学院数学研究所研究员。1964年当选为中国人民政治协商会议全国委员会常务委员会委员。熊庆来多年从事亚纯函数的研究，共发表创造性论文50多篇。在博士论文中，他建立了无穷级亚纯函数的一个一般性理论，它是波莱尔的关于有穷级数与有穷级亚纯函数理论的自然推广。关于奈望林纳的第二基本定理的推广，他得到了一些深入的结果。他的重要论文多次为国内外学者引用。他综合他人的和自己的一些研究成果，著有《关于亚纯函数及代数体函数，奈望林纳的一个定理的推广》一书，这本书出版在国际著名的丛书《数学科学纪念文集》中。还有各种专著及教材十余种。他一生中对中国数学人才的培养及科学研究的开展都作出了重大贡献。他的许多学生，已成为中国及世界上知名的科学家。

苏步青(Su Buqing，1902.9.23—) 中国数学家。生于浙江省平阳县。中学毕业后去日本求学。1927年毕业于日本东北帝国大学，随后进入该校研究院，1931年获理学博士，同年回国。历任浙江大学教授、数学系主任，中华人民共和国成立后任该校教务长。1952年后，历任复旦大学教授、教务长、数学研究所所长、研究生部主任、副校长、校长和名誉校长等职。1955年当选为中国科学院学部委员。他还是第五、六届全国人民代表大会常务委员会委员和第六届人大常委会科学、教育、文化卫生委员会副主任。他的主要研究领域为微分几何学。早期对仿射微分几何学和射影微分几何学作出了突出的贡献。他建立了独到的方法，用几何构图来表现曲线和曲面的不变量和协变图形，取得了丰富的成果，得到了国际上的高度评价。40—50年代开始研究一般空间微分几何学。60年代又研究高维空间共轭网理论。70年代以来，又注意把微分几何运用于工程中的几何外型设计，在中国开创了新的研究方向——计算几何。苏步青是中国数学会的发起人之一，担任过中国数学会学报的主编。解放后，参与筹建中国科学院数学研究所，创办《数学年刊》杂志并任主编。曾任中国数学会副理事长、名誉理事长。他为国家培养出许多优秀数学人才。他非常关心中学数学教育，为提高中学师资质量、改革中学教材做了不少工作。苏步青一共发表论文168篇，1983年出版了《苏步青论文选集》。还出版了《射影曲线概论》、

《射影曲面论》、《一般空间微分几何》、《计算几何》等专著。

江泽涵(Jiang Zehan,1902.10.6—) 中国数学家。生于安徽旌德县。1926年毕业于南开大学数学系。1927年赴美留学,在哈佛大学数学系攻读研究生,1930年获博士学位。在普林斯顿大学工作一年。1931年回国任北京大学数学系教授,1934年后任系主任。1935年数学会成立后任副理事长。1955年当选为中国科学院学部委员。任北京大学理学院代院长、北京市数学会理事长等职。江泽涵主要从事拓扑学的教学与研究。他是我国拓扑学研究的先导,他的《格林函数临界点的存在》(1932)、《能定向的二维闭流形群》(1936)是我国最早的拓扑学论文。后来他又研究覆叠空间和纤维丛理论、不动点理论等,指导研究生取得了突破性的成果。主要专著有《不动点类理论》(1979)和《拓扑学引论》(1964),还先后发表十余篇研究论文。江泽涵在近50年的教学和科研工作中培养了一批优秀的数学工作者,为我国的数学教育作出重要贡献。

许宝騄(Xu Baolu,1910.9.1—1970.12.18) 中国数学家、统计学家。生于北京,卒于同地。1928年入燕京大学学习化学,1930年转入清华大学攻数学。1936年赴英留学,在伦敦大学当研究生,同时又在剑桥大学学习,1938年获哲学博士学位,1940年又获科学博士学位,同年回国,任北京大学教授,执教于昆明西南联合大学。1945年再次出国,应邀先后在美国伯克利加州大学、哥伦比亚大学和北卡罗来纳大学任访问教授。1947年回国,以后一直在北京大学任教授。他是中国科学院学部委员。许宝騄早期从事数理统计学和概率论研究,一些成果达到世界先进水平。1938—1945年间,他在多元统计分析与统计推断方面发表了一系列的论文,并对极限分布论、线性模型、试验设计与代数编码等方面的问题进行深入而有成效的探讨。他为中国的科学事业和培养中国年轻一代的数理统计工作者作出了很大贡献。为了纪念他,1980年北京大学举行了许宝騄七十诞辰纪念会,1979年美国《统计年刊》发表了国外几位著名学者纪念他的文章,介绍了他的生平和工作。他的著作有《许宝騄文集》(1981)、《抽样论》(1982)、《许宝騄论文选集》(1983,英文版,美国纽约)等。

华罗庚(Hua Luogeng,1910.11.12—1985.6.12) 中国数学家。生于江苏省金坛县,卒于日本东京。因家境贫寒早年没有接受系统的高等教育。1930年在《科学》杂志上发表关于五次方程的文章而受到熊庆来的重视,被邀请到清华大学工作,第一年做管理员,次年任助教,第三年升为讲师。1934年成为文化基金会研究员。1936年作为访问学者到英国剑桥大学进修。1938年回国受聘为西南联大教授。1946年后到苏联、美国等地访问讲学,其间曾任普林斯顿高等研究所研究员和普林斯顿大学教授。1950年回国,先后任清华大学教授,中国科学院数学研究所所长,中国数学会理

事长，中国科学院数理化学部委员、中国科技大学数学系主任、副校长，中国科学院应用数学研究所所长、中国科学院副院长等职。还先后当选为美国科学院外籍院士、第三世界科学院院士等。又被授予法国、香港及美国等地大学的荣誉博士学位。1979年后到英、法、德、荷、美和日本等地讲学和访问。1985年6月12日在日本东京大学作学术报告时，因心脏病发作去世。华罗庚对数学的贡献是多方面的，他一生共发表论著200多种。在数论中，他解决了高斯完整三角和的估计，对华林问题、塔里问题的结果作出了重大推进。他在圆法与三角和估计法方面的结果长期居世界领先地位。他的著作《堆垒素数论》(1953)、《数论导引》(1957)、《数论在近似分析中的应用》(1978，与王元合著)都已成为经典著作。华罗庚在复分析和典型群方面也有许多工作。特别地，他对我国应用数学方法的普及也作出了重大贡献。这方面的代表作有《统筹方法平话》(1964)、《优选法平话》(1971)等。华罗庚还是一位杰出的数学教育家，他治学严谨，教学有方，为国家培养了一大批优秀人才。

陈省身(**Chen Xingshen/Chern Shiing-Shen，1911.10.26—**) 现代数学家。生于浙江嘉兴。1926年入南开大学数学系，受教于姜立夫。1931年考入清华研究院，是孙镗的研究生。1934年获硕士学位。以后游学德国、法国，跟随布拉施克和É嘉当从事数学研究。1936年获博士学位，1937年回国，任西南联大教授，并协助姜立夫主持数学研究所的工作。1943年应邀往美国普林斯顿高等研究所工作，抗日战争胜利后返回祖国，领导中央研究院数学研究所。1949年以后定居美国，先后任芝加哥大学和加利福尼亚大学教授，1984年退休。自1972年以来多次回国讲学，并主持每年一度的国际“双微”会议。1984年应邀任南开大学数学研究所所长。陈省身的数学工作范围极广，包括微分几何、拓扑学、微分方程、代数、几何、李群和几何学等多方面。他是创立现代微分几何学的大师。早在40年代，他结合微分几何与拓扑学的方法，完成了黎曼流形的高斯-博内一般形式和埃尔米特流形的示性类论。他首次应用纤维丛概念于微分几何的研究，引进了后来通称的陈氏示性类，为大范围微分几何提供了不可缺少的工具。他引进的一些概念、方法和工具，已远远超过微分几何与拓扑学的范围，成为整个现代数学中的重要组成部分。陈省身还是一位杰出的教育家，他培养了大批优秀的博士生。他本人也获得了许多荣誉和奖励，例如1975年获美国总统颁发的美国国家科学奖，1983年获美国数学会“全体成就”斯蒂尔奖，1984年获沃尔夫奖。中国数学会在1985年通过决议，设立陈省身数学奖(见陈省身数学奖)。

林家翘(**Lin Jiaqiao/Lin Chi-a-Chiao，1916—**) 现代数学家、物理学家、天文学家。生于北京。1937年毕业于清华大学物理系。后到加拿大多伦多大学就读，1941年获硕士学位，1944年在美国加州理

工学院获航空学博士学位。先后在清华大学、美国加州理工学院和布朗大学任教。1953年成为麻省理工学院教授。1966年当选为全学院教授。他是美国科学院和美国文理学院院士，北京大学名誉教授。历任美国工业和应用数学学会主席、美国数学会应用数学委员会主席。曾获美国数学会应用数学奖和美国物理学会流体力学奖等。主要贡献在应用数学、流体力学和天体物理学等方面。1944年他解决了流体运动稳定性中两个平行板间的流动稳定性问题，推进了微分方程渐近理论的研究。1964年完成星系旋涡结构的密度波理论、成功地解释了许多天文观测现象。专著有《流体动力学稳定性理论》(1955)、《应用到自然科学中的确定性问题的数学》(1974，合著)等。

吴文俊(Wu Wenjun，1919. 5. 12—) 中国数学家。生于上海。1940年毕业于上海交通大学，1949年在法国斯特拉斯堡大学获法国国家科学博士学位。1957年任中国科学院学部委员，1983年任中国科学院系统科学研究所名誉所长，1984年当选为中国数学会理事长。他的主要贡献在拓扑学方面，并从事对策论和奇点理论的研究，他用在拓扑学方面取得的成果，出色地解决了电子器件中的布线问题。吴文俊早年从事拓扑学研究，在示性类、示嵌类等方面获得一系列成果，被国际拓扑学杂志广泛引用。他还在拓扑不变量、代数流形等问题上有创造性工作，其中一些工作至今仍居领先地位。1956年因在拓扑学中的示性类与示嵌类方面的卓越成就获中国自然科学奖一等奖。70年代初，他开始研究中国古代数学史，阐述了中国古代数学思想，有很多新的见解。70年代后期，他致力于数学机械化与机械化的数学的研究，从初等几何着手，在计算机上证明了一类高难度的定理，同时也发现了一些新定理，进一步探讨了微分几何的定理证明。提出了利用机器证明与发现几何定理的新方法。这项工作为数学研究开辟了一个新的领域，将对数学的革命产生深远的影响。1978年获全国科学大会重大科技成果奖，亦获中国科学院科技成果一等奖。

陈景润(Chen Jingrun，1933. 5. 22—) 中国数学家。生于福建福州。1953年毕业于厦门大学数学系，分配到北京当中学教师。1954年回厦门大学任图书资料员。在此期间，写出数论方面的论文，受到华罗庚的赏识，不久调入中国科学院数学研究所工作。主要贡献在解析数论方面。50年代他就对圆内格点问题、球内格点问题、华林问题等已有的结果作出了重要推进。60年代又对筛法及有关问题进行了深入研究。1966年证明了“每一个充分大的偶数都能够表示为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和”，使他在哥德巴赫猜想的研究上处于世界领先地位。这个结果受到世界数学界的瞩目，被誉为“陈氏定理”。他的工作为推进我国学术繁荣起了重要作用。这项工作还使他与王元、潘承洞在1978年共同获中国自然科学奖一等奖。1980年当选为中国科

学院学部委员。陈景润共发表学术论文 70 余篇。

丘成桐(**Qiu Chengtong/Yau Shing-Tung，1949. 4. 9—　)** 中国数学家。原籍广东蕉岭，生于广东汕头。后全家移居香港。在香港培正中学就读时勤奋钻研数学，成绩优异。1966 年入香港中文大学数学系，1969 年提前修完四年课程，为美国伯克利加州大学陈省身教授所器重，破格录取为研究生。在陈省身指导下，1971 年获博士学位。后在斯托尼布鲁克的纽约州立大学、斯坦福大学等校任教，并为普林斯顿高等研究所终身教授。1976 年，丘成桐解决微分几何中的“卡拉比猜想”。这是给定里奇曲率求黎曼度量的问题，其中需要求解一个很难的偏微分方程，丘成桐解决了这个难题。他的成功，促使一大批同类方程得到解决，成果累累，取得了代数几何学、复解析几何学、微分几何学甚至广义相对论等领域的一系列重要定理。1978、1979 年丘成桐与舍恩应用微分几何方法，造极小曲面，运用非线性方程的技巧，证明了广义相对论中的正质量猜想。此外，在高维闵科夫斯基问题、塞梵利猜想、弗兰克尔猜想、三维流形的拓扑学与极小曲面等方面均有成就。1981 年获美国数学会颁发的维布伦奖，1982 年又获菲尔兹奖。

泰勒斯(Thales，约公元前 625——约公元前 547) 希腊哲学家、自然科学家。生于伊奥尼亚的米利都。早年经商，曾游历巴比伦、埃及等地，掌握了那里的数学和天文学知识。以后从事政治和工程活动，并专心研究数学、天文，晚年转向哲学，创立了伊奥尼亚哲学学派，企图摆脱宗教，通过自然现象去寻求真理。他的研究几乎涉及全部人类的思想和行动领域，获得崇高声望，被尊为“希腊七贤之首”。在哲学上他认为处处有生命和运动，并以水为万物的本原；在天文学中他曾精确地预测了公元前 585 年 5 月 28 日发生的日食，还可能写过《航海天文学》一书，并已知按春分、夏至、秋分、冬至划分四季是不等长的；在数学中流传最广的是他曾利用日影及比例关系算出金字塔的高，说明对相似形已有初步认识。而他最重要的贡献是开始引入命题证明的思想，成为希腊几何学的先驱。他得到的命题有：圆的直径将圆平分；等腰三角形两底角相等；两直线相交，对顶角相等；有两角夹一边分别相等的两个三角形全等；对半圆的圆周角是直角；还有测量金字塔中使用的相似三角形对应边成比例等命题。历史学家强调他证明了或企图证明这些命题，使数学从具体的实验的阶段开始向抽象的、理论的阶段过渡，这在数学史上具有重要意义和深远影响。

毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前 580——约公元前 500) 希腊哲学家、数学家、天文学家。生于希腊东部萨摩斯岛，卒于他林敦(今意大利南部塔兰托)。早年曾受教于伊奥尼亚学派的安纳西曼德，以后游历埃及、巴比伦等地，学习古代流传下来的天文、数学知识。回乡后一度讲学，后为摆脱暴政，移居西西里岛，最后定居克罗托

内，在那里广收门徒，建立一个宗教、政治、学术合一的秘密团体，后人称之为毕达哥拉斯学派。该团体后来在政治斗争中遭到破坏，毕达哥拉斯本人逃到塔兰托后被杀害。他的主要贡献在数学，以数的理论而著称。他研究数的目的不是为了实际应用，而是想通过揭露数的奥秘来探索宇宙的永恒真理。主要成就有：将学问分为四类，即算术、音乐（数的应用）、几何（静止的量）、天文（运动的量）；根据“简单整数比”原理创造一套音乐理论；将自然数进行分类，如奇数、偶数、完全数、亲和数、三角数（1，3，6，10，…）、平方数（1，4，9，16，…）、五角数（1，5，12，22，…）、六角数（1，6，15，28，…）等等；发现勾股定理（西方称为毕达哥拉斯定理）和勾股数（西方称为毕达哥拉斯数）；发现五种正多面体；发现不可通约量。由于该学派将一切发明归于首领，且秘而不宣，因此后人不知这些成就具体是由何人何时发明的。此外，在天文学方面首创地圆说，认为日、月、五星都是球体，浮悬在太空中。天体的运行都沿着圆形轨道。毕达哥拉斯学派是古希腊第二个重要学派，其思想学说对希腊文化有巨大影响。

安纳萨戈拉斯（Anaxagoras，约公元前 500——约公元前 428） 希腊数学家、哲学家。生于吕底亚克拉左美尼（小亚细亚古代城市），卒于密细亚兰普萨库斯。其出生地附近的士麦那是希腊最早的哲学学派伊奥尼亚学派的活动区域。他出身名门望族，却立志于科学研究，曾学习伊奥尼亚学派的安纳西门尼斯的著作，继承了该学派的思想。约公元前 480 年来到雅典，从事教学和科学研究，将伊奥尼亚学派的自然观和思辩方法带到那里，影响到希腊科学和哲学的发展，被认为是该学派晚期的代表人物。约公元前 450 年受政事牵连遭监禁，后到兰普萨库斯度过余生。他在数学史上倍受称赞的事是在监狱里仍进行科学研究，专心钻研了化圆为方问题，并有一定收获。可惜他的结果没有流传下来。尽管如此他仍被认为是在理论上进行化圆为方问题研究的第一位数学家。他还阐述过舞台布景的绘制问题，论及透视画法的基本原理。他在《论自然》中对世界的本源问题提出“种子”学说，标志人们对世间万物的认识已不满足停留在感觉器官所能接触到的事物表面，而是力图深入事物内部结构去探索世界，为原子论的产生作了准备。他还提出“奴斯”说。另外在天文学中第一个清晰地认识到月球自身不发光，而是接受太阳光这一事实。

安蒂丰（Antiphon，约公元前 480——约公元前 410 年） 希腊数学家、哲学家。曾在雅典从事学术活动，是古希腊本土第一位智人学派的成员。他在数学上的主要贡献是创用穷竭法讨论化圆为方问题，记载于亚里士多德的《物理学》中。化圆为方是希腊智人学派提出的三大几何作图问题之一，相当于用尺规作出一个长度为 π 的线段。安蒂丰首先做一个内接于圆的正四边形，然后在它的每一条边的上方做两条弦与该段圆弧的中点相交，

形成一个正八边形。再在这个正八边形的每一条边上继续这一过程，得到正十六边形。再继续下去，得到正三十二边形，正六十四边形等等。直至正多边形的边长小到恰与它们各自所在的圆周部分重合，就可以完成化圆为方问题。结论虽然不对，方法却有价值，后人认为这是穷竭法原理的最早形式。当正多边形的边数不断增加时，正多边形与圆周之间的空隙逐渐被"穷竭"了。他的这种思想启发了欧多克索斯穷竭法原理的建立，是近代极限论思想的雏形。他还论述过宇宙中的物质运动和天体的性质，认为基本物质元素具有相对性。著作有《论真理》、《论和谐》、《政治家》、《梦的解释》等，其中大部分在公元1世纪后失传了。

希波克拉底(Hippocrates of Chios，公元前5世纪下半叶)

希腊数学家、天文学家。生于希俄斯，公元前5世纪下半叶活动于雅典。早年经商，不幸落入海盗之手，财产丧失殆尽。为诉讼和查访，在雅典住了很长时间，其间常到学校听课。后从事几何学研究，做出很大贡献。他在研究化圆为方时提出一种化月牙形为方的方法，并将一个月牙形和一个圆一起化为正方形，认为这样就可以化圆为方。结论虽然有误，但在解决这一问题的过程中使用的方法和显示出的几何技巧长期为人称道。他还深入探讨了倍立方问题，第一个将它简化为求两个已知线段中的两个比例中项问题。若a、b是两已知线段，x、y是其间的两个比例中项，则有$a:x=x:y=y:b$。可推出$a^3:x^3=a:b$。若$b=2a$，则$x^3=2a^3$，表示以x为边的立方体的体积是以a为边长的立方体体积的两倍。此后倍立方问题的研究都沿着求比例中项这一途径进行。从他的工作可以看出，欧几里得《几何原本》中的许多定理已为希波克拉底所知，事实上他是第一个汇编有关几何原理著作的希腊学者，可惜原书已失传了。后人认为欧几里得可能在内容上和体例上都借鉴了他的著作。此外，他在天文学中阐述了一种彗星理论，还提出一种银河星系形成的学说。

欧多克索斯(Eudoxus，约公元前400——约公元前347)

希腊天文学家、数学家。生于小亚细亚的尼多斯(今土耳其西南角)，卒于同地。年幼家贫，曾跟随古希腊学者阿尔希塔斯学习几何，还学习过数论、音乐和医学。后到雅典，受教于柏拉图，开始研究哲学。他在埃及和小亚细亚等地生活过，学习天文理论。此后在基齐库斯建立一个学派，人称欧多克索斯学派。晚年定居故里，从事讲学和著述。他是古希腊数学的先驱之一，最大的功绩是创立了比例论，其成果成为欧几里得《几何原本》，特别是其中5、6、12卷的主要内容。他打破毕达哥拉斯学派只适用于可通约量的比例论的限制，用公理法建立体系，可能是第一个对公理和命题作出系统阐述的人。阿基米德将下述公理归于欧多克索斯，即对任意二正数a、b，必存在自然数n，使得$na>b$(现称"阿基米德公理")。欧多克索斯还证明另一个重要命题：取出一量之半，再取

去所余之半，这样继续下去，可使所余的量小于另一任给的小量，这是近代极限论的前驱。他还研究了“中末比”和“倍立方”问题，做出一种作图工具得到倍立方的解答。在应用穷竭法时他获得极大成功，借用归谬法证明了两圆面积之比，等于其半径平方之比，两球体积之比等于其半径立方之比，棱锥与圆锥的体积分别是等底等高的棱柱，圆柱体积的 1/3 等命题。他还用同心球理论解释日月星辰的运动，著有天文、地理等多种论述，可惜都已失传。

阿尔希塔斯（Archytas of Tarentum，公元前 375 左右） 希腊数学家、哲学家、物理学家。生平不详。约公元前 375 年活动于他林敦(今意大利塔兰托)。是毕达哥拉斯学派成员，曾师事该学派的菲洛劳斯。当时毕达哥拉斯学派已解体，一部分人流落到他林敦定居，将那里发展成为该学派晚期的活动中心，阿尔希塔斯是其中的组织者和代表人物。他除了在政治上颇有作为外，在学术上亦多有著述。他区分了 4 种数学科学：几何、算术、天文和音乐，认为这都是使用数学的学科。这种学科分类思想由公元 6 世纪的罗马学者博伊西斯继承发扬，影响到中世纪大学中的课程设置。他对平均值理论和比例论作过深入研究，提出三种平均值：算术平均，几何平均和调和平均。指出“差数为 1 的两数之间没有(有理)几何平均值，”欧几里得《几何原本》卷Ⅷ中的大多数性质及证明是由阿尔希塔斯及其合作者发现的。他还利用三维立体模型解决了倍立方问题，成为这一问题研究较早取得成功的数学家。他发现一种表示勾股数的方法，设 m 为偶数，则 $m,\left(\frac{m}{2}\right)^2-1,\left(\frac{m}{2}\right)^2+1$ 构成一组勾股数。他还将平均值理论应用于音乐理论取得很多成果，被托勒密誉为毕达哥拉斯学派最重要的音乐理论家。此外，他详细叙述过声音的物理原理，制造了会飞的木鸽，提出宇宙无限论，还写了至少三部哲学专著。

欧几里得（Euclid，约公元前 330——约公元前 275） 希腊数学家。生平不详。早年大概学于雅典，深知柏拉图学说，很可能也是这个学派的成员。约公元前 300 年到公元前 295 年期间来到亚历山大工作。他在教学上循循善诱，但反对投机取巧的学风。他的名言“在几何里，没有专门为国王铺设的大路”成为千古箴言。他饱闻博学但又为人谦逊，从不掠人之美，也不过份强调自己的独创工作。一生著述颇多，其中最著名的是《几何原本》。他将公元前 7 世纪以来希腊几何积累起来的丰富成果整理在严密的逻辑体系之中，其中包括伊奥尼亚学派的命题证明思想，毕达哥拉斯学派的数理论，智人学派的尺规作图和穷竭法，埃利亚学派的无穷思想，柏拉图学派的逻辑思想和欧多克索斯的比例论等等，使几何学成为一门独立的、演绎的科学。原本共 13 卷，后人增补两卷。因其内容循序渐进，且博大精深，两千多年来一直是几何学的经典教本，也是流传最广和影响最大的一本数学书。此外他还有保存下来的《已知条件》和《图形的分

割》两部著作，另有《推论集》、《现象》、《光学》和音乐、力学方面失传的著作。其中的《光学》是希腊文的第一本透视学著作，得到一些几何光学的基本命题。

阿基米德(**Archimedes，公元前287——公元前212**) 希腊数学家、力学家。生于西西里岛的叙拉古，卒于同地。早年曾在亚历山大跟随欧几里得的门徒学习，对欧几里得数学的进一步发展做出一定贡献。以后又与亚历山大的学者保持密切联系，因此算是该学派的成员。他的许多学术成果就是通过和亚历山大学者的通信往来保存下来的。在数学中后人对他的评价极高，称之为"数学之神"或有史以来三个最伟大的数学家之一。仅留下的专著就有10种之多。其中《论球与圆柱》从6个定义和5个公理出发，推出关于球与圆柱面积体积的50多个命题。下卷命题4实质上是用几何方法解决相当于三次方程$x^2(a-x)=b^2c$的问题。《圆的度量》只有三个命题，计算圆内接正96边形的周长，求得圆周率在$3\frac{10}{71}$与$3\frac{1}{7}$之间。《论劈锥曲面体与椭圆体》共32个命题，研究几种圆锥曲线的旋转体，以及这些立体被平面截取部分的体积。开篇的两个引理分别是等差数列求和公式和自然数平方和公式。《论螺线》共28个命题，论述"阿基米德螺线"引出的面积和切线问题。《数沙者》是唯一一部算术论著，设计了一种可以表示任意大数目的方法。《抛物弓形求积》共24个命题，可确定抛物线与任一弦所围弓形的面积。他还设计了一个"群牛问题"，导致二次不定方程。此外他还发现13种半正多面体，用边表示三角形面积的"海伦公式"和正七边形作图法。在其他学科中，他以"阿基米德浮力原理"，杠杆定律，平面图形重心求法，天文仪器和螺旋水泵的制作等成就彪炳史册，被称为是将熟练的计算技巧和严格证明融为一体，将抽象理论和工程技术的具体应用紧密结合的典范。

埃拉托塞尼(**Eratosthenes，约公元前276——约公元前195**) 希腊数学家、地理学家。生于昔兰尼(现北非利比亚舍哈特)，卒于亚历山大。早年在雅典受过教育，先后师事逍遥学派的阿里斯顿，柏拉图学派的阿凯西劳斯和犬儒学派的彼翁等。兴趣广泛，博学多才。后到亚历山大，又跟随诗人卡利马科斯学习诗词。约公元前235年起担任亚历山大附设于博物馆的图书馆馆长，直至去世。他是阿基米德的挚友，曾受到阿基米德的高度评价。著作有《地理学》、《地球的测量》、《倍立方问题》、《论平均值》、《柏拉图》等，可惜只有很少的片断流传下来。他在数学上以发明"素数筛子"而著称，记载于尼科马霍斯《算术入门》第13章中，即要在自然数列中从小到大找出素数，先从3开始，将奇数列写出，3是第一个素数，将3后面所有3的倍数都划去；3后面第一个未被划去的数是5，将5后面所有5的倍数都划去；5后面第一个未被划去的数是7，将7后面所有7的倍数都划去，重复这一步骤，直到所写出的数列最后一个数。

未被划去的就是素数。他还叙述了倍立方问题的起源及求解历史，发明一种器械解决了这一问题。在《论平均值》中讨论了各种轨迹和平均值。他在地理学上脍炙人口的业绩是测量地球的大小，原理简单，方法易行，最早将地理置于合理的数学基础之上。此外他还在天文学中估计过月、地距离，日、地距离，测出黄赤交角的数值等。

阿波罗尼奥斯（**Apollonius of Perga，约公元前 262——约公元前 190**） 希腊数学家、天文学家。生于小亚细亚南岸的佩尔格。年青时求学于亚历山大，跟随欧几里得的后继者学习。后来在那里教学并在天文学研究中渐有名气。一度到过小亚细亚西岸的帕加马，在那里的学校和图书馆工作过，结识欧德莫斯等人。主要成就是建立了完美的圆锥曲线论，总结前人在这方面的工作，加上自己的研究成果，撰成《圆锥曲线论》8 卷，将圆锥曲线的性质网罗殆尽。该书在阿拉伯和西欧曾长期被视为经典之作，其地位堪与欧几里得《几何原本》在欧氏几何中的地位相比，他也因此常与欧几里得、阿基米德合称为亚历山大前期三大数学家。《圆锥曲线论》现存前 4 卷希腊文本和其次 3 卷的阿拉伯文本。书中首先证明了三种圆锥曲线都可以由同一圆锥体截取而得，改变了过去要用三种不同的锥体截取的方法，继而给出抛物线、椭圆、双曲线、正交弦等名称，取代了过去的直角圆锥曲线、钝角圆锥曲线和锐角圆锥曲线的叫法。书中还已见坐标制的萌芽，为后世坐标几何的建立以很大启发。他的其他著作有《截取线段成比例》、《截取面积等于已知面积》、《论切触》、《平面轨迹》、《倾斜》、《十二面体和二十面体对比》、《无序无理量》和《取火镜》等。其中《论切触》中给出“阿波罗尼奥斯问题”，即作一个圆与三已知圆相切。《取火镜》证明了抛物面镜的聚焦性质。他还在天文学中有建树，证明了求行星留点的方法，将几何学应用于天文研究。

海伦（**Heron of Alexandria，公元 62 年左右**） 希腊数学家、力学家、机械学家。生平不详。约公元 62 年活跃于亚历山大，在那里教过数学、物理学等课程。他多才多艺，善于博采众长。在论证中大胆使用某些经验性的近似公式，注重数学的实际应用。主要贡献是《度量论》一书。该书共 3 卷，分别论述平面图形的面积，立体图形的体积和将图形分成比例的问题。其中卷 I 第 8 题给出著名的海伦公式的证明，设三角形边长分别是 a、b、c，s 是半周长，$\triangle$是三角形的面积，则有$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。海伦用文字叙述了这一公式的证明，并举例加以说明。当最后开方出现无理根时，海伦使用了近似公式$\sqrt{A}\approx\frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right)$，其中 a^2 是最接近 A 的平方数，a 又可进一步用$\frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right)$代换，逐步求出$\sqrt{A}$更精确的值。现已公认海伦公式是阿基米德发现的，但这个名称已成为习惯用法。他的成就还有：正 3 到正 12 边形面积计算法；长方台体积公式；求立方根

的近似公式等。他在另一著作《测量仪器》中描述了一种类似现代经纬仪的仪器，并介绍如何使用它去解决各种测量问题。他发明的各种精巧器械，比理论上的成就更为人们所推崇，主要有气转球(被称为世界上第一个蒸气机)，自动售货机，灭火器，水风琴，水钟等等。其他著作还有《气体力学》、《武器制造法》、《几何》、《测体积学》等。

尼科马霍斯(Nicomachus of Gerasa，公元 100 年左右) 希腊数学家、哲学家。生平不详。杰拉萨(现约旦安曼以北)人。约公元100 年前后来到亚历山大，学习和整理毕达哥拉斯学派的学说，企图恢复该学派的精神，属于新毕达哥拉斯学派成员。他写的《算术神学》阐述了数的神秘性质，从中可以看到毕达哥拉斯学派哲学思想的进一步发展。他的主要贡献是写了《算术入门》一书，这是一本真正摆脱几何形式的算术，影响后世达一千多年。全书分两卷，共 52 章。首先阐述算术的重要性，称之为一切学术之母。然后对数进行分类，并逐类进行讨论。其中叙述了埃拉托塞尼的“素数筛子”，欧几里得的“辗转相除”法，讨论了完全数、多角数、立体数、立方数求和公式以及算术级数、几何级数和调和级数和中项的种种性质，补充“反调和比例”等 7 种新比例，对每一种比例都给出具体例子。他给出 496 和 8128 两个完全数，指出立方数等于相继几个奇数之和。书中还有大量哲学和神学内容，因此受到神学院的欢迎。公元 6 世纪初，罗马数学家博伊西斯将该书意译后传入欧洲，在西欧修道院学校用作权威教本一千年以上。他的另一本传世之作是《和声手册》，阐发毕达哥拉斯等学派的音乐理论。其他论著涉及几何学、人物传记等，仅残存某些摘要。

丢番图(Diophantus of Alexandria，250—275 年左右) 希腊数学家。生平不详。主要活动年代大约是 250—275 年前后。一则收入《希腊诗文选》的墓志铭道出他的经历：丢番图的一生，幼年占 1/6，青少年占 1/12，又过了 1/7 才结婚，5 年后生子，子先父 4 年而卒，寿为其父之半。因此推知他终年为 84 岁。主要贡献是撰写了《算术》一书，共 13 卷，现存 6 卷希腊文本和 4 卷阿拉伯文本。它在历史上的影响可以与欧几里得《几何原本》相媲美。《算术》主要讲数的理论，讨论了一次、二次以及个别的三次方程和大量的不定方程，从另一角度看也可以归入代数学的范围。其特点是完全脱离几何的模式，在希腊数学中独树一帜。现存的 10 卷共有 290 个题目及解法，突出成就有：从具体问题出发，导出多种类型的不定方程，然后详细列举了它们的解法，其中包括多达 6 阶和多达 10 个未知数的不定方程，并给出二元一次不定方程的一般解法，被认为是不定分析的创始人；创用一些代数符号，并使用了一些运算符号，虽然很不完善，但为代数学的发展指出方向；得到部分数论的结果，如指出 $8n+7$(n 为非负整数)不能表示成三个平方数的和，指出当 n 不是奇数时，$2n+1$ 可以表示为两个数的

平方和，反之，$4n+3$ 或 $4n-1$ 不能表示为两个数的平方和等等。他还有一部残存的《多角数》，应用并推广了有关形数的几个公式。此外失传的著作有《推论集》，载有若干数论的引理及推论；《分数算法》，记载了分数计算的法则。

帕波斯（Pappus of Alexandria，300—350 年左右） 希腊数学家。生于亚历山大，经历不详。约公元 300 年至 350 年活跃于亚历山大，是亚历山大晚期的几何学家。著述很多，唯一流传下来的正是最有价值的一种：《数学汇编》。原书共 8 卷，囊括希腊自古以来各名家的著作评注，也包括他本人的创作，是研究希腊数学史重要的原始资料。卷Ⅰ和卷Ⅱ的前 13 个命题已失传，从留下的部分得知是论述算术的。卷Ⅲ讲述几何，其中已暗指倍立方问题不可能用尺规作图来解决，还讨论了各种中项（等差中项，调和中项等），论述了如何作球的内接五种正多面体。卷Ⅳ讲述勾股定理的推广，圆的相切，特殊曲线的性质以及三等分任意角的方法。卷Ⅴ讲述平面和立体图形的等周问题，记述了阿基米德发现的 13 种半正多面体和其他若干命题。卷Ⅵ讲述天文学，指出许多书中的遗漏和错误，还列举了一些天文学名著。卷Ⅶ收集了 12 种几何学经典著作，其中 10 种已失传，仅通过帕波斯的汇编才为人所知。他在综述阿波罗尼奥斯的著作时提出新见解，启发了 17 世纪笛卡儿解析几何的建立。还得到“古尔丁定理”，“帕波斯定理”等结果，记载了射影几何的一些概念。最后一卷讲述力学，主张力学是数学的一部分，研究了斜面的作用，指出通过 5 个已知点作圆锥曲线的方法等等。他的另一数学著作是《分析荟萃》，已失传。他还写过关于地理、音乐、流体静力学等方面的书，注释过托勒密的《天文学大成》和欧几里得的《几何原本》。

许帕提娅（Hypatia，约 370—415） 希腊女数学家、哲学家。亚历山大人，父亲赛翁是著名学者，精通数学和天文学，从事古典数理天文文献的整理工作。许帕提娅早年受父亲影响，专心学习，在艺术、文学、自然科学和哲学方面受到很好的正规教育。后来致力于数学和天文学研究，曾协助父亲校订欧几里得和托勒密的许多著作，后人都以这些校订本为这些经典著作的范本。她本人还论释过丢番图的《算术》和阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》，可惜均已失传。据史料记载，她还写过许多数学和天文学方面的论文，但大多随着亚历山大图书馆被焚而损失掉，仅留下少量一、二次方程解法和天文推测方面的文章。她不信奉基督教，是亚历山大新柏拉图主义学派的领袖。她以自己雄辩的才能，丰富的知识和端庄秀丽的外貌赢得人们的敬爱。据说也有不少王子或学者向她求婚，但她总是回答“我已献身真理”。她的这种精神和崇高声望使基督教会感到是一种威胁，于是指控她研究的学问是异端邪说，对她百般打击诋毁。公元 415 年，在亚历山大基督教长西里尔的指使下，她被一群暴徒残酷杀害。许帕提娅作为为科学献身的学

者和世界上第一个著名女数学家载入史册。她被害后，许多学者离开亚历山大，从此古希腊光辉灿烂的文明开始衰退。

阿耶波多（**Aryabhata I，约476—550**） 印度数学家、天文学家。生于印度东北部恒河南岸巴特那城附近。亦称阿耶波多第一，以区别于公元10世纪的另一位叫阿耶波多的数学家和天文学家。他受教育于柯苏布罗城，499年著《阿耶波多历数书》，该书共4篇，由121行诗构成，其中论及数学的有两篇，共33行诗，内容包括算术、代数、几何、三角等知识，主要成就有：整数的记法及运算法则；分数的约分和通分法则；三率法；自然数平方、立方等求和公式；特殊线性方程和一次不定方程（组）的解法；二次方程求根公式；直线形面积公式；勾股定理；圆面积求法；圆周长的求法等等。其中用同一单位度量半径和圆周是弧度制的先声；计算正弦值时取半弦长，比希腊人取全弦长更接近于现在的正弦概念；圆周率取62832/20000＝3.1416，是当时印度较为精确的值；用几何法计算正弦表，间隔3°45′，在三角学史上有重要意义。书中还计算了日月五星与黄道、白道的升交点和降交点的运动和推算日、月食的方法。阿耶波多的著作还记载了测量日月星辰的天文观测仪器。为了纪念他的功绩，印度第一颗人造地球卫星就是以阿耶波多第一命名的。

博伊西斯（**Boethius，Anicius Manlius Severinus，约480——约524**） 罗马数学家、哲学家、政治家。生于意大利罗马，卒于意大利帕维亚。出身古罗马贵族世家，早年可能到过亚历山大学习，也可能去过雅典，受到正统的希腊文化教育。约510年担任东哥特王国执政官，约520年任首席执政官。522年被指控谋反遭监禁，两年后被处决。他学识渊博，著述颇丰。其中数学著作有《算术入门》和《几何学》，前者包括算术的基本概念和术语、乘法表、比例、素数与合数等知识，基本取材于希腊数学家尼科马霍斯的同名著作，但删掉了许多当时较新颖的命题和证明；后者主要取材于欧几里得《几何原本》前几卷的内容，同样删掉许多必要的证明，成为一本非常浅显易读的课本。他的目的是为教会学校学习算术和几何提供初级手册。这两本书在中世纪被定为经典教本，流传达近千年。这种情形反映出中世纪数学相对于希腊数学繁荣时的萧条。希腊文化通过罗马人传到中世纪的很少，其中大部分体现在他的著述中。他在书中也有自己的贡献，例如现传本《几何学》中记载了一种罗马算盘的构造及用法，其中算盘子上标写的数字被认为是西阿拉伯数字。他还论述过数系分类，较早地使用了大量拉丁文数学词汇，并提出划分数理科学的“四道”说。此外他翻译的亚里士多德著作和在狱中写就的《哲学的安慰》都是哲学史上的名著。他还留下许多音乐、逻辑学和神学方面的论著。

瓦拉哈-米希拉（**Varāhamihira，约505—587**） 印度数学家、天文学家。又译“彘日”。阿槃提

人。生于乌贾因,那里是印度文化中心之一。后游学四方,以撰写《五大历算全书汇编》而著称,该书共分5部分,开篇是印度古代天文学,其他分别论述希腊、埃及、罗马等地的天文学成就,是一部重要的天文学史书。他精通西方天文学,将印度和西方的天文成就注释后汇编,成为当时数学和天文学水平最高的一部著作。其中的算法是以希腊算法和亚历山大算法为基础进行的,并引用了希腊计算图表,因此也是一部数学史书。在数学上最重要的是其中《太阳的知识》一篇,除简单的三角关系外,还包括半角的正弦公式,出现"零"的概念等等。书的主要内容是天文学和占星术,提出"地球是一球状物体"的论断,也包括大量为确定星位所必要的计算。他很欣赏西方的天文学成就,鼓励印度人学习西方著作。

婆罗摩笈多(Brahmagupta,约598—665以后) 印度天文学家、数学家。经历不详,是印度中部乌贾因地方的数学家。那里当时是印度数学活动的三个主要集中地之一,因此他被称为乌贾因学派的成员。主要工作是于628年完成的《婆罗摩历算书》一书,共24章,其中第12章和第18章专论数学,题为"算术讲义"和"不定方程讲义"。内容包括三角形、四边形、零和负数的算术运算规则、二次方程、一阶和二阶不定方程等。主要成就有:圆内接四边形的面积公式和对角线公式,他给出近似面积和精确面积两个公式,设圆内接四边形的边长分别为a、b、c、d,则近似面积公式为$\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$,精确面积公式为$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,其中$s=(a+b+c+d)/2$,两条对角线的长分别是$\sqrt{(bc+ad)(ac+bd)/(ab+cd)}$和$\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)/(bc+ad)}$;给出求"有理"圆内接四边形的方法,设$a$、$b$、$c$、$A$、$B$、$C$都是正整数,且$a^2+b^2=c^2$、$A^2+B^2=C^2$,则以$aC$、$cB$、$bC$、$cA$依次构成的圆内接四边形具有有理面积和有理对角线,且对角线互相垂直;在印度最早使用负数,提出负数的四则运算;研究形如$y^2=Ax^2\pm c$的不定方程,得到一些结果;求出$ax+by=c$(a、b、c为整数)的整数解等等,他还在专业术语、各种符号、代数式运算等方面做出一定贡献,书中其他各章节也涉及许多数学知识。此外,他还于665年著有天文学专著,这两本书中的天文知识同样令人瞩目。

花拉子米(al-Khowārizmī,Mohammedibn Musā,约783——约850) 阿拉伯数学家、天文学家。生于波斯北部城市花拉子模(现属苏联),卒于巴格达。早年在家乡读书,后到中亚细亚古城默夫继续深造,不久成为科学名家。约813年到巴格达,在阿拔斯王朝哈里发马蒙的朝廷任职,领导"智慧馆"的学术工作。后一直在巴格达工作,直至去世。他在数学上有两部著作传世:一部是写于820年左右的《代数学》,书名直译为《还原与对消的科学》,指方程两端的移项与合并同类项。后来"还原"一词演变为"代数学"一词。全书为三部分,第一部分是用十分简单的例题系统讲述了

解一次、二次方程的一般原理，首次给出二次方程的一般解法，强调了判别式非负方程才有解的条件，并给出每一种方程的几何证明；第二部分讲实用测量术；第三部分是遗产计算问题。该书在欧洲作为标准数学课本使用了几个世纪，对欧洲数学的发展产生巨大影响。他的另一部著作是《印度的计算术》，首先介绍印度的10进位值制记数法，然后讲述如何使用印度数码进行算术运算，包括整数的四则运算、倍乘法和倍除法、60进位分数和普通分数的四则运算、整数和分数的开平方等。这是第一部介绍印度数码和记数法的阿拉伯语著作，为该记数制度在阿拉伯国家的普及和引进欧洲起了重要作用。此外他在天文学上写了一部叫《积尺》的天文表，论述过星盘、日晷和历法，还写过历史和地理方面的著作，绘制了阿拉伯世界的地图。

马哈维拉(Mahāvīra，9世纪) 印度数学家。生活于迈索尔、耆那教中的数学家。约850写下了《计算纲要》一书，共有9章，包括算术、几何和代数等内容，几乎是以前印度数学的汇编，较全面地反映了当时印度数学各方面的成就和水平。其中的成就有：分数算法，两个分数相除可以转化为乘法运算；级数求和，既有算术级数也有几何级数；组合问题，给出从几个不同物理中取r个的一般公式；解不同类型的二次方程，例如$\frac{1}{4}x+2\sqrt{x}+15=x$；解具有有理边的直角三角形；发现零的性质，“一个数乘以零得零，一个数减去零不改变它的值”；负数性质，“一个负数不是某一数的平方数”；以$\sqrt{10}$代替圆周率π的值，还曾以$\frac{81}{20}R^3$表示球的体积，由此推得$\pi=3.036$。他还对算术运算进行分类，并对每一类法则都给出具体数值的例子。作为印度传统数学的继承者，他也论述了不定方程的问题。

艾布·卡米勒(Abu kāmil，约850——约930) 阿拉伯数学家。经历不详。据载他是伊斯兰文化全盛时期的著名数学家，还是花拉子米之后第一个留下代数专著的人。他的著作有《代数学》、《计算技巧珍本》、《论五边形和十边形》等。其中《代数学》讨论二次方程问题，首先给出几种类型方程的解法，再给出若干代数运算法则，最后是习题求解。该书比花拉子米的同类书有明显进步，它对各类方程的解法都指出其任意性，并强调代数恒等式的普遍意义，其中有关二次根式深入研究的结果多次为后世数学家所引用。书中还放弃几何证明，引入大量繁琐的代数运算，有算术化的趋势。《计算技巧珍本》论述了某些不定方程的整数解，但事实上大多数解不是整数形式，而是有理数形式，该书被称为不定方程中最先进的著作。《论五边形和十边形》包含代数和几何两个方面的内容，讨论了4次方程和带无理系数的混合型二次方程，并把方程同几何图形结合起来进行研究。他的工作承前启后，其著作被译为多种文字，广泛流传。

巴塔尼(al-Battanī，约858—

929） 阿拉伯天文学家、数学家。生于美索波达米亚西北部哈兰附近，卒于今巴勒斯坦境内的基斯堡。家族信奉萨比教，熟知天文学和占星术。他本人从 877 年在拉卡城作过长达 41 年的天文观测工作，并据此改进了古希腊托勒密《天文集》中的若干数据。主要贡献在三角学，用三角学取代几何方法，改进了托勒密的天文计算。他引入正切和余切概念。将一根杆子立在地上，日影长度叫“直阴影”，将杆子水平插在墙上，则杆在墙上的阴影叫“反阴影”这两个词演成余切和正切。他用半弦代替古希腊人的整弦，制作了30°～90°相隔 1°的正弦表和余切表（约 920 年），其中大量应用代数方法处理三角学问题，例如由 $\sin\theta/\cos\theta=D$ 式推出 $\sin\theta=D/\sqrt{1+D^2}$，继而求出 θ 的值。他还发现球面三角余弦定理 $\cos A=\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos A$，这些成果汇总在他的著作《天文论著》一书中，该书被译为多种文字在欧洲广泛流传，对三角学的发展有一定影响。书中的天文成就包括较精密的年长度、季长度、黄赤交角及岁差的值，地球远日点的运动等，指出发生日环食的可能性，这些成果被哥白尼大量吸收到《天体运行论》中。

艾布·瓦法（Abul wefa 或 Abū al-wafa，940——约998） 阿拉伯数学家、天文学家。生于今伊朗东北部霍腊散省的布山，卒于巴格达。959年后定居巴格达，参加那里天文台的观测和研究工作，并在该地建立第一座观测星球的象限仪台。在数学中他翻译并注释了希腊数学家欧几里得和丢番图的著作，还注释并评介了阿拉伯数学家花拉子米的著作，可惜已失传。两本传世的数学著作为《文书和商业用算术》和《手艺人的几何作图法》，总结了各种计算和几何作图法，其中较早地提出用直尺和开口固定的圆规进行几何作图问题，并依此作了大量的图。他的主要贡献记载于他的天文著作《天文全书》中，包括正弦的半角公式、倍角公式；正弦加法定理的一种新证明；稍后于巴塔尼引入正切和余切概念；发明正割和余割函数；证明了球面三角学中正弦定理的普遍性；设计了一种计算正弦函数的新方法，可以求出 sin30′精确到9位小数的近似值；运用正切定理解球面直角三角形；造出间隔10′的正切函数和正弦函数表等等，在造表过程中应用了开平方及根式的有理运算。在天文学方面，据载发现了月球的“二均差”，但有疑问；对黄赤交角和分至点进行过测定，还为托勒密的《天文学大成》写过简编本。他是阿拉伯中世纪数理天文学派（亦称巴格达学派）的最后一个著名学者，此后该学派再无重大发展。

热尔贝（Gerbert，945—1003） 法国数学家、罗马教皇（999—1003）。生于法国阿基坦，1003年5月12日卒于意大利罗马。家境贫寒，受过寺院教育，学习文法，算术和音乐。967年到西班牙继续求学，后研究音乐、算术、几何和天文学。970年到罗马，数学才能受到教皇约翰十三世的赏识，皇室聘请他给奥托二世当教师。后又当过隐修院院长和地方大主教。999年当选为罗马教

皇，改称西尔维斯特二世(Pope Sylvester Ⅱ)，直至去世。主要贡献是大力提倡数学学习，在他任教皇期间，算术、几何和占星术等学科受到普遍重视，对罗马乃至整个欧洲的学术发展起到重要作用。他被认为是一位杰出的学者和优秀的教师，曾发明多种实用教具，并编写教材，其中包括一本专门论述算盘的教材和一个具有27档的算盘；一部辑录罗马土地测量员计算成果的几何学教本；半球仪、圆球仪、星盘等各式天体仪等等，他较早地在欧洲引入印度-阿拉伯数码，但没有使用零号；还大力扩建教会与寺院学校，进行四艺(音乐、几何、算术、天文)训练。在音乐方面大概制作过几种风琴和一架单弦琴，还写过一本《关于理性和理性的应用》的书。

凯拉吉(al-Karaji 或 al-karkhi，10世纪末，11世纪初) 阿拉伯数学家。生平不详，一说卒于约1029年。10世纪末到11世纪初活跃于巴格达等地，曾在巴格达著书立说，后来到外地从事工程管理工作。著有代数著作，被认为是唯一给出代数运算理论的阿拉伯数学家，为代数学建立一种新开端，是继花拉子米、艾布卡米勒等人之后在代数学方面做出重要贡献的学者。他第一个论述了代数多项式理论；研究了单项式和多项式的四则运算和开方等运算；证明了关于单项式乘法的运算法则；给出正系数多项式开方及根式运算的方法，并考虑了无理数开方的情况；得到$(a\pm b)^3$，$(a+b)^4$等二项式的展开式等等。此外，他在方程研究中对许多具体问题同时给出算术解答和几何证明，并概括出6种典型的一元二次方程；在高次方程研究中提出几种可能的类型；在三次不定方程的研究中探讨了几种方程的整数解和另外几种方程的分数解。他还在级数理论方面有贡献，证明了自然数列、自然数平方数列、自然数立方数列的求和公式等。

奥马·海亚姆(Omar Khayyam，约1048——约1131) 阿拉伯数学家、天文学家。约1048年5月15日生于波斯霍拉桑的内沙布尔，约1131年12月4日卒于同地。他的名字海亚姆意思是“帐蓬匠”，可能来自父亲的职业。早年在内沙布尔和巴尔赫受教育，约1070年去撒马尔罕，在那里完成他的重要数学论著，取得声望。后受聘到伊斯法罕，主持天文台工作达18年之久。1118年以后定居梅尔夫(现为苏联马雷)，晚年还乡。他是一位全能学者，在数学、天文学、哲学、文学、法学、历史、药学和音乐方面皆有著述。数学著作有《代数问题的论证》、《算术问题》、《智慧的天平》等，主要贡献是：定义代数学为“解方程的科学”，这一定义一直保持到19世纪末；依据正系数原则将方程进行分类，列出25个具有正根的典型方程，其中包括13个不能用变换降阶的3次方程，又区分出一批能够用几何方法求解的3次方程，借助圆锥曲线，给出这些方程的解法，并证明了三次方程可以有两个根，成为代数与几何相结合的前驱；讨论二项式的展开，给出$(a+b)^6$的展开式；给出开方法则、比和比例等问题，等

等。他还评注过欧几里得的著作，分析了平行公设。在天文学方面他曾负责改革历法，约1079年提出哲拉里历，以365.2424天为一年，每5000年才有一天的误差，比现行公历(格里历)还要精确。在哲学上论述过宇宙本质，时间推移等问题。在文学上写过《四行诗集》，曾被译为多种文字流传。

婆什迦罗(**Bhāskara Ⅱ，约1114——约1185**) 印度数学家、天文学家。约于1114年生于印度南部比杜尔，卒于约1185年。亦称婆什迦罗第二，以区别于公元600年前后印度的另一位同名数学家。他长期在古印度文化中心乌贾因工作，是乌贾因天文台的领导人，还被认为是印度7世纪该地著名数学家婆罗摩笈多的嫡系继承人。约于1150年写了《天文系统至极》一书，由4篇散文体构成，其中的《丽罗娃提》和《根的计算》是两部重要的数学著作。《丽罗娃提》共13章，包括计算表格，整数和分数运算，算术的反演法、试位法，算术级数求和法，面积体积计算，不定方程和组合问题，偏重于解决应用问题。《根的计算》共8章，包括正负数法则，一、二次不定方程解法，一元或多元线性方程组，二次方程，线性或二次不定方程等，侧重数学理论的探讨。这两部著作比较全面系统地介绍了算术、代数和几何知识，突出成就是：采用缩写文字和一些记号表示未知数和运算符号，包括“正负得负，负负得正”的法则；最早对除以零的意义有所认识，特别指出3/0的值是一个无限量；认识到二次方程有两个根；指出正数开平方有一正一负两个值，负数不能开平方；求出佩尔方程$x^2=1+py^2$的多组解；计算圆内接正384边形的边长，得到π的近似值是3.141666；给出$\sin 18°=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$的精确表达式等。《天文系统至极》另外两篇论及天文学，在印度古代天文理论中亦占重要位置。

阿德拉德(**Adelard of Bath，约1116—1142前后**) 英国数学家、天文学家、哲学家、翻译家。生于巴斯，后成为修道士，游历四方。曾在法国图尔和拉昂学习和教书，又到过意大利的萨莱诺和西西里、叙利亚、巴勒斯坦、西班牙的托莱多等地。当时这些地方都曾为阿拉伯人统治。他游历的目的就是学习阿拉伯文化和获取各种图书资料。他是最早将阿拉伯文献译为拉丁文的翻译家之一，曾将欧几里得《几何原本》的阿拉伯语本译为拉丁文本，由于翻译质量高，发行又早，在西欧受到普遍欢迎，一直使用到16世纪，作为主要几何学教本达数百年。他还翻译了花拉子米的天文表和阿布玛夏、塔比伊本库拉等阿拉伯天文学家的星占学著作，还自己写了数学和哲学方面的书。其中数学著作论述算术、几何、音乐和天文当时被称为“四道”的学科内容，对印度—阿拉伯数码及算法、算盘的使用、星盘的制作等有所介绍；哲学论著仿照柏拉图式的对话体，试图调和一般事物和个别事物的现实性。此外他还著有以阿拉伯科学为基础的《自然问题》共76篇，论述人的本质、气象学、植物学和动物学等等。

斐波那契(**Fibonacci, Leonardo, 约1170—1250**) 意大利数学家。生于比萨，卒于同地。早年随父经商，到北非布日伊受教育，从一阿拉伯教师学习计算，掌握了印度数码这一新的记数体系，后到埃及、叙利亚、希腊、西西里、法国等地游历，熟习了不同国家地区在商业上的算术体系，经过比较发现，印度—阿拉伯数码最方便。1200年左右回比萨，潜心写作，于1202年完成名作《算盘书》。此处“算盘”并不单指罗马算盘或某一种计算工具，而是指一般的计算。全书共15章。开篇就介绍说：9个印度数码是9、8、7、6、5、4、3、2、1以及用这9个数码和记号0就可以写出任何数目。1～7章解释了位值制原理，整数和分数的各种计算方法，以及乘法表、素数表和因子表等若干数表；8—12章将算术应用于商业问题，如物价、利润、利息、货币换算等；13章论述比例和试位法；14章讲开方法则；15章有几何和代数问题，该书问世后广为流传，为印度—阿拉伯数码和阿拉伯数学在欧洲的流传起了重要作用。《算盘书》在1228年的修订本中增加了脍炙人口的“兔子问题”，导致著名的“斐波那契数列：1，1，2，3，5，8，13，21，……其规律是从第3项起每一项是前两项的和，有许多有趣的性质。他的其他著作有《几何实用》(1220)；《平方数书》(1225)，专论二次丢番图方程，也包括个别三次方程的求解，是当时数论的名作；《精华》(1225)和《通信录》。他被誉为西方中世纪第一个伟大的数学家，使西方数学开始一个新的时期。

纳西尔丁(**Naşir al—Din al Ṭūsi, 1201—1274**) 阿拉伯数学家、天文学家、哲学家。1201年2月18日生于波斯的图斯(今伊朗东部霍腊散省)，1274年6月26日卒于巴格达附近的卡济迈因。早年从其父辈在图斯学习，后到内沙布尔深造，逐渐成名。约1232年以前，应召到纳赛尔王朝伊斯梅利服务。1256年该地为蒙古人占领，他仍留下受到重用，当了马腊格城新建的迈拉盖天文台负责人，不久那里成为阿拉伯世界的又一科学中心。在数学中他对古希腊数学家欧几里得《几何原本》、阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》、阿基米德《圆的度量》、《论球与圆柱》，以及门纳劳斯、托勒密等许多人的著作进行了翻译和评注，对可公度量、不可公度量、比和比例、数的理论、欧几里得平行公设都做了研究，并试图证明平行公设。他第一次将三角学作为独立的学科进行阐述，首次清楚地证明了正弦定理，对后来欧洲德国数学家雷格蒙塔努斯的三角学理论有较大影响。主要著作是《论完全四边形》，书中系统论述了平面三角学和球面三角学，包括解球面直角三角形的6个基本公式，指出由球面三角形的三个角，可求得三边，反之亦然。这一事实可作为平面三角与球面三角差异的重要标志。他在天文学中使用先进仪器，积十余年观测结果，于1271年编成《伊儿汗历》。另著有《天文学宝藏》等书。此外他在伦理学、逻辑学、哲学等方面皆有著述，其中《纳西尔伦理学》在阿拉伯和印度流行了几个世纪。

布雷德沃丁（**Bradwardine, Thomas, 约1290—1349**） 英国数学家、自然哲学家、神学家。约1290年生于英国，1349年8月26日卒于伦敦兰贝斯。早年就学于牛津大学默顿学院，获神学博士学位，后在该校教授哲学、神学和数学。1333年起担任教会职务，历任司法官、牧师、直至病逝前担任基督教会中心坎特伯雷的大主教。他在数学上的突出贡献是研究三角学，称正切为“反阴影”，余切为“正阴影”，并将它们引到三角计算中，是欧洲最早研究三角学的数学家之一。数学著作有《理论算术》(1495)，讨论数论问题；《理论几何》(1511)论述有规则的立体、等周图形及多角星等，流传甚广。这两本书都是后人整理出版的。另外还有两本数学论著是《圆求积》和《论运动中的速度比》(1328)，后者用算术和几何方法讨论运动物体的速度和受力情况。此外他在哲学著作中讨论了无穷大和无穷小，在神学论著中论及自然哲学的若干问题。他的著述在中世纪科学停滞不前的形势下格外珍贵，也较有影响，因此他被誉为是14世纪英国最杰出的数学家。

奥雷姆（**Oresme, Nicole, 约1320—1382**） 法国数学家。原籍为诺曼，约1320年生于卡昂附近，1382年7月11日卒于利雪。早年就学于巴黎大学，主要学神学，1348年成为该大学纳瓦尔学院神学教师，后任院长。1362年辞职后任鲁昂的牧师，两年后成为教长。1377年任利雪的主教。在数学方面有许多贡献：1360年在《比例算法》中最早引入分指数概念，规定了它的记法及使用规则；在《论质量与运动的结构》(约1350)等书中为研究变化和变化率萌发了坐标几何的思想，尝试用两个坐标来确定点的位置，并用图象表示变化中的量，对17世纪笛卡儿解析几何的创立有一定影响；在《欧几里得几何问题》(约1360)等著作中给出若干无穷级数求和的例子，证明了调和级数的值为无穷，还区别了收敛级数与发散级数，给出级数敛散的某些判别法则，大大发展了古希腊学者有关的极限思想。他的论著还涉及热的强度概念，运动原理，宇宙论，地动说等等科学的基本原理。此外他还曾受法王之命从拉丁文中将亚里士多德的《伦理学》、《政治学》、《经济学》等著作译为法文，他的译文及评注为法国语言的发展做出重要贡献。他还写过后来多次重版的《货币论》一书，并因此被认为是中世纪最大的经济学家。

卡西（**al — Kāshi, Ghiythal — Dīn Jamshid Masūd, ?—1429**） 阿拉伯数学家、天文学家。生于今伊朗境内，德黑兰与伊斯法罕之间的卡尚，1429年6月22日卒于今苏联乌兹别克境内的撒马尔罕。早年经历贫困和流浪生活，后成为名家，受帖木儿帝国统治者兀鲁伯格聘请，到撒马尔罕主持天文台工作。在那里成为兀鲁伯格天文学派的主要成员之一。他协助兀鲁伯格编制的《兀鲁伯格星表》是继托勒密星表之后在中世纪最精密的星表，对后世星表制作影响很大。他编著了大量数学和天文学著作，主要有《算术之

钥》(1427)、《圆周论》(1424)、《弦与正弦之书》等。《算术之钥》共5卷38章，分别论述了10进位制下的整数和分数的四则运算，开平方开立方乃至开高次方的方法，60进位制下的整数和分数的四则运算，开平方开立方等算法，各种面积的计算，解方程及一些代数问题。书中出现一个二项式展开的系数表，与11世纪中国贾宪用过的“开方作法本源图”一致，而表中各个数的计算方法也相同。书中还给出开 n 次方根的近似公式 $\sqrt[n]{A^n+a}\approx A+a/[(A+1)^n-A^n]$。该书因内容丰富和逻辑严谨而被列为中世纪初等数学的代表作。他在《圆周论》中引入小数(10进分数)概念，建立小数运算法则和与60进制分数进行换算的方法，是除中国之外第一个使用小数运算的学者。书中同时采用60进制和10进制两种分数记法给出圆周率的值，其中10进分数(小数)值有17位准确数字，打破祖冲之保持近千年的圆周率记录。《弦与正弦之书》给出间隔1°，准确到10位数字的正弦表。他的其他贡献包括指数运算法则，高次方程近似解法，改进三角解法，发明测量天体仪器等。

雷格蒙塔努斯(Regiomontanus, Johannes, 1436—1476) 德国数学家、天文学家。1436年6月6日生于德国东普鲁士柯尼斯堡(今苏联加里宁格勒)，1476年7月6日卒于罗马。原名约翰·缪勒(Johannes Müller)，雷格蒙塔努斯是他的笔名，从“哥尼斯堡”一词拉丁化而来。哥尼斯堡的德语意为国王之山，故他的名字旧译为“玉山若干”。11岁到莱比锡求学，几年后又到维也纳，从师于奥地利数学家、天文学家波伊巴赫，学习天文学和数学。后协助老师校订希腊学者托勒密的天文学著作。1461年老师去世后他继续这一未竟事业，并为此学习希腊文，还搜集和研究希腊数学手稿，1463年完成校订，改正了原阿拉伯—拉丁译本的许多错误。1671年定居纽伦堡，翻译、注释并出版了大量希腊数学家的著作。主要贡献在三角学方面。他撰写的《论各种三角形》(1464)是欧洲第一本独立于天文学的三角学著作。全书共5卷，前两卷论述平面三角学，后3卷讨论球面三角学，是欧洲三角学的渊源。在《方位表》(1464—1467年写，1475年发表)中给出5位正切表并采用10等分的角度。他还编制了很精密的正弦表，应用代数技巧化简三角问题的解法。在天文学方面他于1472年十分精确地完成一颗彗星的观测，200年后被确认为哈雷彗星。他还编写了一些天文学小册子和航海历书，为哥伦布1492年发现新大陆提供了条件。1475年教皇召他到罗马参加历法改革，并任命他为雷根斯堡大主教，但未及到任便早逝，年仅40岁。

许凯(Chuquet, Nicolas, 约1445——约1500) 法国数学家。生于巴黎。早年得过医学学位，并行医于里昂，还当过教师，讲授算术。仅存一本数学手稿，写于1484年，共四部分，前两部分发表于1880—1881年，后两部分直到20世纪70年代才陆续发表。手稿内容涉及数的理论、实用几何、商业算术和

代数学，共156个问题及解答。主要贡献是：给出序数的名称；引入10^n的写法，使用了幂指数，并使用了幂的负指数符号和十进分数(小数)的符号法则；解释了“零”的意义和作用；讨论了有理数、无理数以及方程的理论，提出负数和分数的若干性质；创设方根的符号，给出开平方开立方的方法等。其中许多问题出现于10年后意大利数学家帕乔利和17世纪法国数学家巴歇的著作中。他不止一次使用了未知数，甚至两个未知数，解决问题的方式也是“纯代数式”的，因此被认为是较之帕乔利1494年算术著作更为先进的一部著作。他还在著作中将等比数列与等差数列进行比较，指出它们项与项之间有对应关系，而这种关系是17世纪对数发明的基石。书中还有不定方程和数论问题，论述了完全数等特殊数的某些性质。

帕乔利(**Pacioli, Luca, 约1445—1517**)　意大利数学家。生于托斯卡纳区圣塞波尔克罗，卒于同地。早年自学，从他的同乡、画家和数学家弗兰切斯卡的透视学著作中学到了许多知识。约20岁(1465)时到威尼斯一富商家任家庭教师，其间常到附近学校听数学课。1471年到罗马，加入圣方济会做修道士。先后在罗马、佩鲁贾(1476)、扎拉(1481)、那不勒斯(1494)、米兰(1496)、佛罗伦萨(1500)、威尼斯(1508)等地讲授和研究数学，曾与(达)芬奇讨论过数学问题。主要著作有两种，一是《算术、几何、比及比例全书》(1494)，是继斐波那契之后第一本内容全面的算术书，也是最早印刷的数学书之一。它几乎罗列了当时所有的数学知识，取材于欧几里得、托勒密、博伊西斯、斐波那契等人的著作，包括算术、代数、几何的基础知识和各种币值、重量、度量等表格。其中使用的印度—阿拉伯数码、采用的大量数学符号、以及有关三次方程的论述对16世纪欧洲数学产生重要影响。1505～1545年三次方程求根公式的发现就源于求解该书列出的方程。他的另一名著是《神圣比例》(1509)，讨论把已知线段分成中末比(黄金分割)及正多面体性质等问题。他还于1509年翻译出版了欧几里得《几何原本》拉丁文本，附有他本人的校勘与注释。此外著有发表的建筑学论文和未发表的数学游戏问题汇集。

费罗(**Ferro, Scipione, 1465—1526**)　意大利数学家。1465年2月6日生于波伦亚，1526年10月29日至11月26日之间卒于同地。早年就学于波伦亚大学，1496年起任该校教师，讲授算术和几何学，是当时五位联合主讲人之一。同时从事商业活动。主要贡献是发现一类三次方程 $x^3+px=q$(p、q 为正数)的解法。此类问题早在古希腊时代就有人提出，但除了个别情形外没有一般解法，费罗是第一个取得实质性进展的人，据推断时间在1505—1515年之间。他的结果记载于卡尔达诺的《大术》(1545)中，在那里以 $x^3+6x=20$ 为例进行阐述，给出求解公式为

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}+\frac{1}{2}q}$$

$$-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}-\frac{1}{2}q}。$$

他的工作受到卡尔达诺的大力赞扬，称之为人类智慧的高超成就。此外他还对分母有理化和固定开口的圆规几何有过论述，但结果均已失传。

塔尔塔利亚(Tartaglia，Nicolò，1499—1557)　意大利数学家、军事科学家。约1499年生于布雷西亚，1557年12月13日卒于威尼斯。原名丰坦那，13岁遭战火骚乱，头部负伤，后留下口吃病根，得绰号塔尔塔利亚(口吃者)，他本人也以此姓发表文章，沿用至今。他自学成才，约17岁时当上数学教师，先后在维罗那、威尼斯、布雷西亚等地教学，课余进行数学研究。主要贡献是发现三次方程的代数解法，1530年得到$x^3+px^2=q$(p、q为正数)(缺少一次项)类方程的一般解法，1535年又得到$x^3+px=q$(缺少二次项)类方程的解法，并在一次数学竞赛中获胜，引起轰动。他继续钻研，约于1541年得到$x^3\pm px^2=q$，$x^3\pm px=\pm q$(p、q为正数)等几类三次方程的解法。他准备以后写一本有关的数学专著公布这些解法，后因另一数学家卡尔达诺在1545年出版的书中引用了他最初的成果而未能如愿，但由此引起的一场论战却延续数年，成为数学史上的轶闻。主要著作有《各种问题和发明》(1546)，详述三次方程解法的发现过程；《数量概论》(1556—1560)，包括商业算术、数值计算和圆规几何，被称为数学百科全书和16世纪最好的数学著作。其中给出的二项式展开系数排成的三角形比法国数学家帕斯卡首次发表它还早100多年。他还翻译注释了欧几里得《几何原本》(1543)，是该书第一种意大利文本，及其他希腊数学家的著作。在《新科学》(1537)中提出射击的数学理论和遥测装置。

卡尔达诺(Cardano，Girolamo，1501—1576)　意大利医生、数学家、占星术家。一般称其英文拼法名字卡当(Cardan)。1501年9月24日生于帕维亚，1576年9月21日卒于罗马。早年学习古典文学、数学和星占学，后入帕维亚大学读医学，1526年获医学博士学位。1534年成为数学教师。1539年到米兰医学院任教，1543年成为帕维亚大学医学教授。他在医学上曾是闻名全欧的医生，也是第一个记载斑疹伤寒病医疗方法的人。在数学上以记载三次和四次代数方程的一般解法而著称，发表在1545年出版的《大术》一书中。他说明解法取自另一数学家塔尔塔利亚，并且一名叫费罗的人在30年前已得知，但都没有证明，他本人用几何方法对三次方程求解公式进行了证明。实际上塔尔塔利亚只告知了两种特例情形，而卡尔达诺叙述的公式具有一般性，因此后人称这一公式为“卡尔达诺公式”或“卡当公式”。书中还记载了他的学生费拉里发现的四次代数方程的一般解法，还有代数基本定理和韦达定理的初级形式，解方程中虚根的使用等许多方程的基本理论。其他数学著作有《算术实践与个体测量》(1539)，用数值计算解决实际问题；《游戏机遇的学说》(1663年发表)，

给出概率论的"幂定理"和大数定律等基本理论等。他被誉为16世纪文艺复兴时期人文主义的代表人物和百科全书式的学者，一生共写了各种类型论著200多种，内容涉及力学、机械学、天文学、化学、生物学、密码术、及占星术等等。

费拉里（Ferrari，Ludovico，1522—1565） 意大利数学家。1522年2月2日生于波伦亚，1565年10月5日卒于同地。父亲早逝，自幼跟叔叔生活。1536年14岁被送到米兰充当医生和数学家卡尔达诺的家仆。因聪明伶利受主人喜爱，开始跟随卡尔达诺学习拉丁文、希腊文和数学。后成为助手，做抄写工作。1540年18岁时接替卡尔达诺开设数学讲座。1548年以后任过税务监督，1564年成为波伦亚大学数学讲座主持人，次年病逝。主要贡献是得到四次代数方程的一般解法，记载于卡尔达诺的《大术》(1545)中。该方法以"将10分为三个成比例的部分，使前两部分的乘积等于6"为例进行阐述，它导致四次方程 $x^4+6x^2+36=60x$。费拉里将它转化为求降阶的三次方程解的问题，被称为"费拉里解法"。该方法在同代数学家邦贝利的《代数学》中得到全面应用。他还参与三次方程的求解工作，发现 $x^3+ax=bx^2+c$ 和 $x^3+ax^2=b$(a、b、c 为正数)两类三次方程解法的几何证明。当卡尔达诺因违背誓约受到塔尔塔利亚指责和挑战时，他代替老师出面论争，与塔尔塔利亚相互通信共12封，最后于1548年8月在米兰公开辩论。他占地利人和而获优势，从此红极一时。他没有任何著作流传，只有在论争中的几封通信，已成为数学史上的珍贵文献。

邦贝利（Bombelli，Rafael，1526—1572） 意大利数学家。1526年1月生于波伦亚，经历不详。中学毕业后因客观原因未能上学，约1551年前开始从事水利设计工作，主要任务是参与基亚纳河谷沼泽地的开垦，其出色工作使他赢得与工程师齐名的声望。他利用工作间歇研究数学，写成唯一的数学论著《代数学》。该书共5卷，初稿写于1557—1560年间，1570年做了补充修订，1572年出版了前3卷，后2卷直到1929年才出版。其中卷Ⅰ给出基本概念和运算；卷Ⅱ引入代数乘方及记法，然后讨论了1～4次代数方程的求解；卷Ⅲ是卷Ⅱ方法的应用；卷Ⅳ和卷Ⅴ分别论述几何方法在代数中的应用和用代数方法解决几何问题。主要成就有：系统总结了代数方程理论，解决了三次方程不可约的情况；建立起虚数的运算法则，指出复根的共轭性；指出三等分角的问题可转化为解不可约情形的三次方程问题，是理论上证明了该问题尺规作图的不可能的基础。他在著作中采用了一些较先进的数学符号，还首次用连分数来逼近平方根的值。他的著作以全面性和深刻性成为文艺复兴时期意大利最有系统的代数著作，他本人则被称为该时期最后一位代数学家，曾受到莱布尼茨的高度赞扬。

韦达（Viète，François，1540—1603） 法国数学家。亦译维埃特。因其著作均用拉丁文发表，故名字常用拉丁文拼法，译为韦达

(Vieta)。1540年生于普瓦图地区丰特奈—勒孔特，1603年12月13日卒于巴黎。早年在普瓦捷大学学习法律，1560年毕业后成为律师，后任过巴黎行政法院审查官，皇室私人律师和最高法院律师。1595—1598年对西班牙战争期间破译截获的西班牙密码，卓有成效。他业余研究数学，并自筹资金印刷和发行自己的著作。主要著作有：《应用三角形的数学定律》(1579)，给出精确到5位和10位小数的6种三角函数表及造表方法，发现正切定律、和差化积等三角公式，给出球面三角形的完整公式及记忆法则；《截角术》(1615年出版)，给出 $\sin nx$ 和 $\cos nx$ 的展开式；《分析术入门》(1591)，创设大量代数符号，引入未知量的运算，是最早的符号代数专著；《论方程的识别与订正》(1615年出版)，改进了三、四次方程的解法，给出三次方程不可约情形的三角解法，记载了著名的韦达定理(方程根与系数的关系式)；《各种数学解答》(1593)中给出圆周率 π 值的第一个解析表达式，还得到 π 的10位精确值，等等。此外他在1600年发表一篇关于古希腊数学家阿波罗尼奥斯几何作图相切问题的专著，给出一圆切于三个已知圆的尺规作图法。他的论著因内容深奥和言辞艰涩在当时影响不大，1646年荷兰出版了他的全集后，才使他的理论渐渐流传开来，得到后人的承认和赞赏。

斯蒂文(Stevin，Simon，1548—1620) 荷兰数学家、工程师。1548年生于荷兰布鲁日(今属比利时)，约1620年3月卒于海牙。早年经历不详。1571年时任国家金融机构职员，1583年注册于莱顿大学，1604年任陆军军需司令。晚期在莱顿组建一所技师学校。他学识广博，论著丰富。在数学上的代表作是《论十进》(1585)。该书首次明确阐述了小数(十进分数)理论，论述了十进制的优点及其运算，并主张一切度量衡和币制均应改为十进制，还给出小数的表示方法。该书当时并没引起很大反响，但不久便被译为多种文字流传，为小数理论的传播和在日常生活中的应用起了重要作用。他在另一著作《算术》(1585)中给出算术和代数的一般论述，引进新的记号表示多项式，并给出几种方程的简捷统一解法。在后来的一个附录中他曾说明，对任意阶的一个方程怎样近似得到它的一个实根。他重视数学在解决问题中的作用，其著作既注重理论，又联系实际。1586年发表一篇实验报告，指出两个重量相差10倍的铅球，从30英尺高度自由落下，同时到地，早于伽利略的同类文章。他还著有力学、天文学、航海学、地理学、建筑学、工程学、军事科学和音乐理论等多种学科的论著，得到力的三角形定理(1586)和液体下压力等许多命题。在工程学中有设计水闸和发明挂帆马车等成果。

纳皮尔(Napier，John，1550—1617) 英国数学家。1550年生于苏格兰爱丁堡附近的小镇梅奇斯顿，1617年4月4日卒于同地。早年就学于圣安德鲁斯大学，1566年出国游历求学，1571年回乡。1608年继承父亲产业，后定居梅奇斯顿，直至去

世。他业余研究数学，以发明对数运算而著称。最初的研究始于1594年，动机是寻求一种球面三角计算的简便方法。经过20年努力，终于出版了第一本对数专著《奇妙的对数表的描述》(1614)。他借助运动学阐述对数理论：假设有两个质点 P 和 Q，P 沿一有限长的直线 AZ 运动，Q 沿一无限长的直线 $A'Z'$ 运动。两个质点的初始速度相同，Q 保持匀速运动，而 P 在任一点(如 B 点)的速度与它尚未经过的距离(BZ)成正比，如果 P 点位于 B 点时，Q 点位于 B' 点，则称 $A'B'$ 为 BZ 的对数，这样当 PZ 间的距离数按几何数列递减时，它的对数按算术级数递增，这种对数被称为“纳皮尔对数”。书中还附有一张以1分为间隔的正弦对数表。他的另一著作《奇妙对数规则的结构》发表于1619年，书中详细阐述了对数计算和造对数表的方法。对数被誉为用缩短计算时间而使天文学家延长寿命，对整个科学的发展起了重要作用。他的其他贡献包括用于乘除运算的纳皮尔算筹(1617)，球面三角学中的纳皮尔比拟式和纳皮尔圆部法则(1614)等。他还发明了燃烧镜、大炮和金属战车等用于战争的武器。

布里格斯(**Briggs, Henry, 1561—1630**) 英国数学家。1561年2月生于约克郡沃利伍德，1630年1月26日卒于牛津。早年在当地语法学校学习希腊文和拉丁文，1577年入剑桥大学圣约翰学院，分别于1581年和1585年获学士学位和硕士学位。1596年成为新建伦敦格雷沙姆学院首任几何学教授，1619年任牛津大学萨维尔学院数学教授。主要贡献是改进了纳皮尔发明的对数运算，是最早认识对数重要价值的科学家。纳皮尔对数发表于1614年，1615年布里格斯就全力投入对数研究，第二年专程到苏格兰拜访纳皮尔，建议改良对数，以利于计算。纳皮尔本人也考虑过这个问题，但不久(1617)年便去世了。布里格斯以毕生精力继承纳皮尔未竟的事业。他在1617年就提出10作为对数的底，并给出1000个数的常用对数表。1624年出版了第一本常用对数专著《对数算术》，其中论述了对数的应用和计算方法，给出1～20000和90000～100000的常用对数表，精确到14位有效数字，还给出20000到90000间常用对数的计算方案。该书1628年的第二版由荷兰数学家弗拉克完成，填补了这一空缺，给出1～10万的完整的常用对数表。此外布里格斯编制了15位数字的正弦函数表和10位的正切和正割函数表，这些数表1633年刊行后延用200多年。他还编辑出版了欧几里得《几何原本》的前6卷，时间是1620年。

开普勒(**Kepler, Johannes, 1571—1630**) 德国天文学家、物理学家、数学家。1571年12月27日生于施塔特的魏尔，1630年11月15日卒于雷根斯堡。自幼体弱多病，但智力超群，上过修道院学校，1587年由一公爵资助入蒂宾根大学学习，第二年就获学士学位，1591年获硕士学位。1594年到奥地利格拉茨任数学教师，业余研究天文学。后到布拉格结识天文学家第谷，1601年第谷去世后他继承了第谷的未竟事

业。在天文学中他以发现行星运动三大定律而著称，而这些定律都是用数学语言表述的。(1)行星的运行轨道是椭圆，太阳居其焦点之一，将哥白尼学说向前推进了一大步；(2)在相等的时间内，行星与太阳之间的连线扫过的面积相等；(3)行星公转周期的平方与轨道半长轴的立方成正比。前两条定律发表于1609年的《新天文学》中，后一条发表于1619年的《宇宙的和谐》中。在数学上他是早期微积分的先驱者之一，在《酒桶新立体几何》(1615)中引入无穷大和无穷小概念，指出“圆是由无数个顶点在圆心的三角形构成的，圆周是由这些三角形的无穷小的底边构成”，并用同样道理阐明了立体构成说，讨论了90多种各类体积问题。他还研究了等周问题，并在《天文学的光学部门》(1604)中提出平行线的无穷远点概念。另外引入“轨迹”术语，讨论过蜂房结构和黄金分割，并创立一套特有的表示符号。

梅森(**Mersenne, Marin, 1588—1648**) 法国数学家、科学家。1588年9月8日生于缅因省奥泽，1648年9月1日卒于巴黎。早年在新耶稣会学院读书，1609年转学于索邦学院学神学，1611年起在修道院讲哲学。1619年定居巴黎，以神甫为职度过大半生。1625年以后致力于创办“梅森学院”(1666年创建的法国科学院前身)，对法国乃至整个欧洲的科学文化事业做出重要贡献。他与伽利略、费马、笛卡儿、帕斯卡等学者保持长期书信交往，为这些学者科学发现的传播起了重要作用。在数学上他以提出一类素数猜想而闻名，记载于《物理—数学探索》(1644)中。在该书序言中说：当$P=2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$这11个素数时，$M_P=2^P-1$为素数。梅森本人证明了前7个数$M_P$是素数，后面的4个数因计算量太大而未能验证。他的猜想引起数学界的极大兴趣。欧拉于1772年证明了第8个数M_{31}也是素数，而第9个数M_{67}直到1903年才由美国数学家科尔给出否定解答。由于这种类型的素数有许多有趣的性质，为了纪念最先提出者，形如2^P-1(P是素数)的素数现称为“梅森素数”，而2^P-1(P是素数)的数称为“梅森数”。长期以来不断发现的最大素数都是梅森素数。他还在与费马和笛卡儿的通信中讨论过亲和数、素数、和二阶方程等数论问题，在《数学概要》(1626)中收入欧几里得、阿波罗尼奥斯和阿基米德等希腊数学家的著作或结果。此外最先发现钟摆频率与摆长的平方根成反比的性质(1634)，写过光学、声学、力学、航海学、音乐、哲学及数学游戏等诸多方面的论著。

德扎格(**Desargues, Girard, 1591—1661**) 法国数学家。1591年2月21日生于里昂(另一说1593年3月20日生)，1661年10月卒于同地(另一说1662年10月卒)。早年经历不详，曾任军事工程师和建筑师。1626年在巴黎，后结识“梅森学院”(1666年改为科学院)的数学家，包括梅森本人和笛卡尔等人。主要贡献是创立射影几何。1636年出版《论透视截线》，对透视问题开始有所论

述，提出两个三角形透视的定理。1639年出版射影几何理论的奠基作《试图处理圆锥与平面相交情形的文稿》，引用德国天文学家、数学家开普勒有关无穷远点的说法，导入无穷远点、无穷远线概念，将直线看作具有无穷大半径的圆，而切线是割线的极限。书中给出著名的德扎格定理：如果两个三角形对应顶点的联线共点，则对应边的交点共线，反之亦然。他还引入调和点组概念，讨论了极点、极线、透射、透视等有关问题，统一处理了几种不同类型的圆锥曲线，从而奠定了射影几何的坚实基础，对后来帕斯卡等人有关工作有直接影响。但由于该书借用了许多植物学术语，使人不易理解，加之两年前兴起的解析几何更具吸引力，以致于他的工作受到冷落。直到1845年由数学史家沙勒偶然发现该书的手抄本后才引起人们的普遍重视。该书被列为纯粹几何的经典著作之一。

笛卡儿（Descartes, René du Perron, 1596—1650） 法国哲学家、数学家、自然科学家。1596年3月31日生于图赖讷地区拉艾城，1650年2月11日卒于瑞典斯德哥尔摩。早年就读于拉弗莱什教会学校，在那里与梅森结为密友。1612年到巴黎普瓦捷大学读法学，毕业时获博士学位，成为律师。1617年到荷兰从军，后到丹麦、瑞士、意大利等地游历。1625年回巴黎，与梅森等人一起讨论数学。1628年移居荷兰，潜心著述20多年，为科学文库留下丰富宝藏。他在数学中以创立解析几何而著称，代表作是《几何学》，作为他的哲学名著《方法论》的附录之一，于1637年在莱顿出版。这也是他唯一的数学论著。全书分三卷。卷Ⅰ将几何问题化为代数问题，提出几何问题的统一作图法，将线段与数量联系起来，设立方程，根据方程的解所表示的线段间的关系进行作图。卷Ⅱ给出解析几何的基本思想，将平面上的点与一种斜坐标确定的数对(x,y)联系起来，进一步考虑含两个未知数的二次不定方程，再依据方程的次数将曲线分类，从此人类进入变量数学阶段。卷Ⅲ讨论代数方程理论，给出笛卡儿符号法则：多项式方程的正根个数不超过其系数的变号次数，而负根个数不超过同号系数连续出现的次数；还改进了符号系统，用a、b、c等表示已知量，用x、y、z等表示未知量等。他反对经院哲学，开创重视科学认识的方法论和认识论，成为西方近代哲学的创始人之一。此外，他对天文学、物理学、化学和生理学等领域皆有研究。

卡瓦列里（Cavalieri, Francesco Bonaventura, 1598—1647） 意大利数学家。1598年生于米兰，1647年11月30日卒于波伦亚。幼年时入宗教团体。1616年到比萨修道院，受教于数学家卡斯泰利，开始学习几何学。读过欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯、帕普斯等希腊数学家的著作，并通过老师结识著名学者伽利略，在交往中颇受教益。1620年回米兰修道院教神学，后任过修道院院长。1629年在伽利略推荐下任波伦亚大学数学教授，直至去世。主要贡献是建立“不可分原

理”，代表作是《用新方法促进的连续不可分几何学》(1629，1635年出版)，该原理以下述假设为基础：线是由无穷多个点组成，面是由无穷多条线组成，体是由无穷多个面组成。书中还给出“卡瓦列里原理”：二同高的立体，如果在等高处的截面积恒相等，则体积相等；如果截面积成定比，则体积之比等于截面积之比，”与公元6世纪我国数学家祖暅提出的“幂势既同，则积不容异”本质相同。依据上述原理，他用几何方法求得若干曲边图形的面积，还证明了旋转体表面积和体积等公式。他在《六个几何问题》(1647)中进一步发展了他的理论。在以后几十年中不可分原理是数学家研究几何中无穷小问题引用最多的理论，被莱布尼兹誉为当时几何学的顶峰，对微积分的创立有重要影响。他还得到微分中值定理的几何形式，较早认识对数的巨大价值。著作亦涉及三角学和天体测量学。

费马(**Fermat, Pierre de, 1601—1665**) 法国数学家。1601年8月17日生于法国南部图卢兹附近波蒙-德洛马涅，1665年1月12日卒于卡斯特尔。早年在家乡受教育，后入图卢兹大学学习法律，毕业后任律师。1631年起一直任图卢兹议会议员。他博闻饱学，精通数种文字，掌握多门自然科学知识。任职期间业余研究数学，结交笛卡儿、梅森、惠更斯等著名学者，经常书信往来，讨论数学问题。生前较少发表论著，多数成果留在手稿、通信或书页空白处。1679年他的儿子将这些遗作整理汇集成书，在图卢兹出版。主要贡献有：在数论中证明或提出许多命题，如形如$4n+1$的素数均能唯一地表示为两个平方数之和，费马小定理，即如果p是素数，a是正整数，则$p|(a^p-a)$等。其中影响最大的是费马大定理，即方程$x^n+y^n=z^n$ $(n>2)$没有正整数解，记于丢番图《算术》1621年版第2卷的空白处；在《平面与立体轨迹引论》(1629—1636)中明确指出方程可以描述曲线，并可通过方程研究推断曲线性质，得到解析几何要旨，与笛卡儿分享这一学科创立的荣誉；给出现代微积分中函数取极值的必要条件，提出求极大、极小和拐点的步骤和通过求和过程得到求曲线所围面积的公式，是早期微积分学的先驱之一；通过与帕斯卡的通信讨论赌金分配问题，得出正确解答，成为概率论的共同创立者之一。他还在光学研究中提出“费马原理”，是变分法的前期工作。由于他的诸多成就，他被誉为“业余数学家之王”。

托里切利(**Torricelli, Evangelista, 1608—1647**) 意大利数学家、物理学家。1608年10月15日生于法恩扎，1647年10月25日卒于佛罗伦萨。1625年起在法恩扎的教会学校学习数学和哲学，后又到罗马的学校继续深造。受伽利略工作的启发写了一篇《论运动》的力学论文，引起伽利略的注意，1641年被邀请到佛罗伦萨，担任伽利略的秘书和助手，成为伽利略晚年的学生。1642年初伽利略去世后他作为数学家和哲学家，接替伽利略生前的职位，直至逝世。生前唯一发表的论著是《几何学》(1644)，书中发展了卡瓦列里

的不可分原理，将它应用于求立体图形，即用圆柱坐标下的积分取代笛卡儿坐标下的积分，并提出求图形重心的"通用定理"。书中还讨论了求曲线的弧长问题，发现了微分学中的一些关系式，确定了三角形距三顶点距离之和为最小的点，被称为"托里切利点"。书中对伽利略的抛射体运动也做了研究，引入托里切利原理，证明了对应于给定初速度和不同倾角的抛物线切于同一个抛物线，后者被称为"托里切利抛物线"，这是第一个包络曲线的例子。他的其它贡献有：发现气压计原理(1644)，得到液体流射的托里切利公式 (1643)，以及研制液体温度计与望远镜的透镜等。

沃利斯(Wallis, John, 1616—1703) 英国数学家。1616年12月3日生于肯特郡阿什福德，1703年11月8日卒于牛津。1632年入剑桥大学学习神学、医学、天文和数学，先后取得学士(1637)和硕士(1640)学位。毕业后任牧师，业余钻研数学，颇有成效。1649年任牛津大学萨维尔教授，讲授几何学。他是伦敦皇家学会的创始人之一，被称为17世纪最富有创造性的数学家之一。代表作是《论圆锥曲线》(1655)和《无穷算术》(1655)。他在研究意大利数学家、物理学家托里切利的《几何学》(1644)基础上，进一步发展了卡瓦列里的不可分原理，创用符号∞表示无穷大(1655)，导入无穷级数、无穷连乘积，用笛卡儿创立的代数坐标描述圆锥曲线，大胆使用了虚数、分指数和负指数及其符号表示法，实质上已完成相当于 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ 的积分，并得到圆周率 π 的无穷乘积表达式(1656)

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdots}$$

他的工作给牛顿以极大影响，促使微积分学的诞生。他还著有《普遍数学或算术大全》(1657)、《代数、历史与实践》(1685)，前者系统论述数学符号及历史概要；后者共100章，对代数学的历史及其应用做了详尽阐述。此外，他还著有《力学、或论几何运动》(1669—1671)，较严格地给出力和动量等概念的意义，在力学发展史上亦有地位。

帕斯卡(Pascal, Blaise, 1623—1662) 法国数学家、物理学家、思想家。1623年6月19日生于克莱蒙费朗，1662年8月19日早逝于巴黎。父亲是数学家，"梅森学会"成员，对他早期教育影响很大。他自幼聪颖，求知欲极强，12岁始学几何，即通读欧几里得《几何原本》并掌握了它。16岁发现著名的帕斯卡六边形定理：内接于一个二次曲线的六边形的三双对边的交点共线。据说他后来由此推出400多条推论。17岁写成《圆锥曲线论》(1640)，是研究德扎格射影几何工作(1636，1639)心得的论文，包括上述定理。这些工作是自希腊阿波罗尼奥斯以来圆锥曲线论的最大进步。1642年他设计并制作了一台能自动进位的加减法计算装置，被称为是世界上第一台数字计算器，为以后的计算机设计提供了基本原理。1654年他开始研究几个方面的数学问题，在

无穷小分析上深入探讨了不可分原理，得出求不同曲线所围面积和重心的一般方法，并以积分学的原理解决了摆线问题，于1658年完成《论摆线》。他的论文手稿对莱布尼兹建立微积分有很大启发；在研究二项式系数性质时，写成《论算术三角形》向巴黎科学院提交，后收入他的全集，于1665年发表。其中给出的二项式系数展开后人称为“帕斯卡三角形”，实际它已在约1100年由我国贾宪所知；在与费马的通信中讨论赌金分配问题，对早期概率论的发展颇有影响。他还制作了水银气压计(1646)，写了液体平衡、空气的重量和密度等论文(1651—1654)。自1655年隐居修道院，写下《思想录》(1658)等经典著作。

惠更斯(**Huygens**, **Christiaan**, **1629—1695**)　荷兰数学家、物理学家、天文学家。1629年4月14日生于海牙，1695年7月8日卒于同地。1745年到莱顿大学攻读法律和数学，两年后转学于布雷达大学，1655年获法学博士学位。1663年当选英国皇家学会会员，1666年成为法国科学院首批院士。在数学上的主要贡献有：求出蔓叶线的弧长；得到悬链线弧长的求法和作图方法；开创曳物线研究；指出渐屈线的切线是渐伸线的法线，并以此证明了旋轮线的渐屈线仍为旋轮线；发现旋轮线是等时曲线。此外他的《论赌博中的计算》(1657)是概率论的最早发表的论著，《钟表的摆动》(1673)给出许多动力问题的完整解答，《论光》(1690)给出研究各种光学现象有效的“惠更斯原理”，成为光的波动理论的创始人。他还在天文学上发现了土卫六和土星光环。1672年在巴黎与来访的莱布尼茨结为挚友。并在交往中激发起莱布尼茨研究数学的兴趣。1689年访问伦敦时会见过牛顿，他第二年发表的光学理论受到牛顿的赞赏。

巴罗(**Barrow**, **Isaac**, **1630—1677**)　英国数学家、物理学家。1630年10月生于伦敦，1677年5月4日卒于同地。从小受到良好教育。1644年在剑桥大学三一学院学习，毕业后成为学院研究员。1652年获硕士学位，1660年升为希腊文教授，两年后兼任伦敦格雷沙姆几何学教授。1663年成为剑桥大学第一个“路卡斯数学教授”。他是牛顿的老师，在微积分学方面对牛顿有较大影响，并最先发现牛顿的天才。1669年巴罗宣称牛顿的学识已超过自己，当年10月主动辞去路卡斯数学教授职位，举荐牛顿担任。“巴罗让贤”成为数学史上的佳话。1673年担任三一学院院长，1675年被任命为剑桥大学副校长。他还是英国皇家学会(1660年成立)的首批会员之一。在微积分学前史中巴罗是主要人物之一，他提出求切线的方法和著名的“微分三角形”的概念。他的三个系列讲座讲义，数学(1664—1666)、光学(1669)和几何学(1670)包含了他在数学和其它科学领域的主要贡献，其中《几何学讲义》记载了他的微积分成果与思想。此外他于1655年从希腊文翻译出版的欧几里得《几何原本》15卷的拉丁文本，1660年又将它翻译为英文出版。该译本仅在18世纪就再版6次，流传甚广。

1857年由伟烈亚力和李善兰合译的《几何原本》后9卷中文版据考证很可能就是以巴罗的英译本为底本的。

格雷戈里(**Gregory, James, 1638—1675**) 英国数学家、光学家、天文学家。1638年11月生于苏格兰阿伯丁附近的德鲁莫克,1675年10月卒于爱丁堡。早年跟母亲学习几何学,1651年到阿伯丁上大学。毕业后继续自学。1663年赴意大利进修,学习几何、力学和天文学。在帕多瓦(1664—1667)发表过数学论著。1668年回英国伦敦后当选为皇家学会会员,同年成为圣安德鲁斯大学数学教授,1674年转任爱丁堡大学数学教授。主要贡献有:在《论圆和双曲线的实际求积》(1667)中给出函数概念的新定义,即函数是从一些其他的量经过一系列加、减、乘、除、开方以及极限运算而得到的量,在数学史中占有一定地位。文中还用无穷级数来求圆与双曲线所围的面积;最早使用级数收敛和发散的概念,得到 $\tan x$, $\arctan x$ 和 $\operatorname{arcsec} x$ 的无穷级数展开式,其中 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ 被称为"格雷戈里展开式"。1674年莱布尼兹用它得到 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$,许多人还用它得到圆周率 π 的其他表达式;在《几何的通用部分》(1668)中得到计算曲线长度的具体方法,给出求曲线所围面积及其旋转体体积的一系列规则;1670年在与科林斯的通信中指出"格雷戈里—牛顿插值公式;讨论过特殊超越数、对数、三角函数的求值等。他还在《光学的进展》(1663)中阐明反射镜原理,给出第一架反射望远镜的草图,并提出用光度测定法估计恒星的距离。

关孝和(**Seki, Takakazu, 1642—1708**) 日本数学家。1642年生于群马县藤冈,1708年10月24日卒于江户(今东京)。出身于武士家庭,据载曾随数学名家高原吉种学过数学,人称数学神童。后长期在江户任贵族家府家臣,掌管财赋,直到1706年退职。他是日本传统数学—和算的奠基人,也是关氏学派(或称关流)的创始人,在日本被尊称为算圣。生前仅有一部《发微算法》(1674)出版,逝后又由学生荒木村英整理出版了一部遗稿《括要算法》(1709)。另有多种学派内部秘传的抄本著作,如《三部抄》(解见题之法、解隐题之法、解伏题之法)、《七部书》(开方翻变、病题明致、题术辩议等)。主要成就有:改进了朱世杰《算学启蒙》(1299)中的天元术算法,开创了和算独有的笔算代数;建立了行列式概念及其初步理论;完善了中国传入的数字方程的近似解法;发现方程正负根存在的条件;勾股定理、椭圆面积公式、阿基米德螺线、圆周率的研究;开创"圆理"(径、弧、矢间关系的无穷级数表达式)研究;幻方理论;连分数理论等等。他还写过数种天文历法方面的著作,其思想由弟子建部贤弘、松永良弼等人继承和应用,对日本数学的发展产生重要影响。他的许多发现独立于西方而存在,有些在理论上更广泛,时间上也早些。

牛顿(**Newton, Isaac, 1643—1727**) 英国数学家、物理学家、天

文学家、自然哲学家。1643年1月4日生于林肯郡伍尔索普，1727年3月31日卒于伦敦。早年在格兰瑟姆读书，1661年以优异成绩考入剑桥大学三一学院，数学上受教于巴罗。1664年毕业后曾为躲避鼠疫回乡，1665—1666年间做出流数术、万有引力和光的分析三大发明，年仅23岁。1667年回剑桥在三一学院执教。1669年继巴罗之后任卢卡斯数学教授职位。晚年致力于哲学和公务，1696年任造币厂监督，3年后任厂长。1703年当选为皇家学会主席。他在数学上以创建微积分而著称，其流数法始于1665年，系统叙述于《流数法和无穷级数》(1671年完成，1736年出版)，首先发表在《自然哲学之数学原理》(1687)中。其中借助运动学中描述的连续量及其变化率阐述他的流数理论，并创用字母上加一点的符号表示流动变化率。讨论的基本问题是：已知流量间的关系，求它们的流数的关系以及逆运算，确立了微分与积分这两类运算的互逆关系，即微积分基本定理。此外他还论述了有理指数的二项定理(1664)，n次代数方程根的m次幂和的公式(1707)、数论、解析几何、曲线分类、变分法等问题。在物理学上发现了万有引力定律(1666—1684)，并据此指出行星运行成椭圆轨道的原因。1666年用三棱镜实验光的色散现象，1668年发明并亲手制作了第一具反射望远镜。在哲学上深信物质、运动、空间和时间的客观存在性，坚持用观察和实验方法发现自然界的规律，力求用数学定量方法表述的定律说明自然现象，其科学研究方法支配后世近300年的物理学研究。

莱布尼茨(**Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646—1716**) 德国数学家、自然科学家、哲学家。1646年7月1日生于莱比锡，1716年11月14日卒于汉诺威。父亲是莱比锡大学教授，去世后留下丰富藏书，为他早年学习创造良好条件。1661年入莱比锡大学，学习哲学、修辞学、数学及多种语言，后选择法学。1666年转学于阿尔特多夫大学，次年获博士学位。1672年到过巴黎，结识许多著名学者。1676年出任汉诺威公爵顾问及图书馆馆长，后一直在那里任过多种官职，直至逝去。他的研究涉及逻辑学、数学、力学、地质学、法学、历史、语言及神学等多种领域，其目的是寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法。在数学中以独立创立微积分学而著称，始于1675年，发表于1684年，即《一种求极大、极小值和切线的新方法……》。文章从几何学的角度论述微分法则，得到微分学的一系列基本结果，是较早的微积分文献。1686年他又发表第一篇积分学论文，可以求出原函数。这两篇文献均早于牛顿首次发表的微积分结果(1687)，但他开始从事研究的时间要晚近10年，因此数学史上将他二人并列做为微积分的创立者。莱布尼茨于1694年进一步补充了积分结果。他创设的数学符号非常优良，对微积分的发展有极大影响，直到现在仍在使用。他的其他贡献有：在1673年制作了能进行四则运算的计算机，比帕斯卡的只能做加减运算的计算机(1642)进了一

大步；系统阐述了二进制记数法，并把它与中国的八卦联系起来；利用格雷戈里展开式于1674年得到$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$等等。此外，他在哲学上倡导客观唯心主义的单子论，在逻辑学上提出数理逻辑的许多基本概念和命题。

洛必达(**L'Hospital 或 L'- Hospital, Guillaume François Antoine de, 1661—1704**) 法国数学家。1661年生于巴黎，1704年2月2日卒于同地。出身于贵族家庭，受袭侯爵衔。曾在军中任骑兵军官，因视力不佳退出，转向学术研究。他聪颖早慧，15岁就解出数学家帕斯卡提出的摆线难题。1691年前后向约翰伯努利学习过微积分。后来又结交其他数学家，在长期通信中萌发了许多新思想，解决了约翰伯努利提出的“最速降线”等问题，并导致微积分学说的创立与发展。主要著作是《阐明曲线的无穷小分析》(1696)，由一组定义和公理出发，对变量、无穷小量、切线、微分等概念做了全面阐述，是世界上第一本系统的微分学教科书，对传播新创建的微积分理论起了重要作用。由于该书的影响，“无穷小分析”或“分析”成了微积分的同义词。书中第9章记载了约翰·伯努利两年前写信告诉他的一个著名定理：即求一个分数当分子和分母都趋于零时的极限法则，后人误认为是他的发明，称之为“洛必达法则”，沿用至今。他还撰有几何、代数和力学方面的文章，据说还发表了伯努利的讲义。他也计划写一部积分学教科书，但因过早去世未能如愿。遗留的手稿于1720年在巴黎出版，题名为《圆锥曲线分析论》。

伯努利家族(**Bernoulli family, 17—18世纪**) 瑞士数学家族，祖孙三代出过十余位数学家和物理学家。原籍比利时安特卫普。1583年迁居德国法兰克福，最后定居瑞士巴塞尔。其中有三个人成就最大：

雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli)，1654年12月27日生于巴塞尔，1705年8月16日卒于同地。分别于1671和1676年获得哲学和神学学位，受笛卡儿、沃利斯等人的著作影响，转向数学研究。1687年起任巴塞尔大学数学教授。主要贡献有：1690年首先使用数学意义下的“积分”一词；同年提出悬链线问题，后又改变条件，解决了更复杂的悬链问题并应用于设计吊桥；1694年首先给出直角坐标和极坐标下的曲率半径公式，讨论了“伯努利双纽线”的性质；1695年提出“伯努利方程 $dy/dx=p(x)y+Q(x)y^{n}$”；1713年出版《猜度术》，给出“伯努利数”、“伯努利大数定律”等结果。他还研究了对数螺线，发现该线经过变换仍为对数螺线的奇妙性质。

约翰·伯努利(Johann Bernoulli)，1667年8月6日生于巴塞尔，1748年1月1日卒于同地。雅各布之弟。早年学医，同时随兄研习数学。1690年获医学学位，1696年得博士学位。1691年时在巴黎当过洛必达的私人教师，解出悬链线问题，1694年最先提出“洛必塔法则”。1695年到格罗宁根大学教数学，第二年提

出“最速降线问题”,后得到正确解答,引发变分学的研究。1705年继雅各布之后任巴塞尔大学数学教授。曾当过欧拉的教师,给他以特别指导。

丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli),1700年2月9日生于荷兰格罗宁根,1782年3月17日卒于巴塞尔。约翰之子。1716年获哲学硕士学位,1721年获巴塞尔大学医学博士学位。1725年任俄国彼得堡科学院数学教授。1732年回巴塞尔,教授解剖学、植物学和自然哲学。他于1724年解决了微分方程中的“里卡蒂”方程。1728年与欧拉一起研究弹性力学,1738年出版《流体动力学》,给出“伯努利定理”等流体动力学的基础理论。他曾10次获得法国科学院颁发的奖金,贡献涉及天文、重力、潮汐、磁学等多个方面。

棣莫弗(**De Moivre, Abraham, 1667—1754**)　法国—英国数学家。1667年5月26日生于法国维特里勒弗朗索瓦,1754年11月27日卒于英国伦敦。早年为法国加尔文派教徒,在新旧教派斗争中遭监禁。释放后于1685年移居英国,任家庭教师和保险事业顾问等职。与牛顿、哈雷等人为友,专心科学研究。1697年当选皇家学会会员,后又成为柏林科学院和巴黎科学院院士。主要贡献在概率论,1711年写成《抽签的计量》一文,1718年修改扩充为《机会论》。这是概率论较早的专著之一,第一次定义了独立事件的乘法定理,给出二项分布公式,讨论了掷骰和其他赌博的许多问题。他在另一概率专著《分析杂论》(1730)中最早使用概率积分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2$,得到 n 阶乘的级数表达式,指出对于很大的 n,$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$,后人误称为斯特灵公式。1733年他又用阶乘的近似公式导出正态分布的频率曲线,作为二项分布的近似。此外,他于1695年写过有关牛顿流数术研究的论文;1707年在研究三角学时实质上已得到“棣莫弗”公式 $(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi\pm i\sin n\varphi$,1722年正式发表;用复数证明了求解方程 $x^n-1=0$,相当于把圆周分成 n 等分;将概率论用于保险事业,出版过专门论著(1725)。

泰勒(**Taylor, Brook, 1685—1731**)　英国数学家。1685年8月18日生于米德尔塞克斯的埃德蒙顿,1731年12月29日卒于伦敦。1701年考入剑桥大学圣约翰学院学习,1709年获法学硕士学位,移居伦敦。1712年当选为皇家学会会员,1714年又获法学博士学位。同年任皇家学会秘书,四年后因健康原因退职。主要著作是1715年发表的《正的和反的增量方法》,其中包含他于1712年给数学家天文学家梅钦的信中首先提出的泰勒定理,用现代形式表示为

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+\cdots$$

它由格雷戈里—牛顿插值公式发展而来,当 $x=0$ 时称为马克劳林定理。到1772年拉格朗日强调了这一公式的重要性,称之为微分学基本

定理，但泰勒对定理的证明未考虑级数的收敛性，因而不太严格，这一工作直到19世纪20年代才由柯西完成。泰勒定理开创有限差分理论，使任意单变量函数都可展为幂级数，在研究弦振动等物理问题时有广泛应用。1717年他还应用这一定理求解了数值方程。他的其他贡献有：论述微分的奇异解；曲率问题的研究；发表《线性透视学》(1715)和再版的《线性透视原理》(1719)等权威性透视法著作，提出和使用"没影点"概念，对摄影测量制图学的发展有一定影响。此外，撰有哲学遗作，发表于1793年。

哥德巴赫(**Goldbach，Christian，1690—1764**) 德国—俄国数学家。1690年3月18日生于普鲁士柯尼斯堡（今苏联加里宁格勒），1764年11月20日卒于莫斯科。早年就读于柯尼斯堡大学，初读法学，后学医学和数学。1710年游历欧洲。结识莱布尼茨、伯努利家族等数学名家。1725年移居俄国彼得堡，任帝国科学院会议秘书兼数学和历史学教授，与欧拉共事。1727年赴莫斯科，当上沙皇彼得二世的家庭教师。1742年担任外交部公使。他的影响主要在数论，以提出"哥德巴赫猜想"而闻名。他曾与欧拉进行了长期的书信交往，在1742年6月7日给欧拉的信中提出了这一猜想：不小于6的偶数能表示成两个奇素数之和，不小于9的奇数能表示成三个奇素数之和。欧拉在6月30日的回信中说：虽然我还不能证明它，但确信它的成立。欧拉同时化简了猜想的表述：任何一个偶数 $n(n\geqslant 4)$ 是两个素数之和。该猜想虽然对于不太大的数用实际检验得到证实，但至今没有严格的证明。200多年来许多数学家为此做过努力，相继得到一批近似结果，其中以我国数学家陈景润于1973年发表的结果为最好，他证明了"每一个充分大的偶数都可以表示为一个素数及一个不超过两个素数乘积的数之和"，通俗表示为(1+2)。他的其他论述有：里卡蒂微分方程积分法(1728)、Γ函数的插值问题(1729)、复根共轭问题(1742)、函数的无穷级数展开式(1745)等，许多成果体现在与数学家们的通信中。

斯特灵(**Stirling，James，1692—1770**) 英国数学家。1692年生于苏格兰斯特灵郡加登镇，1770年12月5日卒于爱丁堡。早年在格拉斯哥大学就读。1711年入牛津大学贝利奥尔学院学习。1716年因同情詹姆斯党人，拒绝继续学习必要的效忠宣誓而辍学。第二年发表成名作《牛顿的三次曲线》(1717)，证明了牛顿关于三次曲线分类研究的若干命题，共包括牛顿提到的72种三次曲线和他本人增加的4种，并把 x 和 y 的一般二次方程化为几种标准型，赢得声誉，特别是得到牛顿的赞许。后在威尼斯、伦敦等地任职。1726年由牛顿保荐成为英国皇家学会会员。1748年当选为柏林科学院院士。主要著作是《微分法》(1730)，书中讨论了 $\log n!$ 展成无穷级数的式子，等价于 $n!$ 的无穷级数式，给出前5个系数以及计算后面系数的递推公式，后人将由阶乘到正数或负数幂的转换系数称为第一类

或第二类斯特灵系数。在$n!$的级数式中，当n很大时略去后面的高阶项，可以得到近似等价式$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$，这是由另一数学家棣莫弗在同一年发表的著作中明确指出的，但后人将它称为"斯特林公式"。他还引入以他的名字命名的级数，阐述了使级数快速收敛的求和方法，研究了级数的插值，并得到$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$等许多结果。1735年发表《论地球形状和地表重力变化》，同年任苏格兰采矿公司经理，后来因事务所缠，虽继续进行数学活动，但成果较少。

马克劳林（**Maclaurin, Colin, 1698—1746**） 英国数学家。1698年2月生于苏格兰基尔莫丹，1746年1月14日卒于爱丁堡。自幼聪慧勤奋，11岁入格拉斯哥大学上学，17岁以有关引力研究的论文获硕士学位，19岁受聘为阿伯丁马里沙尔学院数学教授，21岁(1719)当选为皇家学会会员。1722年赴法国巴黎从事研究工作，1724年以《物体碰撞》论文获巴黎科学院奖金。次年回国，任爱丁堡大学数学教授。主要贡献是继承和发展了牛顿的流数理论。1719年他曾在访问伦敦时拜见过牛顿，第二年在牛顿许可下出版《结构几何学》(1720)一书，证明了牛顿著作中许多未曾解释的定理，并引入"亏数"等概念。1742年为了推护牛顿的学说，又出版了《流数通论》，最早为牛顿方法做出逻辑阐述，用几何法和穷竭法论证流数学说，成为分析形式化的前驱。他还把级数用做求积分的方法，以几何形式给出无穷级数收敛的积分判别法，得到马克劳林定理或马克劳林级数展开式

$$f(x)=f(0)+xf'(o)+\frac{x^2}{2!}f''(o)+\frac{x^3}{3}f'''(o)+\cdots\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(o)+\cdots$$

并用待定系数法给予证明。他还约在1729年创立用行列式方法求解多个未知数的联立线性方程，收入逝后1748年发表的《代数论著》中。该方法由克莱姆于1750年重新发现，或许由于符号优劣的关系，后人误称为"克莱姆法则"。他于1740年以潮汐研究的成果与欧拉和丹尼尔·伯努利一起荣获巴黎科学院奖金。其他论著涉及天文学、地图测绘学及保险统计等。

克莱姆（**Cramer, Gabriel, 1704—1752**） 瑞士数学家。1704年7月31日生于日内瓦。1752年1月4日卒于法国塞兹河畔巴尼奥勒。早年在日内瓦读书，1724年起在日内瓦加尔文学院任教，1734年成为几何学教授，1750年任哲学教授。他自1727年进行为期两年的旅行访学。在巴塞尔与约翰·伯努利、欧拉等人学习交流，结为挚友。后又到英国、荷兰、法国等地拜见许多数学名家，回国后在与他们的长期通信中，加强了数学家之间的联系，为数学宝库也留下大量有价值的文献。他一生未婚，专心治学，平易近人且德高望重，先后当选为伦敦皇家学会、柏林研究院和法国、意大利等学会的成员。主要著作是《代数曲线的分析引论》(1750)，首先定义了正则、非正则、超越曲线和无理曲线等概念，

第一次正式引入坐标系的纵轴(Y轴),然后讨论曲线变换,并依据曲线方程的阶数将曲线进行分类。为了确定经过5个点的一般二次曲线的系数,应用了著名的"克莱姆法则",即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式。该法则于1729年由英国数学家马克劳林得到,1748年发表,但克莱姆的优越符号使之流传。书中还讨论了马克劳林注意到的一个曲线相交的悖论,给出与欧拉(1748)相同的解释,后人称之为"克莱姆悖论"。此外他还留下若干数学史笔记,提出应用于数理经济和概率论的"数学效益"概念。

欧拉(Euler, Léonard, 1707—1783) 瑞士数学家。1707年4月15日生于巴塞尔,1783年9月18日卒于俄国圣彼得堡。出身牧师家庭,自幼受父亲教育。13岁入巴塞尔大学,15岁得学士学位,16岁获硕士学位。他上大学时就受到约翰·伯努利的特别指导,后专心数学研究,19岁(1726年)开始创作文章,一举获巴黎科学院奖金。1727年,由丹尼尔·伯努利举荐,到彼得堡科学院工作。1731年成为物理学教授,1733年接替丹尼尔·伯努利任数学教授。1741年受普鲁士腓特烈大帝邀请到德国柏林科学院任物理数学所所长。1766年应俄国沙皇喀德林二世敦聘重回彼得堡,直至去世。他是数学史上最多产的数学家,论著几乎涉及当时所有的数学分支。主要贡献有:出版《无穷分析引论》(1748)、《微分学原理》(1755)和《积分学原理》(1768—1770)三部数学经典著作,扩展了微积分领域,为无穷级数、微分方程、微分几何等分支和学科的产生与发展奠定了基础;开创现代三角学和现代数论;还由解决哥尼斯堡七桥问题而引发图论分支的研究等等。他创用或提倡使用了大量先进的数学符号,得到许多重要的公式、定理和常数值。除创建纯粹数学理论外,他还应用这些数学工具去解决天文、物理、力学等方面的实际问题,取得巨大成果。他在1735年因过度工作右眼失明,1771年又因病左眼失明,他以惊人的记忆力和心算技巧继续进行科学创作,以口授方式又完成几百篇科学论文。此外,他扶植后学,关心教育,其高尚品德赢得后人的广泛尊敬。

比丰(Buffon, Georges Louis Leclerc, 1707—1788) 法国数学家、自然科学家。1707年9月7日生于蒙巴尔,1788年4月16日卒于巴黎。10岁在第戎耶稣会学院读书,16岁主修法学。21岁(1728)到昂热转向数学学习,并开始研究自然科学,特别是植物学。1733年当选为法国科学院院士,1739年任巴黎植物园园长,1753年进入法兰西学院。他在数学上以设计"比丰投针问题"而著称,发表于《能辩是非的算术试验》(1777)中。其中首先提出并解决下列问题:把一个小薄圆片投入被分为若干个小正方形的矩形域中,求使小圆片完全落入某一小正方形内部的概率是多少?接着讨论投掷正方形薄片和针形物时的概率问题,这些问题都称为"比丰问题"。由于投针问题的结果可以用来计算圆周率π的近似值,故特别受到重视,成为几何概率的典型例子。他还于

1740年翻译牛顿的《流数法》，同时探讨牛顿和莱布尼茨发现微积分的历史。他集多年研究成果编成巨著《自然史》(44卷1749—1808)，原书计划50卷，生前仅出版36卷，后8卷由他的学生完成，其中包含物种进化的思想，推动了古生物学的发展。他是第一个对地质史划分时期的科学家，还首次提出太阳与彗星碰撞产生行星的理论。

克莱罗(**Clairaut, Alexis-Claude, 1713—1765**) 法国数学家、科学家。1713年5月7日生于巴黎，1765年5月17日卒于同地。父亲是柏林科学院通讯院士、数学教师，对他进行启蒙教育。克莱罗童年就学习解析几何和微积分知识。12岁开始写作论文，18岁(1731)进入法国科学院，成为该院有史以来最年轻的院士，后成为英国皇家学会会员和德、俄、意等国研究院成员，并与欧拉、约翰·伯努利等数学家有长期联系。主要论著有：《关于双重曲率曲线的研究》(1731)，论述曲面和空间曲线的解析理论；《极大极小若干问题》(1733)，阐述变量计算的历史；《积分学的一般研究》(1739)，创立解 $Pdx+Qdy+Rdz=0$ 一类方程的积分因子学说；《几何原理》(1741)，讨论欧几里得第5公设问题；《地球外形理论》(1743)，论述旋转体的构成及地球各部分在万有引力作用下的形状，是最早将纯粹分析理论应用于天体力学的数学家；《月球理论》(1752)，通过微分方程的级数理论首次给出"三体问题"的近似解，并依此预报了1759年哈雷彗星的近地点日期。他还于1734年提出"克莱罗微分方程"$y=xy'+f(y')$，并发现奇解；撰写了《牛顿哲学原理》(1739)，讨论牛顿的光粒子理论；出版《代数原理》(1746)等等，在力学中他证明了单摆振动的等时性，研究了运动中物体的动力学。此外写过若干科学史方面的文章。

达朗贝尔(**D'Alembert, Jean le Rond, 1717—1783**) 法国数学家、物理学家。1717年11月16日生于巴黎，1783年10月29日卒于同地。出生时被母亲遗弃，由一玻璃匠收养。早年学习法学和医学，后改学数学。1741年成为法国科学院院士，1754年当选为法兰西学院院士，1772年任该院终身秘书。他在数学、力学、天文学等许多领域都作出贡献。主要成就有：在《论动力学》(1743)中提出"达朗贝尔原理"，建立起把动力学问题化为静力学问题的一般方法，并以此研究了天体力学中的三体问题，还将它推广到流体动力学中；在《弦振动研究》(1747)中得到偏微分方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的通解表达式，以后被称为达朗贝尔解，在《关于流体阻力的新理论》(1752)中导出复变函数 $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ 解析的条件 $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$，$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}$，因而被认为是复变函数论的先驱之一。他于1746年任《百科全书》(1751—1772)副主编，撰写了"微分"、"方程"、"几何学"、"动力学"、"维数"、"哲学原理"以及音乐等方面的许多重要条目，提出时间作为第4维空间等新的观点，该

书被称为现代百科全书之奠基之作。1760年以后陆续出版了8卷本的《数学论丛》(1761—1780),给出许多早年论述过的问题的新解法。他还于1749年讨论了地球岁差的原因,1752年发表了音乐方面的论著,还致力于哲学研究(1753),是18世纪法国启蒙运动的一位杰出代表。

蒙蒂克拉(**Montucla, Jean Étienne, 1725—1799**) 法国数学家,数学史家。1725年9月5日生于里昂,1799年12月19日卒于凡尔赛。早年在里昂教会学院学习数学和古代语言学,1745年到图卢兹攻读法律,后转至巴黎进修数学。1761年起担任多种政府职务,业余研究数学和数学史。曾当选为柏林研究院通讯院士。主要著作是《圆求积的历史探索》(1754)和《数学史》(1758),前者是最早系统研究圆周率历史的著作,后者则为第一部全面阐述数学历史的专著,包含有许多他本人的论述和见解。例如他将数学分为纯粹抽象的部分(即数学本身)和其它各科混合的部分(即数学应用),对一切能用数学方法进行研究的领域(如天文、地理、光学、音乐、航海、机械、力学等)都做了介绍。《数学史》初版时为2卷,后不断修订充实,在法国大革命后丧失财产和职业后仍继续努力,将该书扩充为4卷,1799年开始出版,但未及完成便去世了。第三、四卷由他的童年好友拉朗德于1802年出版。在此后100多年里它一直被奉为数学史和科学史上的经典著作,影响极为深远。德国数学史家M·康托尔的4卷《数学史演讲》(1880—1908)从中吸取了大量极有价值的参考资料。

兰伯特(**Lambert, Johann Heinrich, 1728—1777**) 德国数学家、天文学家、物理学家、哲学家。1728年8月26日生于阿尔萨斯的米卢兹(原属瑞士、今属法国),1777年9月25日卒于柏林。裁缝世家出身,12岁因家贫辍学做工,业余刻苦自学,干过小职员等工作,1748年做家庭教师。他利用东家的丰富藏书继续钻研,还结识许多学者,声望渐增。1755年当选为瑞士科学协会会员,1759年移居奥格斯堡,1764年定居柏林,成为科学院院士。一生共出版150多种论著,涉及数学、天文、物理和哲学等多个领域。在数学中,他于1768年在自传中运用连分数首次证明了圆周率 π 和常数 e 是无理数,这两个连分数仍以他的名字命名;1766年完成《平行线理论》(1786发表),试图证明欧几里得第五公设,对非欧几何学诞生起了一定作用;首次系统研究了双曲函数(1770),引入 $\sinh x$, $\cosh x$ 等符号;发表关于透视和画法几何的文章(1759,1773),成为蒙日同类工作的先导;为了简化彗星轨道的计算,得到一系列关于圆锥曲线的定理;将方程 $x^m+px=q$ 的解展成无穷级数,受到欧拉和拉格朗日的重视。他还提出求素因子的方法,编制出版了1～100的7位数字的自然对数表,出版了《数学的应用》(1765—1772)。在其他领域提出测光法(亮度的单位以他的名字命名)、测湿法和高温测定法,提出星系假说,出版《新工具论》(1764)等哲学论著。

贝祖(**Bezout, Étienne,**

1730—1783) 法国数学家。1730年3月31日生于内穆尔,1783年9月27日卒于枫丹白露附近的巴塞一洛格。少年时酷爱数学,后在海军舰船学校和皇家炮兵学校任数学教师和主考官,是巴黎科学院院士。主要贡献是代数中的方程理论。代表作有:《几种类型的方程》(1762),用消元法将只含一个未知数的 n 次方程与解联立方程组问题联系起来,提供了某些 n 次方程的解法;《数学教程》(6卷,1764—1769),提出用联立方程组的系数构成行列式,以此来求解方程组或判断该方程组是否有解。该书作为教材在法国流行70多年,还被译为英文,在19世纪对美国数学教育的形式和内容都有影响;《代数方程的一般理论(1799),用消元法解次数高于1的两个二元方程,并证明了关于方程次数的贝祖定理,还证明了一个 m 阶曲线和一个 n 阶曲线相交至多有 mn 个交点(重数计算在内)的定理,该定理由英国数学家马克劳林于1720年提出,引起许多数学家的兴趣,而贝祖的证明是比较好的。他还证明了代数学中的余数定理,即 n 次多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)$,所得余数为 $f(a)$,也称为"贝祖定理"。

华林(**Waring, Edward, 约1736—1798**) 英国数学家。约1736年生于什鲁斯伯里,1798年8月15日卒于该城附近的普利莱。1753年到剑桥大学马格达伦学院读书,1757年获学士学位,1760年获硕士学位,同年被任命为该校第六任卢卡斯数学教授。1763年当选为伦敦皇家学会会员。主要贡献是在1770年出版的《代数沉思录》中首次记载和提出了许多数论中的重要定理,例如他的学生和朋友威尔逊得到的威尔逊定理:$(p-1)!+1$ 被 p 整除的充要条件是 p 为素数;哥德巴赫于1742年提出的猜想:任何一个不小于6的偶数是两个素数之和;以及他本人提出的华林定理:对任意给定的整数 $k\geqslant 2$,必有一正整数 $s(k)$ 存在,使得每个正整数必为 $s(k)$ 个非负的 k 次方数之和,例如不多于4个的平方数之和或不多于9个的立方数之和,或不多于19个的4次方数之和等等。他没有给出该定理的证明,只是猜测 $s(k)$ 的最小值 $g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$。直到1909年,德国数学家希尔伯特才证明了 $s(k)$ 的存在性。他的其他贡献有:首次得到由方程系数表示 n 次代数方程根幂连续和的递推公式;建立三、四、五次方程虚根存在准则;提出插值公式;得到某些级数敛散的条件及判别法则;将二次曲线进行详细分类,等等。有关著作还有《分析杂论》(1762)、《代数曲线的特征》(1772)、《分析沉思录》(1776)等。

拉格朗日(**Lagrange, Joseph Louis, 1736—1813**) 法国数学家、力学家、天文学家。1736年1月25日生于意大利都灵,1813年4月10日卒于巴黎。少年时读到哈雷介绍牛顿有关微积分的短文,对分析学产生兴趣。后上了都灵大学。18岁时研究"等周问题",用纯分析的方法发展了欧拉开创的变分法。19岁(1755)时当上都灵炮兵学校的数学教授。不久成为柏林科学院通讯院

士。1757年参与创建都灵科学协会，在协会出版的科技会刊上发表大量论文，内容涉及变分法、概率论、微分方程、弦振动、最小作用原理等。1764年用万有引力解释月球天平动问题获巴黎科学院奖金，1766年又用微分方程理论和近似解法研究6体问题再度获奖，成为欧洲极有声望的数学家。1766年接受普鲁士王腓特烈邀请到柏林科学院工作。1787年定居巴黎，历任法国米制委员会主任、巴黎高等师范学校和巴黎综合工科学校数学教授。主要贡献有：在《关于方程的代数解法的研究》(1771)等论文中，发现置换对解的影响，指出五次方程不可能有根式解，蕴含群论思想的萌芽；在《分析力学》(1788)中用分析学理论建立起完整和谐的力学体系，使力学分析化，是自牛顿之后最重要的经典力学著作；在《解析函数论》(1797)和《函数计算讲义》(1801)两大分析巨著中尝试重建微积分的基础，采用新的微分符号，成为函数论的起点。他还在数论中得到一系列重要结果，在微分方程理论中作出奇解是积分曲线族的包络的几何解释，提出线性代换的特征值概念等。

蒙 日（**Monge, Gaspard, 1746—1818**） 法国数学家、化学家。1746年5月10日生于第戎之南的小镇博讷，1818年7月28日卒于巴黎。早年在家乡读书，勤奋好学聪敏出众。16岁成为里昂奥拉托学校物理教师，19岁(1765年)又到阿登省梅济耶尔军事学院深造，1769年任该校数学教师，1775年成为数学和物理教授。1780年定居巴黎，1792年任海军与殖民部长，1794年参与筹建巴黎综合工科学校，第二年任巴黎师范学校教授，讲授画法几何学。是年兼任新成立的综合工科学校数学教授，并任该校负责人。1798年随拿破仑远征埃及等地，曾任埃及研究院院长。1799年回国后任过参议员和受封伯爵。晚年随拿破仑倒台而落难，凄寂病逝。他是画法几何学的创始人，1764年就用自制的测量工具画出家乡城镇的大比例平面图，1765年用画法几何原理绘制防御工程设计图，因涉及国防机密，他的研究成果30年以后才被允许出版，题为《画法几何学》(1798—1799)，该书出版后很快流传各国，成为画法几何的奠基作和经典教本。他的其他贡献有：在《关于把分析应用于几何的活叶论文》(1795)中建立起三维几何的代数方法，引入特征曲线和特征锥面等概念；在《关于曲率半径及重曲率曲线的各种拐点》(1771)中将曲线和曲面的各种性质表达为偏微分方程；在《代数在几何中的应用》(1802)中对解析几何做了发展；在《分析在几何中的应用》中又总结论述了微分几何的许多结果。此外做为优秀教师还培养和影响了一大批几何学家。

拉普拉斯（**Laplace, Pierre-Simon, 1749—1827**） 法国数学家、天文学家。1749年3月23日生于诺曼底的博蒙昂诺日，1827年3月5日卒于巴黎。家境贫寒，靠邻居资助上学，显露数学才华，在博蒙军事学校读书不久就成为该校数学教员。1767年由达朗贝尔介绍获得巴黎陆军学校数学教授职位。1785年当选

为法国科学院院士。1795年任综合工科学校教授,后又在高等师范学校任教授。1816年成为法兰西学院院士,次年任该院院长。主要研究天体力学和物理学,认为数学只是一种解决问题的工具,但在运用数学时创造和发展了许多新的数学方法。主要成就是:在《宇宙体系论》(1796)中探讨了太阳系的起源,提出星云假说,该假说在1755年由康德从哲学角度阐述过,拉普拉斯则是从数学和力学角度来论证,后人称之为"康德—拉普拉斯星云假说;在《天体力学》(5卷1799—1825)中汇聚了他在天文学中的几乎全部发现,试图给出由太阳系引起的力学问题的完整分析解答,阐述了天体运行、地球形状、行星摄动、月离理论和三体问题等等,引入著名的拉普拉斯方程$\frac{\partial^2 v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial^2 y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$;在《概率的分析理论》(1812)中总结了当时整个概率论的研究,论述了概率在选举、审判调查、气象等方面的应用,导入"拉普拉斯变换"。他还给出展开行列式的"拉普拉斯定理",发展了解非齐次微分线性方程组的常数变量法,研究了复变函数的积分和有限差分;并对物理中的毛细管作用、热学理论、粒子论光学和声音的速度等问题做过论述。

勒让德(Legendre, Adrien-Marie, 1752—1833) 法国数学家。1752年9月18日生于巴黎,1833年1月9日卒于同地。约1770年毕业于马扎兰学院。1775年任巴黎军事学院数学教授。1782年以《关于阻尼介质中的弹道研究》获柏林科学院奖金,次年当选为科学院院士。1787年成为伦敦皇家学会会员。主要从事数学分析、几何、数论以及天体力学研究,代表作为《行星外形的研究》(1784),给出处理特殊函数的"勒让德多项式",论述了该多项式的性质;《几何学基础》(1794),将几何理论算术化,代数化,详细讨论了平行公设问题,证明了圆周率π和π^2的无理性。该书在欧洲用作权威教科书达一个世纪之久;《数论》(1798—1830),论述了二次互反律及其应用,给出连分数理论及素数个数的经验公式等,使他成为解析数论的先驱者之一;《椭圆函数论》,提出三类基本椭圆积分,证明每个椭圆积分可以表示为这三类积分的组合,并编制了详尽的椭圆积分数值表,还引用若干新符号,使他成为椭圆积分理论的奠基人之一。其他贡献有:确定极值函数存在的"勒让德条件",创立并发展了大地测量理论(1787),提出球面三角形的有关定理,1805年独立发现高斯不久前使用过的最小二乘法原理等等。他常与拉格朗日、拉普拉斯并列为法国数学界的"三 L",为18世纪末19世纪初法国数学的复兴做出重要贡献。

傅立叶(Fourier, Jean Baptiste Joseph, 1768—1830) 法国数学家、物理学家。1768年3月21日生于欧塞尔,1830年5月16日卒于巴黎。9岁父母双亡,被当地教堂收养。12岁由一主教送入地方军事学校读书。17岁(1785)回乡教数学,1794到巴黎,成为高等师范学校的首批学员,次年到巴黎综合工科学校执教。

1798年随拿破仑远征埃及时任军中文书和埃及研究院秘书，1801年回国后任伊泽尔省地方长官。1817年当选为科学院院士，1822年任该院终身秘书，后又任法兰西学院终身秘书和理工科大学校务委员会主席。主要贡献是在研究热的传播时创立了一套数学理论。1807年向巴黎科学院呈交《热的传播》论文，推导出著名的热传导方程 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=R\frac{\partial v}{\partial t}$，并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函数都可以展成三角函数的无穷级数。1811年在修改后的论文《热在固体中的运动理论》中讨论了各种给定初始条件的情形，得到“傅立叶积分公式”等结果，一举赢得巴黎科学院的奖金(1812)、1822年又在代表作《热的分析理论》中解决了热在非均匀加热的固体中分布传播问题，成为分析学在物理学中应用的最早例证之一，对19世纪数学和理论物理学的发展产生深远影响。傅立叶级数(即三角级数)、傅立叶分析等理论均由此创始。其他贡献有：最早使用定积分符号，改进了代数方程符号法则的证法和实根个数的判别法等。

热尔岗(**Gergonne, Joseph-Diez, 1771. 6. 19—1859. 5. 4**) 法国数学家。生于南锡，卒于蒙彼利埃。早年参加法国大革命活动，先后在国民自卫军、反普鲁士志愿军中服务，1794年入沙隆炮兵学校。1795年任尼姆中央学校数学教授，1819年去蒙彼利埃大学，任数学和天文学教授，1830年任蒙彼利埃大学校长。热尔岗的数学研究深受蒙日的影响，他是近代射影几何学的创始人之一。热尔岗发现了射影几何的基本原理——对偶原理，他首先使用了“对偶”一词，并于1825—1826年间开始以平行的两栏形式发表一系列对偶的定理，突出了互为对偶的定理间的联系。另外，热尔岗在几何定理证明中强调了解析方法，这种解析观点开辟了几何学的新的发展方向。1810年，热尔岗创办了世界上最早的专业期刊《纯粹与应用数学年刊》，从创刊起陆续出版了约21卷。热尔岗在该刊上发表了论著共200多篇。

高斯(**Gauss, Carl Friedrich, 1777. 4. 30—1855. 2. 23**) 德国数学家、物理学家、天文学家。生于不伦瑞克，卒于格丁根。高斯是近代数学奠基者之一，在历史上影响之大，可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列。他幼年时就表现出超人的数学天才。1795年进入格丁根大学学习。第二年他就发现正十七边形的尺规作图法。并给出可用尺规作出的正多边形的条件，解决了欧几里德以来悬而未决的问题。1798年转入黑尔姆施泰特大学，1799年获博士学位。1807年以后一直在格丁根大学任教授。高斯的数学研究几乎遍及所有领域，在数论、代数学、非欧几何、复变函数和微分几何等方面都做出了开创性的贡献。他还把数学应用于天文学、大地测量学和磁学的研究，发明了最小二乘法原理。高斯的数论研究总结在《算术研

究》(1801)中，这本书奠定了近代数论的基础，它不仅是数论方面的划时代之作，也是数学史上不可多得的经典著作之一。高斯对代数学的重要贡献是证明了代数基本定理，他的存在性证明开创了数学研究的新途径。高斯在1816年左右就得到非欧几何的原理。他还深入研究复变函数，建立了一些基本概念并发现了著名的柯西积分定理。他还发现椭圆函数的双周期性，但这些工作在他生前都没发表出来。1828年高斯出版了《关于曲面的一般研究》，全面系统地阐述了空间曲面的微分几何学，并提出内蕴曲面理论。高斯的曲面理论后来由黎曼发展，高斯一生共发表155篇论文，他对待学问十分严谨，只是把他自己认为是十分成熟的作品发表出来。其著作还有《地磁概论》和《论与距离平方成反比的引力和斥力的普遍定律》(1840)等。

泊松(Poisson, Siméon-Denis, 1781. 6. 21—1840. 4. 25) 法国数学家、力学家、物理学家。生于卢瓦雷省皮蒂维耶，卒于巴黎。1798年进入巴黎综合工科学校，得到拉格朗日和拉普拉斯等人的赏识。1800年毕业留校工作。1806年成为教授。主要贡献是研究数学在力学和物理学中的应用。他所著《力学专论》在很长时间内是标准教科书。在天体力学方面，他研究了月亮和行星理论的有关问题，探讨了太阳系的稳定性并导出被干扰运动的微分方程，他的工作推广了拉格朗日和拉普拉斯的有关研究。在研究球体引力和引力方程的论文中，他导出著名的泊松方程。在数学物理中，他研究了各种热传导问题。他的专著《热学的数学理论》(1835)是这一领域研究成果的总结。他还解决了电学和磁学中的许多问题。是最早把位势理论移植到电磁学的学者之一。还研究了内弹道学和流体力学中的应用问题，奠定了偏差理论的基础。在弹性理论中，他利用分子间相互作用的理论导出弹性体的运动方程，给出了该方程的一般积分法，引入了所谓的"泊松常数"。泊松对概率论也有重要贡献。在1837年的论文《关于判断的概率之研究》中，提出了描述随机变量的泊松分布。泊松在纯粹数学方面也作出了许多贡献。在一般方程论中，他使用了自己独创的消元法；在级数论中，提出了发散级数的可和性理论；他在定积分和傅立叶级数方面的研究成果为狄利克雷和黎曼对该课题的研究开辟了方向。

波尔查诺(Bolzano, Bernard, 1781. 10. 5—1848. 12. 18) 捷克数学家、哲学家。生于布拉格，卒于同地。1796年入布拉格大学哲学院。1800年又进神学院，以后任该校宗教哲学教授。对数学和逻辑学甚感兴趣。他是19世纪将严格论证导入分析学的主要学者之一，对分析基础的建立做出了不可磨灭的贡献。1816年他建立了序列和级数收敛的正确概念，对极限、变量有较深入的理解。他在《纯粹分析的证明》(1817)一书中给出了函数连续性的恰当定义。后来他又正确地区别了连续性与可微性的差异，并在数学史上首次给出了无处可导的连续函

数的例子。波尔查诺对无穷理论的研究是康托尔集合论的前驱，其哲学意义比数学意义更大。可惜的是，波尔查诺的工作在当时并没有引起人们注意，他的著作《无穷的悖论》在他死后两年(1850)才发表出来。

贝塞尔(Bessel, Friedrich Wilhelm, 1784. 7. 22—1846. 3. 17) 德国天文学家、数学家。生于明登，卒于柯尼斯堡。15岁辍学到不来梅一家商行学徒，业余钻研天文、地理和数学。20岁时发表了彗星轨道测量的论文。1810年任新建的柯尼斯堡天文台台长，1812年当选为柏林科学院院士。主要贡献在天文学方面，以出版《天文学基础》(1818)为标志发展了实验天文学，还编制基本星表，测定恒星视差，预言伴星的存在，并导出了用于天文计算的贝塞尔公式。他的数学研究在常微分方程方面，由分离变量所得到的一类常微分方程叫作贝塞尔方程。贝塞尔对这类方程的解进行了系统研究，并由此引进了第一类和第二类贝塞尔函数，讨论了该函数的一系列性质及其求值方法，为解决有关的物理和天文问题提供了重要工具。贝塞尔在大地测量学方面也做出一定贡献，提出贝塞尔地球椭球体等观点。

庞斯列(Poncelet, Jean-Victor, 1788. 7. 1—1867. 12. 22) 法国数学家。生于法国梅斯，卒于巴黎。1810年毕业于巴黎综合工科学校，是著名几何学家蒙日的学生。1912年随拿破仑远征俄国，战败被俘。在监狱里，回忆、思考所学过的数学，创立了射影几何学。1814年获释。1822年整理出版了他在监狱里完成的《论图形的射影性质》一书。曾担任过梅斯炮兵工程兵学院和巴黎理学院教授，并任过巴黎综合工科学校校长。庞斯列首先提出研究图形经过任意中心射影保持不变的性质，其中最重要的概念是交比。为了使所得结果具有完全的普遍性，他引进“无穷远”元素。他研究了二次曲线和曲面的配极理论，并由此导致一般的对偶原理。此外，他还直观地讨论了一类图形在一定范围内连续变动时所保持的性质，并应用于虚元素。他的工作对19世纪数学的发展有重大的影响。

柯西(Cauchy, Augustin — Louis, 1789. 8. 21—1857. 5. 23) 法国数学家、力学家。生于巴黎，卒于索镇。1805年入巴黎综合工科学校学习，两年后转到桥梁工程学校，1809年成为工程师。1813年放弃工程师的职业，从事理论科学研究。1816年成为巴黎综合工科学校教授，并当选为法国科学院院士。1830年，查理十世被逐，柯西拒绝效忠新的国王，因此失去所有职务，并流亡国外。在此期间，曾任原国王查理十世的家庭教师。1848年恢复综合工科学校教授职务，并任巴黎大学教授。柯西在大学期间，就开始研读拉格朗日和拉普拉斯的著作。1811年解决了拉格朗日向他提出的问题：凸多面体的角是否由其面数所决定?第二年又给出了费马多角数问题的解答。柯西最重要的数学贡献在微积分学、复变函数和微分方程等方面。他发现并阐明了级数收敛准则和一些判别法，提出关于

极限理论的 ε—方法，把整个极限过程用不等式描述，后来经改进形成 $\varepsilon-\delta(\varepsilon-N)$ 方法沿用至今。他还给出了如今通用的函数连续性的概念，给出定积分的第一个确切定义，以及广义积分的定义等。在复变函数论方面，他系统地总结了复数理论，探讨了柯西-黎曼条件，建立了柯西积分定理和公式，还研究了留数定理。在微分方程方面，柯西深入考察了解的存在唯一性定理。偏微分方程中的柯西问题也是很出名的。他还利用傅立叶变换来研究线性偏微分方程。柯西在代数学方面也做了许多工作，他发现了行列式和矩阵的许多性质，以及二次型的正交变换方法，推广了鲁菲尼定理等。此外，柯西对力学和天文学也有许多贡献。著作甚丰，共出版了七部著作和800多篇论文，以《分析教程》(1821)和《关于定积分理论的报告》(1827)最为著名。1882年开始出版他的全集，至1970年已达27卷之多。

麦比乌斯（**Möbius，August Ferdinand，1790. 11. 17—1868. 9. 26**） 德国数学家、天文学家。生于瑙姆堡附近的休普福特。卒于莱比锡。三岁丧父后由叔父扶养成人。自幼偏爱数学。1809年入莱比锡大学学习法律。后改为理科，专修数学、物理学和天文学。1913年曾跟随高斯和普法夫学习天文和数学。1816年成为教授。1829年当选为柏林科学院通讯院士。1848年任莱比锡大学天文台台长。在天文学和数学方面都做出贡献。在数学方面，其代表作为《重心的计算》(1827)，该书引入了射影几何和仿射几何的若干基本概念和原理，讨论射影变换的一些性质，还为高维几何理论的创立作出大胆尝试。闻名数坛的“麦比乌斯带”是他最为奇妙的发现之一，是他在1858年应答巴黎科学院悬赏征答多面体几何理论时发现的。麦比乌斯奇妙的单侧性引起许多数学家的兴趣，它引导无数学者步入拓扑学的殿堂，对拓扑学的产生和发展起到重要作用。

皮科克（**Peacock，George，1791. 4. 9—1858. 11. 8**） 英国数学家。生于英格兰达林顿附近的登顿，卒于伊利。1809年入剑桥大学三一学院，1816年获硕士学位，1818年当选为英国皇家学会会员，1837年任剑桥朗廷几何与天文学教授，1939年获神学博士学位，并任伊利教长。皮科克的数学贡献主要在代数方面。1830年出版的《代数通论》一书试图概括算术的基本定律，并由此出发而赋予代数学类似于欧几里得几何那样的演绎结构。首先认识到代数学的纯粹符号特性，提出了“等价型的不变性原理”，推动了抽象代数的发展。他又是一位科学活动家。学生时代，就与巴贝奇等人共同创立剑桥分析学会，后来又是剑桥哲学会和不列颠科学促进协会的重要成员。他对19世纪英国数学的复兴起了积极作用。

罗巴切夫斯基（Лобачевский，Николай Иванович，**1792. 12. 1—1856. 12. 24**） 俄国数学家。生于下诺夫哥罗德(今高尔基城)，卒于喀山。1807年入喀山大学学习，1811年获博士学位并留校工作。1816年任副教授，1822年任教

授。还曾任物理数学系主任、图书馆馆长和喀山大学校长等职。罗巴切夫斯基是非欧几何学的创始人之一。他从1816年开始试作平行公设(欧几里得《几何原本》中的第五公设)的证明。他把全部几何命题按是否依赖于平行公设而分为两部分，不靠平行公设的那部分现通称为“绝对几何学”。他从绝对几何中的命题“在一个平面上，过直线 *AB* 外一点至少可作一条直线与 *AB* 不相交”出发，在严密的推导下得到一系列前后一贯的命题，由此构成了逻辑上无矛盾且与绝对几何不相冲突，但又与欧几里得几何不同的新几何体系。罗巴切夫斯称之为“虚几何学”，后人则称之为“罗巴切夫斯基几何学”。1826年他在喀山大学公开发表自己的新学说，但没有得到承认。以后他陆续用俄文、法文、德文发表自己的工作。他去世后，高斯对他的学说予以肯定，他的思想才逐渐被普遍接受。罗巴切夫斯基在无穷级数论、积分学和概率论等方面，也有出色的工作。他还是一位杰出的教育家和管理者，创立了喀山数学学派和喀山数学教育学派。代表作有《几何学基础》(1829—1830)、《平行线理论的几何研究》(1840. 德文)等。

格林(Green, George, 1793. 7. 14—1841. 3. 31) 英国数学家。生于英格兰诺丁汉郡，卒于剑桥。他长期在父亲经营的磨坊里工作，坚持自学数学。1833年他40岁时被推荐入剑桥大学。1837年获学士学位。格林的第一篇论文《数学分析在电磁理论中的应用》完成于1828年，但直到他去世后(1850)才由于W. 汤姆森的努力而发表。文中给出了著名的“格林函数”与“格林定理”，对位势论的发展起了奠基的作用。此外，格林的其他著作致力于用分析方法解决引力、水波、声音和光的传播以及弹性理论等问题，其中包含了许多宝贵的数学思想。格林的工作孕育了剑桥数学物理学派。

沙勒(Chasles, Michel, 1793. 11. 15—1880. 12. 18) 法国数学家。生于埃佩尔农，卒于巴黎。1812年入巴黎综合工科学校学习，1813年发表了关于单叶双曲面射影作图的文章。1837年他写了重要的数学史著作《几何方法的起源和发展的历史概述》。1841年，他任巴黎综合工科学校教授。1846年主持巴黎高等几何学讲座，不久便成为法国几何学派的代表人物，直到去世。沙勒利用几何方法研究确定代数问题的解的个数(1846)，开创了枚举几何学。他的重要著作《高等几何教程》(1852)，对法国、德国、和英国的教学有较大影响。以沙勒为中心的一批几何学家，用射影几何的方法，特别是利用“迷向”这个概念，论证了有关度量的一些几何问题。在数学史上他还考证出欧几里得被丢失的著作的内容与射影有关，引入了交比的概念。他一贯强调要以历史发展的眼光来观察数学上的创造。

拉梅(Lamé, Gabriel, 1795. 7. 22—1870. 5. 1) 法国数学家。生于图尔，卒于巴黎。1817年毕业于巴黎综合工科学校。后又入巴黎矿业学院就读。曾派往俄国修筑工路、桥梁。1832年回国，在综合工

科学校、巴黎大学任教。1851年成为教授。主要贡献在微分方程、微分几何、数论和函数论等方面。他特别把许多成果应用于数学物理领域。拉梅探讨偏微分方程的变换和求解，引入了新的曲线坐标系，把拉普拉斯方程变换成可解的常微分方程，该方程也称拉梅方程，其解称为拉梅函数或椭圆调和函数。他还首先考虑微分不变量问题。1839年证明了费马大定理当$n=7$时成立。他还对热力学，应用力学有研究，并应用于公路桥梁的建筑上。

施泰纳(**Steiner, Jakob, 1796. 3. 18—1863. 4. 1**)　瑞士—德国数学家。生于瑞士伯尔尼州的乌岑斯多夫，卒于伯尔尼。出身于小农家庭，14岁前没有受过教育。18岁时就学于瑞士著名教育家佩斯特劳兹的学校。后来，学校因经济困难停办，施泰纳于1818年到德国海德堡靠当家庭教师为生自修几何学。1822年入柏林大学学习。1832年获柯尼斯堡大学荣誉博士学位。1834年任柏林大学特任教授并进入柏林科学院。施泰纳是近代射影几何的奠基人。他的主要著作《几何图形相互依赖性的系统发展》(1832)深刻地讨论了对偶原理。他建立射影几何的严密系统，推广卡诺完全四边形的工作到空间多边形上去，完成了点列、线束、二次曲线及曲面的理论，讨论圆锥曲线和“帕斯卡六角形”的性质。由于他在几何方面的重要贡献，被誉为自阿波罗尼奥斯以来最大的几何学家。施泰纳推崇纯粹综合几何方法，强调几何直观，反对解析方法。这种几何中的“综合”与“解析”之争反映了当时几何学发展的水平及其局限性，同时也促进了几何学进一步的发展。

施陶特(**Staudt, Karl Georg Christian von, 1798. 1. 24—1867. 6. 1**)　德国数学家。生于德国罗滕堡，卒于埃尔朗根。1818—1822年在格丁根大学学习，1821年因计算慧星轨道受到高斯的赏识，并因此而获得埃尔朗根大学博士学位。1835年成为该校的教授，直到去世。他的重要著作《位置的几何学》(1847)以非常严密的方式解决了不依赖任何度量，完全独立地建立射影几何的体系问题。在《续论位置的几何学》(1857)中，他以精巧的方法给出虚元素的几何解释，并用尺规作出圆内接正十七边形。

普吕克(**Plücker, Julius, 1801. 6. 16—1868. 5. 22**)　德国数学家、物理学家。生于埃尔伯费尔德，卒于波恩。曾在波恩、海德堡、柏林和巴黎学习。1824年获马尔堡大学博士学位。1828年成为波恩大学特任教授。1834年为哈雷大学教授。1836年以后任波恩大学数学和物理学教授。1867年当选为法国科学院院士。他在几何学方面有重大贡献。他发展了解析几何的方法和技巧，追求几何作图与解析算式的完美结合，尽可能避免不必要的方程和计算。他运用了射影几何的代数方法，引进了最一般的齐次坐标；解析地阐述了对偶原理。他还引进了直线的坐标；讨论了平面上的一般的代数曲线，证明了著名的普吕克公式。他的主要著作有《解析几何的发展》、(1828, 1831)、《解析几何

系统》(1835)和《代数曲线理论》(1839)等。普吕克对物理实验很有兴趣,1847年发现了电气石晶体的磁现象;1857年,他探讨了稀薄气体中的放电过程;观察到气体放电的光谱。

奥斯特罗格拉茨基(Остроградский, Михаил Васильевич, **1801. 9. 24—1862. 1. 1**) 俄国数学家、力学家。生于帕先纳亚,卒于波尔塔瓦。早年在哈尔科夫大学学习。1822年留学法国,1828年回国。1830年当选为彼得堡科学院院士。曾在彼得堡科学院和许多高等学校任教。他是俄国理论力学学派的创始人和彼得堡数学学派的奠基者之一。其科学研究领域有分析学、理论力学、数学物理、概率论、数论和代数学等。他最重要的数学工作是在1828年研究热传导理论的过程中,证明了关于三重积分和曲面积分之间关系的公式(现称奥斯特罗格拉茨基—高斯公式)。1834年,他又把这一公式推广到n重积分的情形。还得到了二重积分与三重积分的变换公式;建立了有理函数的积分法——奥斯特罗格拉茨基方法;给出了非保守系统的一般变分原理的某些结果,并推广到变分学的一般等周问题;引进了共轭算子的概念;证明了某些算子特征函数系的正交性。在力学方面,他对球形射弹的飞行进行了大量的理论研究和实验,提出了偏心射弹在空中运动的微分方程。还研究了天体力学和分析力学,首次证明了关于可能位移原理和最小作用原理的广义定理。

阿贝尔(**Abel, Niels Hanrik, 1802. 8. 5—1829. 4. 6**) 挪威数学家。生于芬岛,卒于弗鲁兰。15岁时优秀的数学教师霍尔姆博发现了阿贝尔的数学天才,对他给予指导。1821年阿贝尔进入克里斯蒂安尼亚大学。1824年,他解决了用根式求解五次方程的不可能性问题。这一论文也寄给了格丁根的高斯,并未引起重视。1825年,他去柏林,结识了克雷尔。他与施泰纳建议克雷尔创办了著名数学刊物《纯粹与应用数学杂志》。这个杂志头三卷发表了阿贝尔22篇包括方程论、无穷级数、椭圆函数论等方面的论文。阿贝尔在欧州大陆没有谋到合适的职位,1827年他贫困交迫地回到了挪威。一年以后,不到27岁的阿贝尔就病逝。他去世的第二天,克雷尔来信通知他被柏林大学任命为教授。阿贝尔和雅可比是公认的椭圆函数论的创始人。阿贝尔发现了椭圆函数的加法定理、双周期性、并引进了椭圆积分的反演。此外,在交换群、二项级数的严格理论、级数求和等方面都有巨大的贡献。这些工作使他成为分析学严格化的推动者。

波尔约(**Bolyai, János, 1802. 12. 15—1860. 1. 27**) 匈牙利数学家。生于克劳森堡,卒于毛罗什—瓦萨尔海伊。其父F. 波尔约是一位保守的数学教授,在格丁根大学学习时,与高斯是同学,后结为密友。波尔约少年时期在他父亲指导下学习高等数学。1818—1822年在维也纳皇家工程学院学习,毕业后曾到部队任职,1933年退伍。波尔约是非欧几何的创始人之一。早在大学期

间，他就醉心于平行线理论的研究，很快就发现证明欧几里得平行公设是不可能的、因而决心创立新的几何学。他父亲得知后，曾以自己失败的教训劝阻他，他不顾父亲的劝阻，坚持研究，终于在1823年得到了非欧几何的基本原理。他把自己的发现写成论文，附在其父写的一部初等数学之后发表，该论文标题很长，简称《附录》，共26页，内容十分简洁和概括，是一个完整的、无矛盾的非欧几何体系。1832年，他把《附录》寄给高斯，没有引起高斯的重视，这对波尔约无疑是一个重大打击。波尔约生前并没有享受到应有的荣誉。他还曾致力于复数理论的研究，预言了哈密顿的虚数表示法。1894年，匈牙利数学会在波尔约的墓前竖立了他的石像。1960年，世界和平理事会举行了波尔约逝世一百周年纪念仪式，并建议设立一种波尔约数学奖。他的《附录》一文已被列入世界第一流的科学经典与世长存。

斯图姆（**Sturm，Charles — Francois，1803. 9. 23—1855. 12. 18**）　瑞士—法国数学家。生于日内瓦，卒于巴黎。曾在日内瓦学院学习。毕业后任家庭教师。不久投身于巴黎科学界。1827年他同科拉东因研究不可压缩流体的论文而获巴黎科学院大奖。1829年，解决了自笛卡尔时代以来数学家们关心的一个问题——在变量的给定范围内确定实系数代数方程的实根数。1833年入法国籍。同年，首次考虑了数学物理中出现的二阶常微分方程的特征值与特征函数问题，后与法国数学家J. 刘维尔合作得到若干重要结果。1840年成为巴黎综合工科学校分析与力学教授。先后被选为柏林科学院、彼得堡科学院、巴黎科学院院士，英国皇家学会会员。斯图姆在射影几何、曲线和曲面的微分几何以及几何光学方面也有重要工作。

雅可比（**Jacobi，Carl Gustav Jacob，1804. 12. 10—1851. 2. 18**）　德国数学家。生于波茨坦，卒于柏林。他自幼聪慧，12岁入大学预科学习。1825年获柏林大学哲学博士学位，1832年成为柯尼斯堡大学教授。他同天文学家、数学家贝塞尔、物理学家诺伊曼三人成为复兴德国数学的核心。他在数学方面突出成就是和挪威数学家阿贝尔相互独立地奠定了椭圆函数论的基础，代表作为《椭圆函数论新基础》(1829)。他对行列式理论也作了奠基性的工作，给出了函数行列式求导公式。他引进了"雅可比行列式"，提出这些行列式在多重积分的变量变换和解偏微分方程中的作用。他的工作还包括代数学、变分法、复变函数论、微分方程和数学史等方面。他善于把不同的数学分支连通起来研究。他不仅把椭圆函数论引进数论研究中，得到了同余论和型的理论的一些结果，还引进到积分理论中。而积分理论的研究又同微分方程的研究相关联。

1842年雅可比移居柏林，被选为柏林科学院院士、伦敦皇家学会会员。

布尼亚科夫斯基（**Буняковский，Виктор Яковлевич，1804. 12. 16—1889. 12.**

12） 俄国数学家。生于巴尔。早年受到良好的家庭教育。1820—1825年到欧洲留学，1825年获博士学位。先后在第一武备中学、海军学校、交通道路学院和彼得堡大学任教。1830年当选为彼得堡科学院院士，1864—1889年任该科学院副院长。1858年以后还兼任沙俄政府统计和保险问题的总监。布尼亚科夫斯基的科学活动范围广泛并且成效显著。他共发表科学论文168篇。内容涉及数论、概率论及其应用、数学分析、几何学和代数学等领域。在数论方面，他对叠合、相关性二次定律的研究在俄国科学界发生过较大影响。对概率论的贡献是他最重要的科学成就。他的专著《概率论的数学基础》有力地促进了概率论在俄国的发展和应用。在数学分析中，他独立地发现了后来以施瓦兹命名的著名不等式。他还为俄国数学教育作出了重要贡献，编著了一系列高等和初等数学教科书。他还改进过俄国算盘的式样。他是当时俄国所有大学和许多科学学会的荣誉成员。布尼亚科夫斯基去世后，彼得堡科学院设立了以他的名字命名的优秀数学著作奖。

狄利克雷（Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1805. 2. 13—1859. 5. 5） 德国数学家。生于迪伦，卒于格丁根。早年在法兰西学院和巴黎理学院学习，并担任法国著名将领费伊的家庭教师。1826年回国，先后任教于布雷斯劳大学和柏林军事学院。1828年以后一直在柏林大学任教，1839年升任教授。1855年受聘为格丁根大学教授，接替高斯的职位。他是普鲁士科学院院士和伦敦皇家学会会员。狄利克雷对19世纪数学发展有重要贡献。他是解析数论的创始人之一，同时在数学分析和数学物理等方面也做了大量卓有成效的工作。他是最早倡导分析严格化方法的数学家之一。1829年得到给定函数$f(x)$的傅立叶级数收敛的第一个充分条件。后来他提出函数关系$y=f(x)$是x与y之间的一种对应的现代观念。在数论方面，他著有《数论讲义》（1863），对高斯的《算术研究》作出清楚的解释并有自己的独创。在他1837年的论文中，首次使用了现称为狄利克雷级数的$\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-z}$（$a_n$，$z$为复数）。证明了在任何算术序列$\{a+nb\}$（其中$a$与$b$互素）中，必定存在无穷多个素数。这就是著名的狄利克雷定理。在数学物理方面，他修改了高斯关于位势理论的一个原理，引入所谓狄利克雷原理，还论述了著名的第一边值问题（现称狄利克雷问题）及其应用。他的主要论文收在《狄利克雷论文集》（1889—1897）中。

哈密顿（Hamilton, William Rowan, 1805. 8. 3—1865. 9. 2） 英国数学家、物理学家。生于爱尔兰都柏林，卒于都柏林附近的敦辛克天文台。早年受到良好的家庭教育。5岁开始学习外语，到14岁时学会了多种欧洲语言。13岁对数学发生兴趣，自学了克莱罗、牛顿和拉普拉斯等人的著作。1823年入都柏林三一学院学习。1827年应聘为三一学院天文学教授，同时获得爱尔

兰皇家天文学家的称号。1827 年定居都柏林附近的敦辛克天文台，从此潜心钻研数理科学。1835 年获得爵位。1837 年当选为爱尔兰皇家科学院院长。他还是英国皇家学会会员和其他国家科学院成员。哈密顿对分析力学的发展作出了重要贡献。他首先建立了光学的数学理论，然后把这种理论移植到动力学中去。他在 1834 年的论文中，提出了著名的“哈密顿原理”，即用一个变分式推出各种动力学定律。他把广义坐标和广义动量作为典型变量来建立动力学方程——哈密顿典型方程。他还建立了与系统的总能量有关的哈密顿函数，这些工作推动了变分法和微分方程理论的进一步研究，在现代物理中得到广泛应用。哈密顿在数学上的主要贡献是发现了“四元数”。他在研究复数 $x+iy$ 的基础上试图建立三维“复数”，未获成功，最终导致(1843)他考虑具有四个分量的新数 $t+xi+yj+zk$，并称之为四元数，建立了它的运算法则。四元数的发现为向量代数和向量分析的建立奠定了基础，而四元数系又构成了以实数域为系数域的有限维可除代数，因此对代数学的发展具有重要意义。他最重要的数学著作是《四元数讲义》(1853)。

德·摩根(**De Morgan, Augustus, 1806. 6. 27—1871. 3. 18**)　英国数学家、逻辑学家。生于印度马都拉，卒于伦敦。早年在剑桥大学三一学院求学，1828 年由他的老师皮科克等人推荐任伦敦大学学院数学教授，1831 年辞职，1836—1866 年继任该职。他积极参加伦敦数学会的工作，并于 1835 年任第一任会长。主要贡献在分析学、代数学、逻辑学和数学史等方面，他的工作对 19 世纪数学产生了相当的影响。在分析学中，他给出了一种确定无穷级数收敛性的法则；在代数学方面，他提出的“双重代数”有助于建立复数性质的几何表示。他的最大贡献在逻辑学方面，他发展了一套适合推理的符号，并提出关系逻辑，他建立的德·摩根定律尤为著名，成为后来布尔代数的先声。代表作为《形式逻辑》(1847)。他还精通数学史，写过牛顿和哈雷的传记，刊行了 17 世纪科学家的通讯录索引。还最早试图解决四色问题，并作了某些推进。德·摩根 1835 年所著的代数学教科书 1859 年由中国数学家李善兰和英人伟烈亚力译成中文，定名为棣么甘《代数学》，这是我国第一本代数学书。另有应用概率论方面的著述。

刘维尔(**Liouville, Joseph, 1809. 3. 24—1882. 9. 8**)　法国数学家。生于圣奥梅尔，卒于巴黎。1830 年毕业于法国道路与桥梁工程学院。1836 年获博士学位。先后在巴黎综合工科学校、法兰西学院、巴黎大学等校任数学分析和理论力学教授。1839 年当选为巴黎科学院院士。他还是伦敦皇家学会和彼得堡科学院的成员。刘维尔的首要贡献是在 1836 年创办了著名的法文杂志《纯粹与应用数学杂志》，并连任 40 年主编。该杂志刊登过许多著名数学家的优秀论文，例如在 1846 年首次刊出当时鲜为人知的伽罗瓦关于群论的不朽论文。因此该杂志

常被誉为《刘维尔杂志》,它为 19 世纪法国数学的发展起了重要作用。刘维尔本人的科学研究兴趣十分广泛,他发表了近 400 篇论著涉及数学和物理学的十几个分支。在函数论方面,他把椭圆函数视为复变数的双周期函数,建立起椭圆函数的一套理论。他建立了解析函数一般理论中的"刘维尔定理":平面上任何有界的整函数恒等于常数。在微分方程方面,他与斯图姆合作开创了微分方程边值问题的研究方向,指出某些微分方程的解可以通过求解相应的积分方程得到,利用发散级数求解的近似值等。他还第一次证明了超越数的存在,并对超越数进行了分类。

格拉斯曼(**Grassmann, Hermann Günther, 1809. 4. 15—1877. 9. 26**) 德国数学家。生于斯德丁(今属波兰),卒于同地。1831 年在柏林学习神学,后来自学物理、数学和拉丁语,还熟练掌握了印度梵文。1836 年后回乡任中学教师,业余时间进行科学研究。他的代表作《线性扩张论》(1844)首次提出关于多维欧氏空间理论的系统学说,引入矢量的一般运算,建立了格拉斯曼代数和格拉斯曼流形的结构。此外,他与哈密顿同时分别建立超复数理论,开创了张量分析研究。他的另一著作《算术教本》对算术的基础作了科学论述,并讨论无理数的基本理论。此外格拉斯曼兴趣广泛,对电学、声学、植物学和语言学等都有论述。特别地,当他的数学成就长期不得承认时,于 19 世纪 50 年代开始研究语言学,在比较语言学上有重要成就。他编纂的《吠陀经词典》(1873—1875)至今仍广泛使用。

库默尔(**Kummer, Ernst Eduard, 1810. 1. 29—1893. 5. 14**) 德国数学家。生于索拉马,卒于柏林。1828 年入哈雷大学学习,1831 年获博士学位,后在中学教书。1842 年受聘为布雷斯劳大学教授。1855 年任柏林大学教授,同年转柏林科学院院士。1863—1878 年担任柏林科学院物理数学部的终生秘书。1868—1869 年任柏林大学校长。在数论、几何学、函数论、数学分析和方程论等方面都有较大贡献。他研究费马大定理,创立了比定理本身更重要的理想数理论。这不但使他证明了当 $p<100$(除 37、59、67)外费马大定理成立,而且为代数学、函数论和方程论等学科提供了一个新的有效工具。库默尔还探讨半直线系理论,发现了所谓库默尔曲面;研究了超几何级数,第一个计算单值群。他发明的级数变换法在级数计算中有广泛应用。

伽罗瓦(**Galois, Évariste, 1811. 10. 25—1832. 5. 31**) 法国数学家。生于布拉伦,卒于巴黎。幼时受到良好的家庭教育。1827 年开始自学勒让德、拉格朗日、高斯和柯西等人的论著,不久遇到数学教师里夏尔,他很快发现了伽罗瓦的数学才能,在他的指导下,伽罗瓦开始了数学研究。1828—1830 年,得到许多后来称为"伽罗瓦理论"的重要结果。1830 年进入高等师范学校学习,由于参加政治斗争被学校除名,并两次入狱。1832 年 5 月,由于政治和爱情的纠葛在一次决斗中被

打死。伽罗瓦是近世代数的创始人之一。他深入研究了一个方程能用根式求解所必须满足的本质条件，建立了方程的根的“容许”置换。这些置换通过添加方程的根的域构成了自同构群。他得到了代数方程能用根式求解的充分必要条件是自同构群可解。他提出的“伽罗瓦域”、“伽罗瓦群”和“伽罗瓦理论”都是近世代数所研究的最重要的课题。他的工作是19世纪数学中最杰出的成就之一。但是伽罗瓦生前并未获得应有的荣誉。他在1829—1831年三次投到巴黎科学院的论文均被遗失或退回。在决斗前夕，他给朋友夏瓦利叶写了一封信，请求他把论文公诸于世，但没引起人们注意。直到1846年，伽罗瓦的附有刘维尔注释的手稿才公开发表。1870年，若尔当在其著作《置换与代数方程论》中对伽罗瓦理论作了长篇论述。从此，伽罗瓦的工作才被完全理解。

西尔维斯特(Sylvester, James Joseph, 1814.9.3—1897.3.15) 英国数学家。生于伦敦，卒于同地。曾就读于剑桥约翰学院。1838年任伦敦的大学学院教授。1841年受聘任美国弗吉尼亚大学数学教授，几个月后辞职。1845年返回伦敦。1846年进入内殿法学会，1850年成为律师。1855—1870年任伍利芝皇家陆军军官学校数学教授。1859年被选为皇家学会会员。1876年任美国巴尔的摩、约翰·霍普金斯大学数学教授。1883年返回英国，任牛津大学几何学的萨维尔教授。西尔维斯特的贡献主要在代数学方面。他同A·凯莱一起，发展了行列式理论，创立了代数型的理论，共同奠定了关于代数不变量的理论基础，他在数论方面也作出了突出的工作，特别是在分析学和丢番图分析方面。他一生发表了几百篇论文，著有《椭圆函数专论》(1876)一书。西尔维斯特是《美国数学杂志》的创始人，为发展美国数学研究作出了贡献。

外尔斯特拉斯(Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm, 1815.10.31—1897.2.19) 德国数学家。生于德国威斯特伐利亚的小村落奥斯滕费尔德，卒于柏林。曾在波恩大学学习法律和财政，1938年转学数学。1854年，根据他的学术成就，柯尼斯堡大学授予他名誉博士学位。1856年由库默尔推荐成为柏林大学助理教授，1865年升为教授。生前，他的研究结果大都是向学生讲授传播的。19世纪90年代，他出版了《著作集》。外尔斯特拉斯的主要贡献在数学分析、解析函数论、变分学、微分几何和线性代数等方面。他是把严格的论证引进分析学的一位大师。他的批判精神对19世纪数学产生很大影响。他在严格的逻辑基础上，建立了实数理论，用递增有界序列来定义无理数，给出了数集的上、下极限、极限点和连续函数等严格定义。还构造了一个著名的处处不可微的连续函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$$

$(0<a<1, ab>1+\frac{3}{2}\pi, b$ 为奇数)，为分析学的算术化作出重要贡献。完成了由柯西引进的用不等式描述

的极限定义(所谓 $\varepsilon-\delta$ 定义)。在解析函数论中,外尔斯特拉斯也有重要贡献。他建立了解析函数的幂级数展开定理和多元解析函数基本理论,得到代数函数论及阿贝尔积分中的某些结果。在变分法中,他给出了带有参数的函数的变分结构,研究了变分问题的间断解。在微分几何中,他研究了测地线和最小曲面。在线性代数中,建立了初等因子理论并用来化简矩阵。他还是一位杰出的教育家,一生培养了大批有成就的数学人才,其中著名的有柯瓦列夫斯卡娅、施瓦兹、米塔-列夫勒、朔特基、富克斯等。

布尔(**Boole, George, 1815. 11. 2—1864. 12. 8**) 英国数学家、逻辑学家。生于英国林肯,卒于科克。早年接受父亲的教育,学习数学和拉丁文,又自学希腊文等。因家境窘迫,1831 年 16 岁时就开始从教,同时利用业余时间钻研数学。1841 年开始发表论文。布尔最大的贡献是创立了逻辑代数,他的工作给 19 世纪数学带来新的转机,并成为后来计算机理论的基础。为纪念他的功绩,人们称这一新学科为"布尔代数"。1847 年他发表第一本有关论著《逻辑的数学分析》,阐明了语言符号化的基本思想。经过几年的实践修改,又于 1854 年出版了逻辑代数的代表作《思维规律的研究》,系统地归纳了这一新兴理论。布尔利用代数语言使逻辑推理更简洁清晰,从而建立起一种所谓逻辑科学,其方法不仅使数学家耳目一新,也使哲学家大为叹服。他为逻辑代数化作出了决定性的贡献,他所建立的理论随着电子计算机的问世而得到迅速发展。他还把多年的教学经验汇编成教科书《微分方程》(1859)和《差分演算》(1860)等。1857 年布尔当选为伦敦皇家学会会员,不久荣膺该会皇家奖章。

斯托克斯(**Stokes, George Gabriel, 1819. 8. 13—1903. 2. 1**) 英国物理学家、数学家。生于爱尔兰的斯莱戈郡,卒于剑桥。1831～1841 年在剑桥大学彭布罗克学院学习。1849～1903 年任剑桥大学卢卡斯数学教授。1851 年当选为皇家学会会员。1854～1885 年任皇家学会秘书。1885～1890 年任皇家学会会长。

斯托克斯是 19 世纪英国剑桥数学物理学派的重要代表人物之一。他系统地探讨了求解重要物理问题的有效的和一般的数学新方法。他在 1845 年独立于法国力学家纳维导出了著名的粘性流体运动方程,现被称为"纳维-斯托克斯方程"。他计算过光学中出现的广义积分的值。1857 年他在复平面 Z 中解方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}-gzw=0$$

而引出了有名的斯托克斯现象与斯托克斯直线。斯托克斯的科学论文基本上都收录在《数学物理学论文集》五卷中。

切比雪夫(**Чебышев, Пафнутий Львович, 1821. 5. 26—1894. 12. 8**) 俄国数学家、力学家。生于奥卡多沃,卒于彼得堡。1841 年毕业于莫斯科大学并获银质奖章。1849 年获博士学位。1850

年任彼得堡大学教授。1859年被选为彼得堡科学院院士。他还是许多国家科学院的外籍院士和学术团体成员。1890年荣获法国荣誉团勋章。

切比雪夫是彼得堡数学学派的创始人，他在许多数学领域及其邻近学科都作出重要贡献，并注重理论联系实际。在数论方面，从本质上推进了素数分布问题的研究。证明了不超过 x 的素数个数函数 $\pi(x)$ 满足不等式

$$0.92129\frac{x}{\ln x}<\pi(x)\leqslant 1.10555\frac{x}{\ln x}$$

还证明了对任一自然数 $n(n>3)$，在 n 与 $2n-2$ 之间至少有一素数。此外，他研究了用有理数逼近实数的问题，发展了丢番图逼近理论。他的工作为数论研究开辟了新方向。在概率论方面，切比雪夫建立了证明极限定理的新方法——矩法，用初等的方法证明了一般形式的大数定律，研究了独立随机变量的和函数的收敛条件，证明了这种和函数可以按 $n^{-\frac{1}{2}}$ 的方幂渐近展开（n 为变量的个数）。他的贡献使概率论的发展进入新阶段。他在数学分析方面也作了大量的工作，研究了无理函数的可积性，解决了有限形式下椭圆积分问题，证明了著名的微分二项式可积性条件定理。对正交多项式理论和内插法理论也作出了贡献。他还研究了用多项式、三角函数和有理函数逼近连续函数的问题。切比雪夫去世后，先后出版了他的论文集（1899～1907）、全集（1944～1951）和选集（1955）。

凯莱（Cayley，Arthur，1821.8.16—1895.1.26） 英国数学家。生于里士满，卒于剑桥。17岁考入剑桥大学三一学院，毕业后留校讲授数学，几年内发表论文数十篇。1846年转攻法律学，三年后成为律师，工作卓有成效。任职期间仍利用业余研究数学，并结识数学家西尔威斯特。1863年应邀返回剑桥任数学教授。他得到牛津大学、都柏林大学和莱顿大学的名誉学位。1859年当选为伦敦皇家学会会员。凯莱和西尔威斯特同是不变量理论的奠基人。他首创代数不变式的符号表示法，给代数形式以几何解释，然后再用代数观点去研究几何学。他第一次引入 n 维空间概念，详细讨论了四维空间的性质，为复数理论提供佐证，并为射影几何开辟了道路。他还首先引入矩阵概念以化简记号，规定了矩阵的符号及名称，讨论矩阵性质，得到凯莱-哈密顿定理，因而成为矩阵理论的先驱。他的矩阵理论和不变量思想产生很大影响，特别对现代物理的量子力学和相对论的创立起到推动作用。凯莱一生仅出版一本专著《椭圆函数初论》（1876），但发表了近一千篇论文，其中一些影响极为深远。

埃尔米特（Hermite，Charles，1822.12.24—1901.1.14） 法国数学家。生于洛林，卒于巴黎。1842年入巴黎综合工科学校学习。1848年任该校辅导教师。1856年被选为法国科学院院士。1869年成为巴黎综合工科学校和巴黎理学院教授。他还是彼得堡科学院的名誉院

士。他的主要工作是：证明了 e 的超越性及用椭圆函数解一般五次方程。他对特殊函数论、数论、高等代数、数学分析等都有重要贡献。有许多以他名字命名的成果，如埃尔米特型、埃尔米特多项式、埃尔米特矩阵。他的主要著作收集在 4 卷本的《埃尔米特著作集》(1905～1917)中。

艾森斯坦(**Eisenstein，Ferdinand Gotthold Max，1823. 4. 16—1852. 10. 11**) 德国数学家。生于柏林，卒于同地。中学时就独立进行数学研究。1843 年入柏林大学，受到洪堡、克雷尔等人的重视，1844 年一年之内在克雷尔杂志上发表 25 篇论文。1845 年布雷斯劳大学授予他荣誉博士称号。1851 年由高斯推荐，当选为格丁根学会的通讯会员。艾森斯坦主要贡献是在数论及椭圆函数论方面。早期工作涉及三次、四次及高次互反律、三元二次型。后来研究椭圆函数论。艾森斯坦级数是研究模形式和模函数的重要工具。他的多项式不可约判别法是这方面的重要成果。晚年他研究三次型。他的著作收集在《数学著作集》(1975)中。

贝蒂(**Betti，Enrico，1823. 10. 21—1892. 8. 11**) 意大利数学家。生于皮斯托亚，卒于比萨。幼年丧父，在母亲的教育下长大。早年在比萨大学求学，获得物理学和数学学位。参加过意大利独立战争，以后任比萨大学教授兼校长。曾任下院议员和参议员。贝蒂把伽罗瓦理论与鲁菲尼及阿贝尔的工作联系起来，得到了若干代数方程可解性的重要结果，为古典代数学向抽象代数学发展做出了贡献。他在拓扑学方面也有重要工作，法国数学家庞加莱引进“贝蒂数”(一种重要的拓扑不变量)这一概念来纪念他。贝蒂在数学物理方面也取得一定成就，弹性理论中的互反定理称为贝蒂定理(或麦克斯韦-贝蒂定理)。贝蒂对函数论特别是椭圆函数也颇有研究。

克罗内克(**Kronecker，Leopold，1823. 12. 7—1891. 12. 29**) 德国数学家。生于利格尼茨，卒于柏林。1841 年入柏林大学，1845 年获博士学位。曾一度在家乡经营农场，1853 年重返数学界。1861 年被选为柏林科学院院士。1883 年受聘为柏林大学教授。1884 年当选为英国皇家学会会长。他还是法国科学院和彼得堡科学院外籍院士。主要贡献在数论、代数学、函数论、拓扑学等方面。他努力统一数论、代数学和分析学的研究。他发展了库默尔的“理想数”理论，讨论了扩张域的数学结构，引入了未定量和模系的概念。他发现有理数域的任一阿贝尔扩张一定是一分圆域的子域，并提出著名猜想(即克罗内克的青春之梦)：椭圆函数具有复数乘法的模方程与虚二次域的阿贝尔扩张有类似性。他深入探讨椭圆模函数理论，并用它解出了一般的 5 次方程。他还提出研究代数曲线的重要方法。在数学基础的大论战中，他是直觉主义数学流派的代表人物之一，他曾激烈反对过外尔斯特拉斯和康托等人的观点，主张数学的算术化。他的数学观对后世

有极大影响。他的一句名言是:“上帝创造了整数,其他一切都是人为的。”

黎曼(**Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 1826. 9. 17—1866. 7. 20**) 德国数学家。生于丹嫩贝格,卒于意大利马焦雷湖畔。1846年入格丁根大学学习哲学和神学,不久转向数学,成为高斯晚年的学生。1847年后曾到柏林就读,在那里受到狄利克雷、雅可比、施泰纳和爱森斯坦等数学家的影响。1850年回到格丁根。1851年以《单复变函数的一般理论基础》一文获博士学位。1854年成为格丁根大学讲师,并发表了著名的就职演说《关于几何基础的假设》。1859年接替狄利克雷的教授职务,同年当选为德国科学院院士。黎曼是19世纪极富创造性的数学家之一。在复变函数论、傅立叶级数、几何学基础、素数分布等方面都有重要贡献。在他的博士论文中,把单值解析函数推广到多值解析函数,用拓扑学方法研究复变函数论,发展成黎曼曲面论。他的工作为19世纪复变函数论的全面发展奠定了基础。黎曼在1854年的就职论文《关于用三角级数表示函数的可能性》中,讨论了函数的傅立叶级数及其收敛性问题,并举例阐明函数的连续性与可微性之间的区别。他的就职演说已成为著名的历史文献,其中发扬了高斯关于曲面的微分几何研究,阐述了曲率和流形的概念,建立了黎曼空间的概念,为几何学开拓了更广阔的研究领域——黎曼几何学,这些工作后来成为广义相对论的数学基础。1859年,黎曼在德国科学院院刊上发表了题为《论小于给定数的素数个数》,文中研究了黎曼-ζ函数,并将素数分布问题归结为对该函数的研究,提出了关于黎曼-ζ函数的6个猜想,包括著名的黎曼猜想:$\zeta(s)$的全体非平凡零点都位于$\sigma=\frac{1}{2}$直线上(见黎曼猜想)。黎曼广泛使用解析函数的工具研究数论,开创了解析数论这一新的分支。此外,他在阿贝尔函数、积分论、椭圆函数论、超几何级数微分方程等许多方面都有成就。在数学物理方面也发表了一些创造性的论文。

康托尔, M. B.(**Cantor, Moritz Benedikt, 1829. 8. 23—1920. 4. 9**) 德国数学家、数学史家。生于曼海姆,卒于海德堡。曾在格丁根和柏林向高斯、狄利克雷等名家学习。1851年获博士学位。1860年开设数学史讲座。1877年任海德堡大学数学教授。他最重要的著作是四卷本的《数学史讲义》(1880—1908),这部专著全面、科学地阐述了数学发展的历史,已成为这门学科的经典著作。此外,他在《德国人物传》等杂志上发表了一系列数学家传记和科学史以及纯粹数学方面的论文。著作还有《数学对人类文化生活的贡献》(1863)等。

克里斯托费尔(**Christoffel, Elwin Bruno, 1829. 11. 10—1900. 3. 15**) 德国数学家。生于蒙茹瓦,卒于斯特拉斯堡。早年曾在柏林大学受教于狄利克雷,1856年获博士学位。1862年任苏黎世工学院数学教授。1872年转教于斯特拉

斯堡大学，他是黎曼微分几何理论的追随者，1869 年给出两个 n 元变量的 P 阶代数形式等价的充分必要条件，并为此引入"克里斯托费尔符号"。他在 1877 年对不连续曲面的研究，是冲击波理论的早期工作。1800 年他得到"黎曼曲面上第一类线性独立积分类数等于亏格 P"的结论等。这些成果使他成为微分不变量的创始人之一。此外，他在复变函数的保形映射方面也有贡献。他还是一位优秀教师，曾在斯特拉斯堡为开办新型大学而努力。

戴德金（**Dedekind，Julius Wilhelm Richard，1831. 10. 6—1916. 2. 12**） 德国数学家。生于不伦瑞克，卒于同地。早年在格丁根大学求学，是高斯的得意门生。1852 年获博士学位。1854 年留校任教，与狄利克雷和黎曼结为好友。1858—1862 年应邀任瑞士苏黎世综合工科学校教授。1862 年返回家乡，在不伦瑞克综合工科学校执教，直至逝世。戴德金是格丁根、柏林、巴黎、罗马等科学院的成员，还被欧洲几所大学授予荣誉博士称号。主要贡献在实数理论和代数数论方面。1872 年，他提出用所谓"戴德金分割"来定义无理数，并对连续性理论进行深入研究，为实数理论的建立做出了不可磨灭的贡献。在代数数论方面，他建立了现代代数数和代数数域的理论。他的代数数理论是高斯的复整数和库默尔代数数的一般化，后来他又用另一种方法重建代数数中的唯一因子分解定理。他深入研究各种代数结构，特别引入环的概念，给出理想子环的一般定义，后来把满足理想唯一分解条件的整环称作戴德金环。他在代数数论方面的工作对 19 世纪数学产生了深远影响。他最著名的著作有《连续性与无理数》(1872)和《数的意义》(1888)等。他还编辑了狄利克雷和黎曼的全集。

杜布瓦—雷蒙（**Du Bois-Reymond，Paul David Gustav，1831. 12. 2—1889. 4. 7**） 德国数学家。生于柏林，卒于弗赖堡。早年在苏黎世大学攻读医学，后到柯尼斯堡大学学习数学和物理。1859 年获博士学位。主要贡献在微分方程和实变函数论方面。他将蒙日的特征线思想从二阶偏微分方程推广到 n 阶的情形。1868 年他给出并证明了定积分中值定理。还系统地研究了任意函数展开为傅立叶级数及该级数的收敛性问题，首先提出了连续函数的傅立叶级数可能发散的思想。在《一般函数论》(1882)中，提出容量概念即测度概念的雏型，广泛地讨论了函数理论的基本概念。1873 年他给出一个在已知区间上连续但没有导数的函数的例子并作了证明。

诺伊曼（**Neumann，Carl Gottfriedvon，1832. 5. 7—1925. 3. 27**） 德国数学家、理论物理学家。生于柯尼斯堡，卒于莱比锡。早年在柯尼斯堡大学求学，1855 年获博士学位。先后在哈雷大学(1863)、巴塞尔大学(1864)、蒂宾根大学(1865)和莱比锡大学任教(1868—1911)。主要成就在偏微分方程、常微分方程、积分方程和函数论等方面。他特别对偏微分方程边值问题有深入研

究，首创解决狄利克雷问题的算术平均法。他还考察了复式拉普拉斯边界问题，位势论中第二边值问题就以他的名字命名。他首创"对数位势"的概念。发展了代数函数的黎曼理论。1868年，他与克莱布什共同创办了德国数学杂志《数学年刊》。

利普希茨（**Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund, 1832. 5. 14—1903. 10. 7**） 德国数学家。生于柯尼斯堡，卒于波恩。1847年入柯尼斯堡大学，1853年获柏林大学博士学位，1846年起任波恩大学教授。先后当选为巴黎、柏林、格丁根、罗马等科学院的通讯院士。利普希茨在数论、贝塞尔函数论、傅里叶级数论、常微分方程、分析力学、位势理论及微分几何等方面都有贡献。1873年，提出了著名的"利普希茨条件"，对柯西提出的微分方程初值问题解的存在唯一性定理作出改进。在微分几何方面，他自1869年起对黎曼关于n维流形的度量结构的工作作出进一步阐述和推广。取得了开创性的成果。他还是最早使用共变微分研究微分不变量的人。

克莱布什（**Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred, 1833. 1. 19—1872. 11. 7**） 德国数学家。生于柯尼斯堡，卒于格丁根。1850年入柯尼斯堡大学学习，1854年到柏林深造。1858年成为柏林大学讲师，以后相继在几所学校任教授。1868年移居格丁根，与卡尔·诺伊曼共同创办了《数学纪事》杂志。早期受雅可比影响研究变分法和偏微分方程。后来不断扩展研究领域，在代数不变量和代数几何方面做出奠基性的工作。他用曲线术语叙述第一类阿贝尔积分，并对曲线进行分类，证明了一系列有关的定理。他与哥尔丹合著的《阿贝尔函数论》(1866)被认为是黎曼代数函数理论和纯粹代数几何理论之间的阶梯。克莱布什是现代不变量代数和代数几何的创始人之一，建立了许多重要定理，其工作对19世纪后期的德国数学有较大影响。此外，他在数学物理方面也有所建树。

富克斯（**Fuchs, Immanuel Lazarus, 1833. 5. 5—1902. 4. 26**） 德国数学家。生于莫欣(今属波兰)，卒于柏林。早年在柏林大学求学，受教于库默尔和外尔斯特拉斯。1858年获博士学位。先后在炮兵工程学校、格丁根、海德堡和柏林等地的大学任教。1866年成为教授。1882年当选为科学院院士。早期受库默尔和外尔斯特拉斯影响研究函数论，曾一度转向高等几何和数论，后来主要研究微分方程理论。1865年以来发表了一系列有创建的文章，例如在线性微分方程领域建立起"富克斯理论"，引入"基础解系"，讨论基础解系的存在性等。他还利用超几何级数解线性方程，证明了定义在复数域上的n阶线性方程满足初始条件的解的存在性等。

贝尔特拉米（**Beltrami, Eugenio, 1835. 11. 16—1899. 6. 4**） 意大利数学家。生于克雷莫纳，卒于罗马。早年在帕维亚大学求学，1862年后相继在波伦亚大学、比萨大学、罗马大学及帕维亚大学任教。1873年当选为山猫学院院士。1898年担任院长。贝尔特拉米在非欧几

何学、微分几何学、解析函数论、数学物理等方面都有较大贡献。他在1868年发表的《非欧几何解释的尝试》一文中,给出了罗巴切夫斯基几何学的直观解释,建立了某种伪球面与罗氏平面间的等距关系。他的工作使发现了30余年的罗氏几何得到确认。后来他又把罗氏几何的表示推广到 $n(n>2)$ 维流形,并研究了某些特殊的伪球面,使意大利数学家萨凯里在非欧几何方面的工作不致湮没。在微分几何学方面,贝尔特拉米论证了所谓微分参数在曲面论中的作用,成为微分几何中不变式理论应用的起点。1872年后,他转向应用数学,对位势论、波理论、热力学、光学、热传导和线性偏微分方程等均有研究。特别是他用几何方法研究分析问题,对数学物理学发展有一定影响。几何学中许多概念和公式,如微分参数、映象、曲率公式等,是以贝尔特拉米的名字命名的。

哥尔丹(Gordan, Paul Albert, 1837. 4. 27—1912. 12. 21) 德国数学家。生于布雷斯劳,卒于埃朗根。早年接受家庭教育,1855年后在柏林、布雷斯劳和格丁根等地学习数学。1874年任埃朗根大学教授。主要贡献在代数几何方面。他与克莱布什合作的《阿贝尔函数论》(1866)从一些基本理论入手,用代数方法获得了许多结果,开辟了代数几何研究的新方向。1868年他用构造性方法得到"克莱布什-哥尔丹定理:"每个二元型 $f(x_1,x_2)$ 都具有一个以有理整不变量与协变量所组成的有限完备系,将不变量理论提高到一个新阶段。以后的20年,他又得到许多有关结果,被誉为"不变量之王"。他的不变量理论由他的学生诺特继承和发展,成为现代代数领域的重要分支。哥尔丹还参与F.克莱因的代数方程工作,讨论与代数方程相关的168阶群和360阶群,再次推进不变量理论和方程论的研究。

若尔当(Jordan, Marie Ennemond Camille, 1838. 1. 5—1922. 1. 20) 法国数学家。生于里昂,卒于巴黎。1855年入巴黎综合工科学校,1861年获博士学位。从1873年起,同时在巴黎综合工科学校和法兰西学院执教,1881年当选为法国科学院院士。他的主要工作是在分析和群论方面。若尔当的《分析教程》(1887)是19世纪后期的标准教科书。他系统地发展了有限群论。研究了有限可解群。他的名著《置换与代数方程》(1870)长期被作为群论的权威著作,其中第一次全面地介绍了伽罗瓦的工作。他在1885—1921年担任《纯粹与应用数学杂志》编辑。

汉克尔(Hankel, Hermann, 1839. 2. 14—1873. 8. 29) 德国数学家、数学史家、生于哈雷,卒于蒂宾根附近的施兰贝格。早年曾在莱比锡大学、格丁根大学、柏林大学学习,受教于麦比乌斯、黎曼、外尔斯特拉斯等数学家。1862年在莱比锡获博士学位。1867年被聘为埃朗根大学教授。1869年以后到蒂宾根大学工作。主要贡献在复数和超复数理论、函数论和数学史等方面。在复数和超复数的研究中,他修正

了形式律的皮科克不变性，证明了任何超复数系都不能满足全部普通算术定律。在函数论方面，他强调点集的测度性质，系统阐述了黎曼可积性的准则，讨论了函数的分类及各类函数的可积性，并提出了构造以有理点为奇点的函数的方法。他还举出了一个在无穷多个点上不可微的连续函数的例子，给出了所谓汉克尔函数（或叫第三类贝塞尔函数）的意义。汉克尔还是著名的数学史家，其著作《近几世纪数学的发展》(1869)、《古代与中世纪数学史》(1875)等享有盛名。

韦伯（Weber，Heinrich，1842.5.5—1913.5.17） 德国数学家。生于海德堡，卒于斯特拉斯堡。1860年入海德堡大学，1863年获博士学位。1869年成为海德堡大学教授。曾任柯尼斯堡大学、马尔堡大学和斯特拉斯堡大学校长，培养了众多优秀学生，其中有闵科夫斯基和希尔伯特。他是德国和其他一些国家科学院院士，是德国数学会的创始人之一。主要贡献在代数数论、代数函数、代数几何和数学物理等方面。在微分方程论中，有著名的韦伯函数和韦伯相似性定理。他的《代数教程》(1895—1896)促进了二十世纪初期代数及其邻近学科的发展。他还与韦尔斯泰因合作编纂了《初等数学百科全书》(1903—1907，中译本名《数学全书》，商务印书馆，1935)。

达布（Darboux，Jean-Gaston，1842.8.14—1917.2.23） 法国数学家。生于尼姆，卒于巴黎。早年在巴黎高等师范学校学习。1866年获博士学位。毕业后在尼姆公立中学、巴黎大学和巴黎高等师范等校任教。1880年成为教授，1884年当选为法国科学院院士，兼彼得堡科学院、伦敦皇家学会和许多学术团体的成员。1889—1903年任巴黎大学理学院院长，后任名誉院长。主要贡献在微分几何、微分方程和积分学方面。他系统地研究了曲面和曲线的微分几何，并写成两部专著《曲面的一般理论》(4卷，1887—1896)和《正交系与曲线坐标》(1898)。他发展了微分方程的积分法，特别是总结了拉普拉斯的级数法，并应用于所有二阶偏微分方程；深入研究了非线性方程的蒙日方法，建立达布方程。在积分论方面，他引进了“达布和”、“上积分”、“下积分”等概念，得到“可测函数黎曼可积的充要条件是其不连续点集的测度为零”的定理等。他的工作对黎曼积分论的发展起到重要作用。此外，达布在解析函数论、球函数、正交函数、代数函数以及数学物理等方面也都取得了重要成果。1870年，他创办了《数理科学通报》。

李（Lie，Marius Sophus，1842.12.17—1899.2.18） 挪威数学家。生于努尔菲尤尔埃德，卒于克立斯蒂安尼亚（今奥斯陆）。1865年毕业于克立斯蒂安尼亚大学。1869年获奖学金到柏林留学，与F.克莱因在一起工作并结为好友。第二年在巴黎又结识了达布和若尔当，受到法国学派的影响。1871年回国在克立斯蒂安尼亚大学执教，1872年获博士学位。1886年到莱比锡大学接替F.克莱因的职务

主持数学讲座,12 年后返回挪威。1892 年当选为法国科学院院士。1895 年成为英国皇家学会会员。他还是许多其他科学机构的成员。李的主要贡献在以他的名字命名的李群和李代数方面。1870 年,他从求解微分方程入手,依靠微分几何和射影几何建立起一种变换,将空间直线簇和球面一一对应。不久他发现,这种对应是连续的,能将微分方程的解表示出来并加以分类。由此李引入了一般的连续变换群概念,证明了一系列定理来发展他的理论。他把微分方程的自同构群作为工具,对二维群和三维群进行分类。在以后的多年中,李和他的助手继续丰富完善连续群论学说,出版了三卷本的专著《变换群论》(1888—1893),后人为纪念他的贡献,将连续群改称"李群"。为研究李群他还创立了所谓"李代数——一种由无穷小变换构成的代数结构,并研究了二者之间的对应关系。李代数现已成为现代代数学的重要分支。此外,李在代数不变量理论、微分几何学、分析基础和函数论等方面也有建树。李的工作在 20 世纪初由法国数学家 É. 嘉当等加以发展。

施瓦兹(**Schwarz, Hermann Amandus, 1843. 1. 25—1921. 11. 30**) 德国数学家。生于西里西亚的黑姆斯多夫,卒于柏林。1869 年任瑞士苏黎世工科大学教授,1875 年任格丁根大学教授,1892 年继承外尔斯特拉斯任柏林大学教授。施瓦兹主要贡献在复变函数,偏微分方程、变分学和几何学等方面。他的突出工作之一是补救了黎曼关于映射定理证明中的缺陷。这一工作巩固了黎曼理论的基础。1873 年,他首次指出多元二阶混合偏导数相等的条件。他用直圆柱作反例,说明曲面的面积不能简单地用内接多面体表面积的极限去定义。人们早就知道在体积相同的立体之中,表面积最小的是球,但直到施瓦兹,才给出严格的证明(1884)。

诺特,M.(**Noether, Max, 1844. 9. 24—1921. 12. 13**) 德国数学家。女数学家 E. 诺特之父。生于曼海姆,卒于埃尔兰根。14 岁患小儿麻痹症,留下行走不便的后遗症。在家完成中学学业并自修大学数学。1865 年入海德堡大学学习,1868 年获博士学位。1870 年任无薪讲师,1874 年为副教授,次年到埃尔兰根大学任教,1888 年为教授。主要贡献在代数几何学方面,研究代数簇在双有理变换之下的不变性质,建立了关于二次变换的重要定理。1873 年证明了著名的诺特定理,并推广到曲面。他的这些结果,后来被克尼格和拉斯克尔等人推广。

康托尔,G.(**Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philip, 1845. 3. 3—1918. 1. 6**) 德国数学家、集合论的创始人。生于俄国圣彼得堡(今列宁格勒)。卒于哈雷。1862 年入苏黎世大学学习工程技术,第二年转入柏林大学攻读数学和神学,受教于数学家库默尔、外尔斯特拉斯和克罗内克等人。1867 年获博士学位。以后在柏林大学任教,1879 年任教授。1864—1865 年任柏林数学会主席,他参加德国数学协

会的组建工作并任第一届会长(1890—1893)。康托尔是集合论的创始人。1871年他给出了集合的定义,然后引入点集的极限点、导集、第一型集、闭集和完全集等概念,还定义了集合的交与并。1874年证明了代数数集和有理数集的可数性和实数集的不可数性,建立起被称为“康托尔公理”的实数连续性公理。同年又构造了实变函数论中著名的“康托尔集”,给出测度为零的不可数集的一个例子。1877年,他证明了 n 维形体的点和线上的点可以有一一对应。1879—1884年他又着重研究无穷数和超限数理论,引进势、基数和序数的概念,记自然数集合的基数为 $\aleph_0$,实数集合的基数记为 C,并证明了 $2^{\aleph_0}=C$. 还建立了相关的运算法则。康托尔 G. 的工作给数学发展带来一场革命,其理论很难被立即接受。它的首要反对者是克罗内克,克莱因也不赞成 G. 康托尔的新观点。然而,历史终究公正地评价了他的工作,集合论在本世纪初已逐渐渗透到各数学分支,成为分析理论、测度论、拓扑学及数理科学中必不可少的工具。代表作为《关于超限数理论的基础》(1895—1897)。

克利福德(**Clifford, William Kingdon, 1845. 5. 4—1879. 3. 3**) 英国数学家。生于埃克塞特,卒于马德拉。1860年入伦敦国王学院学习,三年后入剑桥三一学院。1867年获史密斯数学奖。第二年任三一学院应用数学教授。1874年当选为皇家学会会员。他把黎曼等人的非欧几何引入英国,在轨迹分类、黎曼曲面的拓扑结构方面有独到见解,并创设了一种具特殊性质的二次曲面,称为“克利福德曲面”,后经 F. 克莱因等人进一步研究以克利福德-克莱因空间著称。这些工作为相对论的建立提供了理论依据。在代数学方面,他继哈密顿之后,引入新的超复数—八元数,并推广为更一般的“克利福德代数。”

米塔-列夫勒(**Mittag-Leffler, Magnus Gustaf, 1846. 3. 16—1927. 7. 7**) 瑞典数学家。生于斯德哥尔摩,卒于同地。自幼得到良好的家庭教育,智力开发较早。1865年入乌普萨拉大学读书。1872年获博士学位,次年留学巴黎、格丁根和柏林等地,得到埃尔米特、外尔斯特拉斯等学者的指导。1877年任芬兰赫尔辛基大学教授。1881年回国,任斯德哥尔摩大学教授,后任校长。主要贡献在函数论方面,他扩展了关于一个亚纯函数可以表示为两个整函数的商的结论,得到所谓“米塔-列夫勒定理”和“米塔-列夫勒矩阵”等重要结果。著述共119种。米塔-列夫勒还是一位卓越的数学教育家和组织家。由他创办并担任45年主编的《数学学报》成为蜚声欧洲的重要数学杂志。柯瓦列夫斯卡娅、本迪克松和弗雷德霍姆都曾是他的学生。

茹科夫斯基(**Жуковский, Николай Егорович, 1847. 1. 17—1921. 3. 17**) 俄国力学家、数学家。生于奥列霍夫,卒于莫斯科。1868年毕业于莫斯科大学。1882年通过了博士论文答辩。1886

年任莫斯科大学教授。1887 年任莫斯科高等技术学校教授。1894 年被选为彼得堡科学院通讯院士。1905 年被选为莫斯科数学会主席。茹科夫斯基是现代流体力学和空气动力学的创始人，列宁称他为"俄罗斯航空之父。"在数学中，他研究了偏微分方程的理论及其近似积分法，还首先把复变函数广泛地应用于流体力学和空气动力学中。他的教育和科研实践对俄国科技队伍的形成和发展起到重大作用。为了表彰他的功绩，1947 年 1 月苏联部长会议决定在茹科夫斯基诞辰一百周年纪念日里设立茹科夫斯基奖金。

弗雷格(**Frege，Friedrich Ludwig Gottlob，1848. 11. 8—1925. 7. 26**) 德国数学家、数理逻辑学家。生于维斯马，卒于巴德克莱茵。早年在耶拿和格丁根求学，1873 年获博士学位。1874 年以后在耶拿大学任教，1879 年成为教授。弗雷格是逻辑代数的奠基人之一。在他的《概念语言》(1879)中，扩展了变量和命题函数的运用范围，给出逻辑的公理基础，并建立起一套逻辑符号系统。后来他又在《算术基础》(1884)中将算术概念表示为逻辑概念，再用逻辑方法推导出数的定义和规律。1893 和 1903 年他的《算术基本规律》两卷本相继问世，书中以精细的手法对逻辑系统进行了补充，使符号逻辑(即数理逻辑)初具规模，走上蓬勃发展的道路。他还引进逻辑函数概念，后来成为数理逻辑的一个新分支。不过，弗雷格的工作在当时没有被人理解，直到罗素和怀特海在《数学原理》(1910—1913)中系统阐述这种思想后才引起人们的注意。作为形式主义的代表人物弗雷格曾对希尔伯特等人的形式主义提出批评。他还写过一些关于几何原理的论文。

克莱因，C. F. (**Klein，Christian Felix，1849. 4. 25—1925. 6. 22**) 德国数学家。生于杜塞尔多夫，卒于格丁根。1865 年入波恩大学学习，第二年就被选任普吕克教授的助手。普吕克去世后，他继续完成普吕克未完成的线几何学著作。1868 年获博士学位。相继在格丁根大学、埃朗根大学、慕尼黑高等工业学院和莱比锡大学任教。1886 年返回格丁根大学任教直至去世。1871 年以来，克莱因从变换群的观点出发，对各种几何学进行综合研究，在 1872 年任埃朗根大学的就职演说《对于近来几何学研究的比较考察》(即著名的《埃朗根纲领》中阐述了他的主要观点。其中给出了几何学的明确定义："给出一个流形和这个流形的一个变换群，建立关于这个群的不变性理论。"根据他的观点，实现了把当时几种貌似毫无关系的几何学的统一和分类。《埃朗根纲领》中的研究方法在以后几十年里产生很大的影响，群论在数学中的地位也大为提高。克莱因还从事函数论研究，其论著《代数函数及其积分的黎曼理论》(1882)对黎曼面的理论作了深刻的论述。克莱因对椭圆模函数理论也有很大贡献，他和庞加莱同是椭圆模函数研究的创始人。在数学的其它领域，克莱因也有许多建树。例如，他卓有成效地研究了代数曲线奇点间的关系；通过

讨论正20面体建立起一般5次代数方程的完整理论等。克莱因十分重视数学教育和研究，他对格丁根大学的数学教育和科研进行了一系列改革，格丁根后来成为世界数学研究的中心，与他的努力是分不开的。1912年当选为国际数学教育委员会主席。

弗罗贝尼乌斯（**Frobenius, Ferdinand Georg, 1849. 10. 26—1917. 8. 3**） 德国数学家。生于柏林，卒于同地。早年在柏林攻读数学，1870年获博士学位。1874年任柏林大学教授。1893年当选为柏林普鲁士科学院院士。主要贡献在群论方面。他提出抽象群的概念，并对群表示论进行系统研究。在1896年的论著《群特征标》中，引进有限群的特征标理论，为此建立"秩"的概念，还研究了特征多项式的性质等。他还把有关结果推广到无限群上。他与别人合作，证明了群表示论的一系列结果。另外，在超复数系、微分方程的级数解、解析函数的幂级数和发散级数等方面也有建树。

柯瓦列夫斯卡娅（Ковалевская, Софья Васильевна, **1850. 1. 15—1891. 2. 10**） 俄国女数学家、作家。生于莫斯科，卒于瑞典斯德哥尔摩。早年受到良好的家庭教育并表现出超群的数学天赋。为进一步深造，1868年与古生物学家柯瓦列夫斯基"假婚"，并共同来到德国。在海德堡大学学习一年后，1870年到柏林成为外尔斯特拉斯的学生。经过四年的刻苦努力，他写出了三篇杰出的论文。在第一篇论文《偏微分方程论》中，她把柯西提出来的偏微分方程解的存在定理推广到含 r 阶时间导数的 r 阶方程组的情况，这一工作受到数学界一致称赞。现在，这一定理通常称为柯西－柯瓦列夫斯卡娅定理。另外两篇论文分别是关于阿贝尔积分和土星光环的。1874年7月，经外尔斯特拉斯推荐，格丁根大学破格授予她博士学位。返回俄国后曾一度脱离数学研究。1881年重返柏林，在外尔斯特拉斯的帮助下，又开始数学研究。1883年，经米塔-列夫勒推荐，受聘为斯德哥尔摩大学讲师，1884年晋为教授。1888年获巴黎科学院博尔丁奖。1889年当选为彼得堡科学院通信院士。柯瓦列夫斯卡娅共发表十篇科学论文，还发表一些文学作品。

亥维赛（**Heaviside, Oliver, 1850. 5. 18—1925. 2. 3**） 英国物理学家、数学家。生于伦敦的卡姆登，卒于德文郡。未受过正规的高等教育，早年是电报和电话工程师。1874年后隐居农村，专心写作，主要课题在电学和磁学方面。1891年当选为伦敦皇家学会会员。1892年，他把拉普拉斯变换应用于电机工程，发展成一套算子演算（或称运算微积）理论，但他并没有给出严格的数学论证。在著作《电磁理论》（3卷，1893—1921）中，他解释了哈密顿和格拉斯曼的向量分析，给出向量代数的现代形式。通常认为他是三维向量的创始人之一。

里奇（**Ricci, Curbastro Gregorio, 1853. 1. 12—1925. 8. 6**） 意大利数学家。生于卢戈，卒于博洛尼亚。早年在罗马大学、博洛尼亚大

学和比萨高等师范学校学习,1875年获博士学位。1877—1878年曾到慕尼黑访学,接触到许多数学名流。回国后曾一度在比萨高等师范学校任教,1880年以后一直在帕多瓦大学任数学物理教授。里奇通过研究黎曼的微分不变量、李普希茨的二次型以及克里斯托费尔的共变求导等概念而创立了绝对微分学理论(现称张量分析)。1896年,他发表了内蕴几何学论文,对任意黎曼簇上的线汇和绝对微分学的应用做了进一步的研究。他还发现了在广义相对论中有重要作用的缩短张量,即里奇张量。

庞加莱(Poincaré, Jules-Henri, 1854. 4. 29—1912. 7. 17) 法国数学家。生于南锡,卒于巴黎。1873年考入巴黎综合工科学校。1879以数学论文获博士学位。1881年任巴黎大学教授,直到去世。1887年当选为法国科学院院士,1908年当选为法兰西学院院士。庞加莱的研究涉及分析学、数论、代数学、几何学、拓扑学等许多领域。早期,他主要研究自守函数理论和创立微分方程的定性理论,以后则致力于奠基组合拓扑学,对现代数学的发展产生重要的影响。庞加莱在数论和代数学方面的工作也很有影响。他的《有理数域上的代数几何学》(1901)开创了丢番图方程的有理解的研究。他对经典物理学有深入的研究,对狭义相对论的创立有贡献。庞加莱的哲学著作《科学与假设》(1902)、《科学的价值》(1905)、《科学与方法》(1909)有着重大的影响。庞加莱的主要著作还有《拓扑学》(1895)、《关于由微分方程确定的曲线》(1882～1886)、《天体力学新方法》(1892～1899)等。法国科学院于1916—1954年出版了《庞加莱全集》共11卷。

马尔可夫(老)(Марков (Старший), Андрей Андреевич, 1856. 6. 14—1922. 7. 20) 俄国数学家。生于梁赞,卒于彼得堡。1878年毕业于彼得堡大学,后留校工作。1884年获物理数学博士学位。1886年成为教授。1896年当选为彼得堡科学院院士。1905年退休。同年,彼得堡大学授予他功勋教授称号。主要贡献在概率论、数论、函数逼近论和微分方程等方面。在概率论方面,他深入研究并发展了切比雪夫的矩方法,使中心极限定理的证明成为可能。他还推广了大数定律和中心极限定理的应用范围。在1906—1912年间,马尔可夫发表了一系列论著,提出并研究了一种能用数学分析方法研究自然过程的一般图式,后来这种图式被称为马尔可夫链。他的研究方法和重要发现推动了概率论的发展,特别是促进了概率论新分支——随机过程论的发展。随机过程论在现代科学中具有广泛而重要的应用。随机过程又叫马尔可夫过程。马尔可夫所创建的概率论的新的研究方向,改变了概率论的内容,促使它成为与自然科学和技术直接有关的最重要的数学方法之一。在数论中,他解决了求已知行列式的极值二次式的难题。在数学分析中,发展了力矩理论,函数逼近论和连分式的解析理论及其应用。在数理统计

和数的几何等方面也做出了创造性的贡献。共发表70多种论著，其中《有限差分学》和《概率演算》已被视为经典著作。

皮卡(**Picard, Charles Émile, 1856.7.24—1941.12.11**) 法国数学家。生于巴黎，卒于同地。1877年毕业于巴黎高等师范学校，获得博士学位。1879年被聘为图卢兹大学教授。1898年任巴黎大学教授。1917年当选为法国科学院终身秘书。他是伦敦皇家学会、苏联科学院等30多所重要科研机构的成员，并被5所外国大学授予名誉博士学位。曾获多种科学奖金。皮卡的主要贡献在解析函数论、微分方程、代数几何和力学等方面。1879年他提出皮卡第一定理，次年得到皮卡第二定理。这两个定理成为复变函数论许多新方向的起点。1883～1888年皮卡将庞加莱自守函数的方法推广到二元复变函数，进而研究了代数曲面(1901)，导致了“皮卡群”的建立。他推广了逐次逼近法，证明了含复变量的微分方程积分方程的解的唯一存在性定理。皮卡的主要著作有《分析数学专论》(1891—1896)、《泛函方程讲义》(1928)、《二元代数函数论》(1897，1906)等。

迈尔(**Meyer Wilhelm Franz, 1856.9.2—1934.6.11**) 德国数学家。生于马格德堡。早年在莱比锡和慕尼黑求学，1878年获博士学位。以后曾跟随外尔斯特拉斯、库默尔、克罗内克等著名数学家深造。1888年成为教授。1897年以后到柯尼斯堡大学任教。主要贡献在几何学，特别是在代数几何和射影不变理论方面，发表了有影响的论著。另外在代数曲线、位势理论等方面也有著述。共发表136种论著，为《数学进展》杂志写过2000多篇评论。他还是一位优秀教师，培养出许多杰出的数学家。

斯蒂尔杰斯(**Stieltjes, Thomas Jan, 1856.12.29—1894.12.31**) 荷兰数学家。生于兹沃勒，卒于法国图卢兹。早年在代尔夫特综合技术学校学习。1877—1883年在莱顿天文台工作。稍后迁居巴黎，1886年获得科学博士学位。同年任图卢兹大学教授，直至去世。斯蒂尔杰斯最重要的贡献是推广了黎曼积分概念。1894年他发表了论文《连分式研究》，文中提出了在解析函数论和一元实变函数论中本质上是全新的问题，为了表示一个解析函数序列的极限，他引进了一种新的积分——斯蒂尔杰斯积分，这种积分后来成为研究一般测度上的积分的开端，在现代数学中起到重要作用。他研究了发散级数，1886年独立于庞加莱给出了这种级数的正式定义，以后又继续研究发散级数的连分式展开(1894)，为连分式解析理论的研究奠定了基础。与此相关，他还提出了“矩量问题”，研究了正交多项式、近似积分法等经典分析课题。

李亚普诺夫(Ляпунов, Александр Михайлович, **1857.6.6—1918.11.3**) 俄国数学家、力学家。生于雅罗斯拉夫尔，卒于敖德萨。1876年入彼得堡大学物理数学系学习，不久转到数学系，在切比雪夫、佐洛塔廖夫等人的影响

下，大学期间开始科学研究。1880年毕业留校工作，1892年获博士学位并成为教授。1901年当选为彼得堡科学院院士。李亚普诺夫是切比雪夫所创立的彼得堡数学学派的杰出代表。主要贡献在概率论、微分方程和数学物理等方面。在概率论中，他给出了中心极限定理的简单而严密的证明，他的方法在现代概率论中得到广泛的应用。他是微分方程运动稳定性理论的创始人。他在《关于运动稳定性的一般问题》(1892)中提出了运动稳定性问题的普遍方法，他建立了一种具有特殊性质的函数(通常称为李亚普诺夫函数)，把解的稳定性与否和这个函数联系起来，建立解的稳定性曲线。他建立的研究方法很快应用到常微分方程的各分支。李亚普诺夫对位势理论的研究为数学物理方法的发展开辟了新的途径。他1898年发表的论文《关于狄利克雷问题的某些研究》具有重要意义。

皮亚诺(**Peano, Giuseppe, 1858. 8. 27—1932. 4. 20**) 意大利数学家、逻辑学家。生于利库内奥附近的斯平里塔，卒于都灵。1876年入都灵大学学习，于1880年毕业留校任教。1895年升为教授。皮亚诺是研究数理逻辑和数学基础的先驱。他研究逻辑是为了数学的严格性。试图用他的逻辑符号表达各种数学思维。罗素认为皮亚诺的这一发现，推动了他关于数学原理的观点的发展。皮亚诺从不加定义的“集合”、“自然数”、“继数”与“属于”等概念出发，给出了关于自然数的五条公理。这一公理系统标志着当时数学分析算术化的终结。1887年，他在分析学中，引进了一个比较严格的容度概念，给出了曲线长度和曲面面积的严密定义，并得到所谓皮亚诺面积，皮亚诺曲线等。代表作为《算术原理》(1889)。

胡尔维茨(**Hurwitz, Adolf, 1859. 3. 26—1919. 11. 18**) 德国数学家。生于希尔德斯海姆，卒于瑞士苏黎世。1877年进入慕尼黑技术大学学习，不久又到柏林大学深造。1880年在莱比锡大学获博士学位。先后在格丁根大学、柯尼斯堡大学、苏黎世工学院任教。主要贡献在代数学、数论、函数论、级数论等方面。他曾探讨模函数理论以及重要的数论课题—判别式为负的二元二次型的类数的关系。他运用分裂二次曲面为三角形的方法，得到了类数的非算术无穷和，并把这种研究推广到三元型。他与克莱因合作，研究代数黎曼面理论，证明了亏格大于1的代数黎曼面的自同构群是有限的。他还研究复变函数、超越函数、贝塞尔函数、差分方程理论。还讨论了具有二次范数的实代数问题，证明了实数、复数、实四元数和虚四元数是仅有的满足乘法定律的线性结合代数。著作有《四元数数论讲义》(1919)和《广义函数和椭圆函数论讲义》(1922)等。胡尔维茨是希尔伯特和闵科夫斯基的老师，后又结为终生挚友。

沃尔泰拉(**Volterra, Vito, 1860. 5. 3—1940. 10. 11**) 意大利数学家。生于安科纳，卒于罗马。1878年入比萨大学学习，受教于贝蒂教授。1882年获博士学位。

1883年成为比萨大学教授。1892年任都灵大学力学教授。他的研究涉及数学物理、积分方程、积微分方程、泛函分析、集合论、弹性理论和天体力学等领域。他是积分方程理论的创始人。1896年他给出了第二类积分方程的解法，以及第一类积分方程化为第二类积分方程的解法。还发现第一类积分方程是某种线性方程组的极限形式。他得到积微分方程的构造法，引进泛函微分的一般概念。他建立泛函方程的特征理论。沃尔泰拉的重要著作都收集在他的《数学论文集》(1954—1962)中，其最重要的著作是《泛函、积分方程和积分微分方程理论》。

怀特海(**Whitehead, Alfred North, 1861. 2. 15—1947. 12. 30**) 英国逻辑学家、数学家、哲学家。生于拉姆斯盖特。1884年毕业于剑桥大学三一学院，1905年获科学博士学位，以后又获多所大学博士学位。先后在三一学院、伦敦大学学院，哈佛大学等校任教授。被选为英国皇家学会会员。主要贡献在数理逻辑和哲学方面。他和他的学生罗素被认为是数学基础三大学派之一的逻辑主义学派的创始人。根据他们的观点，逻辑是可靠的，全部数学可以从逻辑推导出来，因而是逻辑的一种延拓。他们合作的《数学原理》(1910—1913)一书对逻辑主义学派的基本观点进行了论述，现已成为重要的历史文献。事实上，逻辑主义者并没有实现他们的预想，即不能从纯粹逻辑推出全部数学，他们在推导过程中使用了逻辑以外的公理。尽管如此，他们的工作还是大大地推动了数理逻辑的发展。

本迪克松(**Bendixson, Ivar Otto, 1861. 8. 2—1935**) 挪威数学家。生于瑞典斯德哥尔摩。在斯德哥尔摩大学任教授。主要贡献在微分方程论和集合论等方面。他是微分方程定性理论的创始人之一。1900年以来，他开展了由法国数学家庞加莱所开创的微分方程解的拓扑性质的研究，建立了方程$Xdx+Ydy=0$(其中X,Y是x和y的多项式)具有限个极限环的定理，称为本迪克松定理。他还研究了产生极限环的各种情形及性质，孤立奇点的分类等问题。在常微分方程定性理论中，有著名的本迪克松球变换和本迪克松准则等。他的主要成果发表在1901年的论文《由微分方程定义的曲线》中。

亨泽尔(**Hensel, Kurt, 1861. 12. 29—1941. 6. 1**) 德国数学家。生于柯尼斯堡，卒于马尔堡。早年在波恩大学和柏林大学学习，得到李普希茨、外尔斯特拉斯和克罗内克等名师的指导。1884年获哲学博士学位。1901年被聘为马尔堡大学教授，并担任《纯粹与应用数学杂志》的编辑。主要贡献在函数论、代数学、数论等方面。在函数论方面，他和克罗内克建立的克罗内克—亨泽尔法则提供了代数函数域的算术基础。在代数学方面，他证明了矩阵的最小多项式的唯一性。提出了P-进数的概念，并将其发展为一套完整的理论，他还把该理论应用于二次型和数论的研究。主要著作有《代数函数论》(1902)、《代数数论》(1908)和《数论》(1913)等。

希尔伯特（**Hilbert, David, 1862. 1. 23—1943. 2. 14**）　德国数学家。生于柯尼斯堡，卒于格丁根。1880 年入柯尼斯堡大学，1885 年获博士学位。1893 年任柯尼斯堡大学教授。1895 年任格丁根大学教授，直到退休。希尔伯特是 20 世纪最伟大的数学家之一。他的数学贡献是巨大的和多方面的。他解决了代数不变式问题，采用直接的、非算法的方法，证明了不变式系的有限整基的存在定理。1898 年，他的论文《相对阿贝尔域理论》中概括地提出了类域论，后经高木贞治、阿廷等人发展成一门完整的学科。1899 年，希尔伯特在《几何基础》一书中，第一次给出了完备的欧几里得几何公理体系，奠定了现代公理化方法的基础。希尔伯特用对角线方法证明了狄利克雷原理，丰富了变分法的经典理论。希尔伯特对积分方程及无穷维空间理论也有深入的工作，建立了希尔伯特空间理论(1904—1912)　1912—1922 年，希尔伯特曾专注于理论物理领域，其目标是用公理化手法整理近代物理学的重要部门，获得很多成果。1918 年以后，希尔伯特发展了早期关于几何基础的工作，其主要思想被概括为所谓“形式主义计划。”提出了证明论(或称元数学)，成为数理逻辑五大主要部门之一。1900 年，希尔伯特在巴黎举行的国际数学家会议上发表演说，提出了新世纪数学面临的 23 个问题。对这些问题的研究有力地推动了 20 世纪数学发展的进程。希尔伯特是一位出色的教师，讲课富有魅力，体现了重视基础和技巧的特点。希尔伯特为人正直受到普遍的尊敬。他曾拒绝在德国政府为发动第一次世界大战辩护的宣言上签名，后来又对希特勒的排犹暴行表示了极大愤慨。希尔伯特的学派在纳粹统治时期遭到了严重迫害。由于希尔伯特和 F. 克莱因的努力，使格丁根在 20 世纪的 30 年间成为国际数学研究与教育的中心。希尔伯特生前享有很高的国际声誉，1910 年荣获匈牙利科学院的波尔约数学奖。

班勒卫（**Painlevé, Paul, 1863. 12. 5—1933. 10. 29**）法国数学家、政治家。生于巴黎，卒于同地。早年在巴黎高等师范学校学习，毕业后又到格丁根大学深造，1887 年获数学博士学位。后在里尔大学、巴黎理学院和巴黎综合工科学校任教。1900 年当选为法国科学院院士。主要数学贡献在代数曲线及代数曲面理论、代数微分方程的奇点理论、超越函数等方面，他还十分注意将数学成果应用分析力学，取得重要成果。曾获得多次数学奖、班勒卫对刚刚兴起的航空科学颇有兴趣，曾是 1908 年双翼飞机创纪录飞行的乘客之一。他还热心政治活动，1906 年选入众议院，以后历任教育部长、陆军部长、航空部长等职，并在法国危机时期两次出任总理(1917，1925)。

斯捷克洛夫（**Стеклов, владимир Андреевин, 1864. 1. 9—1926. 5. 30**）　苏联数学家。生于下诺夫戈罗德。就学于莫斯科大学和哈尔科夫大学。1896 年成为教授。1902 年获得数学博士学位。

1912年被选为彼得堡科学院院士。1919—1926年任苏联科学院副院长，1925年被选为乌克兰科学院院士。斯捷克洛夫主要从事数学物理和微分方程论的研究。在数学物理中，研究课题有：热传导问题、转动物体的平衡问题和静电学中的一些问题。他首先引进了正交函数系的封闭性概念，并在此基础上研究函数展开为已知的正交函数的问题。同时还建立了函数平滑化的特殊方法，即斯捷克洛夫函数法。他在微分方程论、数学分析、弹性理论和流体力学等方面的研究也取得了重要的成果。他共发表论著约150种。是苏联数学物理学派的创始人，彼得堡数学学派的优秀代表。十月革命胜利后，领导组建了苏联科学院物理数学研究所。这个研究所后来被分为三个所，其中之一就是以他名字命名的数学研究所。他还组建了全苏地震预报网。

闵科夫斯基（**Minkowski，Hermann，1864.6.22—1909.1.12**）　德国数学家。生于俄国阿列克萨塔斯，卒于格丁根。父母是德国人，8岁时随全家定居柯尼斯堡。早年在柯尼斯堡大学学习期间，与希尔伯特、胡尔维茨结为终身挚友。1885年获数学博士学位。相继在波恩、柯尼斯堡、苏黎世和格丁根等地大学任数学教授。1881年，巴黎科学院宣布1883年大奖的课题是把一个整数表示为五个整数平方的和。17岁的闵科夫斯基提交的论文大大超过了原题的范围，给出了更一般的结果。1883年，他与著名英国数学家亨利·史密斯同获这项大奖。此后，他不断深入数论这个领域，在代数数论，特别是有理系数的二次型理论方面做出突出贡献。他的专著《数的几何》用几何方法研究数论。他的工作为本世纪20年代赋范空间理论的建立奠定了基础。闵科夫斯基的另一重要贡献是与著名物理学家爱因斯坦共同建立了狭义相对论，他提供的四维时空数学结构被称为“闵科夫斯基世界。”在格丁根他曾与希尔伯特共同领导过数学讨论班。

阿达马（**Hadamard，JacquesSalomon，1865.12.8—1963.10.17**）　法国数学家。生于凡尔赛，卒于巴黎。早年攻读于巴黎高等师范学校，1892年获理学博士学位。先后在比丰中学、博尔多理学院、巴黎大学、巴黎综合工科学校和中央技术大学任教。他在法兰西学院创办了一个重要的讨论班。1912年当选为巴黎科学院院士，他还是美国、英国、苏联等许多国家科学机构的成员和许多大学的名誉博士。阿达马早期的重要贡献在解析函数论，特别是泰勒级数的解析延拓理论方面，他在1892年的论文中，第一次把集合论引进复变函数论，得到许多重要结果，成为函数论的基础。他的《泰勒级数及其解析延拓》(1901)有很大影响。他进一步研究ς函数，解决了(1896)长期未果的素数分布问题，从而奠定了解析数论的基础。在偏微分方程方面，他给出了适定问题的提法，他认为，对于拉普拉斯方程，狄利克雷问题是适定的；反之，对双曲型方程，柯西问题则是适定的。他还建立了基本

解的概念，明确了定解问题的函义。他提出的发散积分的有限部分对解柯西问题有重要意义。阿达马对泛函分析也有重要贡献，他建议以“泛函”一词来代替“线函数”，特别给出了用弧段上的连续函数所定义的线性泛函的一般表达式，成为里斯基本公式的先导。阿达马的工作遍及数学的许多分支，他的初等数学讲义在法国中学也颇为流行。1936年，阿达马曾应邀来我国清华大学讲学三个月。代表作还有《数学领域中的发明心理学》。

弗雷德霍姆（Fredholm，Erik Ivar，1866.4.7—1927.8.17） 瑞典数学家。生于斯德哥尔摩，卒于同地。早年在乌普萨拉大学和斯德哥尔摩大学学习，是米塔一列夫勒的学生。1898年获博士学位。任斯德哥尔摩大学教授，还兼任一家保险公司的会计员。主要贡献在积分方程方面。1899年，他在给米塔-列夫勒的信中，提出一种积分方程，即弗雷德霍姆积分方程、并研究了它的解。1900年他发表论文《关于解狄利克雷问题的新方法》，对今称的第二种弗雷德霍姆积分方程的核，给出了一个重要定理，即弗雷德霍姆第二定理。第一定理是1903年给出的。他的工作直接导致希尔伯特空间和一般函数空间理论的发展。

豪斯多夫（Hausdorff，Felix，1868.11.8—1942.1.26） 德国数学家。生于布雷斯劳。曾在莱比锡、弗赖堡和柏林等大学学习。1891年毕业于莱比锡大学，5年后成为该校的讲师，1902年升为教授。后来又到格赖夫斯瓦尔德大学和波恩大学任职。二次大战期间，因其犹太血统而倍受迫害。1935年被勒令退职，其著作禁止出版。并被列入关押集中营的黑名单，虽未执行但终因不能忍受法西斯的迫害而于1942年1月举家在波恩自杀身亡。主要贡献在集合论、拓扑学、连续群论、泛函分析和数论等方面。1914年，他与弗雷歇同时分别研究了康托尔提出的关于集的连通性概念等，提出了一般度量空间和拓扑空间的集合理论。他引入一套公理并建立起拓扑空间（后被称为豪斯多夫空间）理论。其专著《点集论纲要》（1913）对拓扑学和度量空间理论的发展有重要意义。他还解决了波莱尔集的基数问题，建立了多维空间的测度理论，称为豪斯多夫测度。他还研究有序集理论，首次证明了措恩引理。他的著作《集论》已被译成中文。

嘉当 É.（Cartan，Élie-Joseph，1869.4.9—1951.5.6） 法国数学家。生于多罗米耶，卒于巴黎。早年因家境贫寒无力上大学，后得到杜伯特（后来成为法国参议院院长）的资助进入巴黎高等师范学校，1891年毕业。后辗转于蒙彼利埃、里昂和南锡等地大学执教。1912年任巴黎大学教授，1940年退休。主要贡献在连续群、线性结合代数和拓扑学方面。1894年他彻底解决了有限参变量连续群问题，奠定了李群代数理论的基础。1896年开始研究线性结合代数，不久他证明了每个代数结构可以用二重单位表示，并对李代数进行分类，引进“权”

的概念。1913年他发现了量子力学中的"旋子",并利用它将复合向量由三维旋转变成二维表示,从而建立了半单纯李群的基本概念。1925年以后,他利用拓扑学方法发现了流形基本群与李代数结构之间的联系,把李群与拓扑学研究有机地结合起来。在微分方程组理论中,他定义了全微分方程中的通常积分元和正则积分元,给出适应于一类方程组的嘉当－克勒存在定理,推进了所谓普法夫问题的求解。嘉当复兴了微分几何学的研究,他引入一般纤维丛概念,建立起仿射、射影及保形的广义联络空间,得出活动构架的一般方法。由此开辟了解决几何问题的新方法。嘉当晚年发展了对称空间理论,提出拟保形映象理论。1931年当选为法国科学院院士,1947年成为伦敦皇家学会会员。他还获得多次奖励。

波莱尔(**Borel, Émile, 1871.1.7—1956.2.3**) 法国数学家。生于阿韦龙省圣阿夫里克,卒于巴黎。早年在巴黎高等师范学校求学,以后从事函数论、概率论和数学物理的教学,1909年成为教授。曾多次到国外游学,1920年随他的老师班勒卫来中国进行学术交流。波莱尔的主要贡献是把康托的集合论与古典分析的方法结合起来,建立近代实变函数理论,最著名的工作是建立海因-波莱尔有限复盖定理和可数集测度为零的定理。他还系统地发展了级数可和性理论,用无穷积分建立发散级数表达式,引进可和与绝对可和性概念。此外,波莱尔在非解析开拓、可数概率、丢番图近似和解析函数值分布理论和对策论等方面也做了许多工作。1921年以后,波莱尔投身政界,成为激进社会主义者代表,曾任市长、地方议员和海军部长等职。

策梅罗(**Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand, 1871.7.27—1953.5.21**) 德国数学家。生于柏林,卒于弗赖堡。学于哈雷和弗赖堡,1894年在柏林大学获博士学位。1900年成为教授。在格丁根、苏黎世和弗赖堡等地任教。主要贡献在集合论、变分学和统计学等方面。他首先把康托尔的集合论加以公理化,1904年,他证明了"每一个集合在某种重新排列下都能够良序化"的定理,现称之为策梅罗定理。为证上述定理,他引用了一个特殊公理——称为策梅罗选择公理:对于给定的非空且不相交的集合的任何一个总体,总可以在其中选取一个元素,构成一个新的集合。策梅罗选择公理的利用对集合论的进一步研究起到推动作用。在以上工作的基础上,策梅罗在1908年建立了第一个集合论公理体系。该体系只包含由公理本身的叙述所定义的基本概念和关系,例如集合的概念和集合的属于关系,只有公理所提供的集合性质才可以用。策梅罗提出的集合论公理体系由德国数学家弗伦克尔完成,形成著名的 *ZF* 公理体系,使数学基础得到进一步巩固,影响极其深远。

罗素(**Russell, Bertrand Arthur Willian, 1872.5.18—1970.2.2**) 英国数学家、逻辑学家。生于蒙茅斯郡特里莱克,卒于威

尔士的普拉斯彭林。早期接受家庭教育,1890年入剑桥大学三一学院学习数学和哲学。1895年以论文《论几何学基础》获得剑桥大学研究员资格。1900年罗素接触到布尔和皮亚诺的符号逻辑,1901年开始与怀特海合作,试图用逻辑将全部数学推出来,经过10年的奋战,写成三大卷的《数学原理》。这部著作对数理逻辑的发展产生了重要影响,也使罗素本人获得了崇高的声誉。在写这部书的过程中,他提出了著名的"罗素悖论",这对20世纪初关于数学基础的论战产生过极大影响。作为逻辑主义的代表人物,罗素长期以来坚持把全部数学归结为逻辑的主张。但事实上,罗素并没有实现他的主张。他到晚年承认逻辑主义是不可行的。

罗素还是本世纪最有影响的哲学家之一,其学术活动除数学外,还涉及物理学、历史、文学、宗教、政治和教育等多方面。1911年当选为亚里士多德学会会长。1918年因反战而被监禁。1920年应邀来中国讲学一年,他盛赞中国的传统文明,并希望中国能创造一种新文化,以弥补西洋文化之不足。1950年获诺贝尔文学奖。1964年创立罗素和平基金会。

列维-齐维塔(**Levi-Civita, Tullio, 1873. 3. 29—1941. 12. 20**) 意大利数学家、物理学家。生于帕多瓦,卒于罗马。1894年毕业于帕多瓦大学,以后在帕维亚理学院附属师范学院任教。1902年任帕多瓦大学教授。1918年受聘任罗马大学高等分析教授。1938年因犹太血统被法西斯政权解职。主要贡献在绝对微分学、分析力学和天体力学等方面。他与他的老师里奇合著的《绝对微分法及其应用》(1900)给出了绝对微分学的系统算法,为张量分析和拓扑学的发展开辟了道路,使爱因斯坦的广义相对论等问题的解决成为可能。他还对解决三体问题作出重要贡献。1917年引入现在以他的名字命名的弯曲空间中的平行概念。代表作有《经典力学与相对论》(1924)《绝对微分计算》(1925)等。其一生论著达200多种。

卡拉西奥多里(**Carathéodory, Constantin, 1873. 9. 13—1950. 2. 2**) 希腊数学家。原籍希腊,生于柏林,卒于慕尼黑。早年在比利时的军事学校求学,毕业后受雇于英国政府到埃及参加水利工程建设。1900年返回柏林研究数学。两年后到格丁根。1904年在闵可夫斯基指导下获博士学位。在德国、波兰、土耳其、希腊等地教学,1924年任慕尼黑大学教授。卡拉西奥多里在许多数学分支都有贡献。他的专著《实变函数论》(1918)继波莱尔、勒贝格之后建立了实函数的严密体系。另一部专著《变分法与一阶偏微分方程》(1935)推进了拉格朗日问题的解法。另外,他在《几何光学》(1937)中应用变分法建立起一套完整的数字计算方法;在《函数论》(1950)中对保角表示、边界对应、点集的测度等理论进行了论述。他曾是《数学年刊》杂志的编辑。

贝尔(**Baire, René Louis, 1874. 1. 21—1932. 7. 5**) 法国数学家。生于巴黎,卒于尚贝里。早

年在巴黎高等师范学校学习，然后到意大利深造，1899年获博士学位。1902年任蒙彼利埃理学院讲师，1904年受聘为第戎理学院教授。1922年当选为法国科学院通讯院士。贝尔的主要贡献在集合论、实变函数论、数学分析等方面，他的工作对法国数学的发展有着重要的影响。他研究了连续函数的极限函数在任何完备集上逐点不连续性问题，推进了半连续性理论和超限数理论。他于1899年引入了所谓贝尔函数类，即规定连续函数为0类函数，0类函数序列的极限函数(但非0类函数)为1类函数，0类及1类函数序列的极限函数(但非0类也非1类函数)为2类函数，依此类推，对每一个自然数n，可以引入n类函数的概念。贝尔函数类的引入，扩大了实变函数的研究范围。

高木贞治(**Takagi，Teiji，1875.4.21—1960.2.28**) 日本数学家。生于岐阜。早年在东京帝国大学求学，1898年由日本文部省派往德国留学，1901年回国。1903年获东京大学理学博士学位。1904年成为教授。1932年任国际数学家大会副主席。主要贡献在代数数论方面。他多年致力于“克罗内克青春之梦”的研究，把类域的定义作了推广，证明了一个代数数域的任何阿贝尔扩张都可以表示为该数域上的类域，从而创立了类域论。他的研究结果发表在1920年东京帝国大学理学部的纪要上，这是近代第一部具有国际水平的日本学者的论文。高木贞治也由此被认为是日本近代数学的开创者。他的26篇论文收集在《高木贞治文集》(1973)中，主要是代数数论的研究成果。专著有《代数的整数论》(1931)。他还是一位杰出的教育家，为提高日本数学教育水平作出了重要贡献。他亲自编写了大量的中小学教科书。高木贞治对数学史也颇有研究，著有《近世数学史谈》(1933)。

勒贝格(**Lebesgue，Henri Léon，1875.6.28—1941.7.26**) 法国数学家。生于博韦，卒于巴黎。1894—1897年在巴黎高等师范学校学习，是波莱尔的学生。1902年在巴黎大学获博士学位，以后在雷恩大学、普瓦捷大学和巴黎大学执教，1922年任法兰西学院教授，同年当选为法国科学院院士。主要贡献在测度论和积分论方面。他是“勒贝格积分”理论的创始人，其博士论文《积分、长度与面积》(1902)改进了波莱尔的测度理论，建立了“勒贝格测度”和“勒贝格积分”等概念，他采取先定义测度后定义积分的方法，在定义积分时又采取划分值域而不是划分定义域的方法，使积分归结为测度。他的工作是现代积分论的开端，并且成为傅立叶级数理论和位势论发展的转折点。他在《积分与原函数的研究》(1904)中，得到了有界函数黎曼可积的充要条件是其不连续点的集合为零测度集，从而解决了黎曼可积性的问题。在拓扑学方面，他引进了紧性定义及紧度量空间的勒贝格数。晚年致力于数学教育及初等几何研究。

哈代(**Hardy，Godfrey Harold，1877.2.7—1947.12.1**) 英国数学家。生于克兰利，卒于剑

桥。1896年考入剑桥大学三一学院,1900年当选为三一学院研究员,第二年又荣获史密斯奖金。1910年当选为英国皇家学会会员,还受到许多科学院、大学的奖励。1900—1911年,哈代主要研究无穷级数收敛和积分论等方面的课题。1911年他建立起与数学家李特尔伍德长达35年的密切合作关系。他们长期靠通信讨论数学问题,研究丢番图分析、堆垒数论、积性数论、黎曼ζ函数、不等式、三角级数等内容。他们共同完成了关于华林定理的新证明,推进了这个问题的进展。1913年,哈代发现了印度天才的青年数学家拉马努金,他把拉马努金推荐到剑桥大学深造,不久即蜚声数坛。哈代在与拉马努金合作时期,完成了多项研究课题,特别在整数的分析理论上取得一系列惊人的成果。哈代曾任三一学院讲师多年,1919年受聘为牛津大学萨维几何学教授。20年代末曾到美国普林斯顿讲学,1931年回到剑桥,任纯粹数学教授。他培养了许多优秀的数学人才,我国著名数学家华罗庚就是他的学生。

弗雷歇(**Fréchet, Maurice-René, 1878.9.2—1973.6.4**) 法国数学家。生于巴利尼,卒于巴黎。早年在巴黎高等师范学校学习,是阿达马的学生和助手。先后在普瓦捷、斯特拉斯堡和巴黎等地大学任教。是波兰、荷兰、巴黎等科学院院士和许多国家学术机关成员。曾获法国荣誉团勋章。主要贡献在泛函分析、拓扑学、概率统计和微积分等方面。他引进了泛函的一般概念。利用康托尔集合论的完整思想对函数空间概念加以一般化,然后引进一类函数空间,建立导集、闭集、紧集等一系列概念。他还成功地给出了泛函的连续性和可微性的定义,引进泛函的集合和序列的一致收敛等概念,证明了许多有关的定理。他的工作奠定了抽象空间的理论基础。在建立线性泛函和算子的抽象理论中,也作出了有影响的工作。他还是抽象空间拓扑理论的创始人,建立了度量空间等一系列重要概念。有一类拓扑空间称为弗雷歇空间。著作有《抽象空间》(1928)等。

富比尼(**Fubini, Guido, 1879.1.19—1943.6.6**) 意大利数学家。生于威尼斯,卒于美国纽约。早年在比萨高等师范学校攻读数学。先后在卡塔尼亚、热那亚和都灵等地大学任教,1939年移居美国,任普林斯顿高等研究所教授。富比尼是20世纪初意大利数学界的代表人物,其数学研究涉及微分方程、多复变函数、群论、射影微分几何、变分学、积分化简、概率分析等许多领域。他最早使用微分形式研究射影几何、是射影微分几何的先驱者之一。积分论中最重要的(关于把高维勒贝格积分化为低维积分)定理称为富比尼定理。他在物理学方面也做出许多贡献。1919年获意大利王室授予的奖金。1928—1937年担任《纯粹与应用数学年刊》编辑。

哈恩(**Hahn, Hans, 1879.9.27—1934.7.24**) 奥地利数学家,生于维也纳,卒于同地。学于法

国斯特拉斯堡和慕尼黑等地，1902年在维也纳取得博士学位。1917年任波恩大学教授。主要贡献在变分法、函数论、泛函分析和傅立叶积分等方面。他是最早提出测度和积分的抽象理论的学者之一，其中有一些理论以他的名字命名。在实变函数中，他指出连续弧作为点集来说可以有局部连通的连续统的特征。他与波兰数学家巴拿赫等在20年代初分别独立地引入赋范线性空间的概念，成为泛函分析中巴拿赫空间理论的奠基人之一。他们建立的线性泛函开拓定理在线性空间理论中有重要作用。著有《实函数论》(1921)等专著。

里斯 (**Riesz, Frigyes, 1880. 1. 22—1956. 2. 28**) 匈牙利数学家。生于杰尔，卒于布达佩斯。早年在苏黎世工业学校、布达佩斯大学学习，获得哲学博士学位。后来到巴黎、格丁根等地深造。回到匈牙利以后，长期从事教学与科研。在科洛斯堡大学，他与哈尔合作、创办了J.波尔约数学研究所及学术刊物《数学科学文献》。1946年调入布达佩斯大学工作。1936年当选为匈牙利科学院院士。他还是其他许多科学机构的成员。主要贡献在泛函分析方面。他深入研究 L^p 函数空间，为巴拿赫空间理论作了大量基础性的工作。1909年，他发现了重要的里斯表示定理，成为泛函分析发展史上的一个里程碑，这个定理不断获得广泛的推广和应用。此外，里斯对积分方程、勒贝格积分理论、射影几何复变函数、逼近理论和点集拓扑等方面也都有论述。他发表的各种论著共计1600多页，代表作为《泛函分析讲义》(1952)，已被译成多种文字。

伯恩斯坦 (Бернштейн, Сергей Натанович, **1880. 3. 6—1968. 10. 26**) 苏联数学家。生于敖德萨，卒于莫斯科。早年在法国巴黎求学，1904年获数学博士学位。1907年成为教授。1914年在哈尔科夫又获纯粹数学博士学位。先后在哈尔科夫大学、列宁格勒综合技术学院、列宁格勒大学和苏联科学院数学研究所工作。1929年当选为苏联科学院院士。主要研究多项式逼近理论、偏微分方程论和概率论。在偏微分方程方面，他以解决希尔伯特第19问题(1904)及试解第20问题(1908)而著称于世。他创立了一种求解二阶偏微分方程边值问题的新方法(伯恩斯坦方法)。他及其学生进行的开创性工作奠定了函数构造论的基础，极大地推进了切比雪夫所创立的多项式逼近理论。在概率论方面，他最早提出(1917)并发展了概率论的公理化结构，建立了关于独立随机变量之和的中心极限定理，研究了非均匀马尔可夫链。他还用随机微分方程对概率论方法试行研究。伯恩斯坦对变分法、泛函分析以及现代数学的其他分支也有许多工作。其主要著作被收入1952—1964年出版的《伯恩斯坦文集》(4卷)。他的工作在国际上有相当影响，被选为许多国家科学院或学术机关成员。

布劳威尔 (**Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1881. 2. 27—1966. 12. 4**) 荷兰数学家。生于

奥弗希,卒于布拉里克姆。1904年毕业于阿姆斯特丹大学,1907年获博士学位。1912年任该校数学教授。先后获得奥斯陆、剑桥等大学的荣誉学位。当选为荷兰皇家科学院、德国科学院、美国哲学学会、伦敦皇家学会等若干科学组织的成员。主要贡献在数学基础和拓扑学方面。他是数学基础研究中直觉主义学派的创始人和主要代表。他把数学思维理解为一种构造性的程序,声称数学基础只可能建立在这个程序上,人们对数学的认识由直觉决定,不依赖于经验和逻辑。他否认排中律的普遍有效性。在拓扑学方面,他引进了连续映射的单纯逼近和映射的拓扑度的概念,证明了n维区域的拓扑不变性,在此基础上,建立了布劳威尔不动点定理并证明了维数的拓扑不变性。他对希尔伯特第5问题也作出了一些贡献。

诺特,A. E. (Noether,Amalie Emmy,1882. 3. 23—1935. 4. 14) 德国数学家。生于埃朗根,卒于美国布林莫尔。是M. 诺特的长女。1900年入埃朗根大学,1907年在数学家哥尔丹指导下获博士学位。在20世纪初的德国,妇女还没有登上大学讲台的资格,A. E. 诺特在相当一段时间内没有工作。1919年,在著名数学家希尔伯特和克莱因的支持下,她才获准取得格丁根大学讲师资格。1922年为编外副教授。1933年,因是犹太人而被纳粹政府解职,同年赴美国;先后在普林斯顿高等研究所和布林莫尔女子学院工作。主要贡献在代数学方面,她是抽象代数的奠基人之一。她的工作在代数拓扑学、代数数论、代数几何的发展中有重要影响。1907—1919年,她主要研究代数不变式及微分不变式。20年代以后转向交换代数与“交换算术”的研究,她的两篇文章《整环的理想理论》(1921)和《代数数域和代数函数域的理想理论的抽象构造》(1926)已成为抽象代数的经典论著。20年代末至30年代中期,又研究非交换代数与“非交换算术”,在一系列工作的基础上,她于1932年证明了“代数数域上的中心可除代数是循环代数”的重要结果。诺特在格丁根工作期间,领导了一个代数学派,对欧洲数学界有很大影响。1932年她在国际数学家大会上作过大会报告。她的工作通过荷兰数学家范德瓦尔登的《近世代数学》(Ⅰ,1930;Ⅱ,1931)而得到广泛传播。

贝尔 (Bell, Eric Temple, 1883. 2. 7—1960. 12. 21) 英国—美国数学家、数学史家。生于英国阿伯丁,卒于美国沃森维尔。早年在英国接受中等教育,1902年去美国,先后在斯坦福大学、华盛顿大学和哥伦比亚大学攻读,1912年获博士学位。相继在芝加哥大学、哈佛大学、加利福尼亚理工学院任教。1931—1933年担任美国数学会主席。贝尔在数值分析、解析数论、多周期函数、丢番图分析和数学史等方面做出了贡献,其《算术释义》获得美国数学会的博歇纪念奖。他所撰写的《数学家》与《数学的发展》在数学史上有很大的价值。

米泽斯(Mises, Richard von, 1883. 4. 19—1953. 7. 14) 德

国数学家、力学家。生于奥地利伦贝格(今苏联利沃夫),卒于美国波士顿。1907年在维也纳获博士学位,后曾在土耳其和欧洲多所大学任教。1939年移居美国,1944年成为哈佛大学教授。米泽斯早年研究空气动力学。1915年奥地利按照他的机翼设计组装了600马力的军用飞机,加强了第一次大战时该国的空中武装力量。他在弹性理论、塑性理论和湍流理论方面也有创见。主要数学成就在数值分析、概率论和数理统计方面。他在《概率、统计和真理》(1928)一书中建立了频率的极限理论。此外,他是著名学术期刊《应用数学与力学杂志》的创始人与编辑(1921—1933)。

卢津(Лузин, Николай Николаевич, **1883.12.9—1950.2.28**) 苏联数学家。生于托木斯克,卒于莫斯科。1901年入莫斯科大学攻读数学。1905年和1910年两次被派到法国留学,接触到当时法国著名的数学家阿达马、波莱尔和勒贝格等,对他以后的科学研究有重要影响。1916年获博士学位。1922年以后一直在莫斯科大学工作。1929年当选为苏联科学院院士。卢津是莫斯科数学学派的创始人和代表人物。早期从事实变函数论的研究和教学,其论文《积分与三角级数》(1915)对测度论的发展有重要影响。1916—1920年,他与苏斯林、亚历山德罗夫合作创建了新的数学理论——描述性函数论。以后他用几十年的时间坚持这一研究方向。他还发现了新的集——射影集,并进行了许多研究。卢津提出过许多猜测,其中最著名的是关于L^2可积函数的傅立叶级数一定几乎处处收敛的猜测(见卢津猜想)。卢津在解析函数的边界性质、曲面的变形问题、解析集合论等问题上都有重要工作。他还为开辟经典分析和微分几何的应用范围作出了贡献。卢津在莫斯科大学执教多年、培养了大批人才,柯尔莫哥洛夫和辛钦等都是他的学生。他的专著《解析函数论及其应用》(1930)是他及其学生们多年工作的总结。他对苏联高等学校教材建设也作出了重要贡献,他编著的微积分学教材在国内外风行了二十几年。

当儒瓦(**Denjoy, Arnaud, 1884.1.5—1974.1.21**) 法国数学家。生于欧什。巴黎大学教授。1931年任法国数学会主席。1942年当选为巴黎科学院院士。1962年任巴黎科学院院长。他还是苏联科学院、阿姆斯特丹科学院等学术机构成员。主要贡献在实变函数论方面。他解决了有关原函数的经典问题。1912年,他推广了黎曼积分和勒贝格积分,引进了一种以他的名字命名的积分——当儒瓦积分。他在复变函数论、拟解析函数论、拓扑学和连续统理论等方面也做出了重要工作。他所建立的环面上的微分方程定性理论已由其他数学家发展。在描述集合论的拓扑问题中得到一系列重要结果。关于三角级数绝对收敛性的当儒瓦——卢津定理也很著名。

伯克霍夫(**Birkhoff, George David, 1884.3.21—1944.11.12**) 美国数学家。生于密歇根州,

卒马萨诸塞州的坎布里奇。1907年在芝加哥大学获博士学位，任教于威斯康星、普林斯顿、哈佛等大学。曾任美国数学会主席(1925)和美国科学发展协会主席(1937)。主要贡献在渐近逼近、边值问题、施图姆—刘维尔理论、线性微分方程、差分方程和广义黎曼问题等方面。1912年，庞加莱把限制性三体问题归结为一个重要的几何定理(称为庞加莱最后定理)，并声称除几个特例外不能证明它。伯克霍夫在《庞加莱几何定理的证明》(1913)中证明了这个定理，成为轰动一时的事件。伯克霍夫还推进了冯·诺伊曼提出的遍历定理(弱形式)，得到强形式的遍历定理，后者在近代分析中有更广泛的应用。此外，他在引力理论，美学的数学理论等方面也都有创造性的工作。主要著作有《动力系统》(1928)、《相对论与近代物理学》(1923)、《基础几何学》(1941)等。

莱夫谢茨(**Lefschetz, Solomon, 1884. 9. 3—1972. 10. 5**) 美国数学家。生于莫斯科，卒于普林斯顿。他在巴黎长大，1905年毕业于巴黎中央高等工业学校，同年赴美。1911年获克拉克大学博士学位。相继任教于内布拉斯加、堪萨斯和普林斯顿大学，1924年成为普林斯顿大学教授。晚年获得许多大学荣誉博士学位。主要贡献在代数几何、多维代数流形、代数拓扑和微分方程理论等方面。他研究多面体的不动点理论，1926年证明了后来以他的名字命名的不动点定理，推广了布劳威尔的工作。研究课题还有上同调环、代数曲面、阿贝尔簇、代数簇的拓扑和孤立奇点理论、拓扑空间奇异同调群等。专著有《位置分析与代数几何》(1924)、《代数拓扑学》(1942)、《微分方程的几何理论》(1957)和《非线性控制系统的稳定性》(1965)等。1964年获美国国家科学奖章。

李特尔伍德(**Littlewood, John Edensor, 1885. 6. 9—1977. 9. 6**) 英国数学家。生于罗切斯特，卒于剑桥。1907年毕业于剑桥大学。1907—1910年在曼彻斯特大学任教，1928—1950年任剑桥大学教授。李特尔伍德的科学研究开始于大学时代。1904年，他结识了哈代并成为终生挚友。1911年他们开始合作，计35年。早年他曾解决黎曼关于整函数的假设，证明了阿贝尔型定理和幂级数的陶伯型定理。1911年以后，他与哈代共同对解析数论进行了系统研究，给出了小于已知数的素数个数的渐近表达式的余项估计；使用圆法对华林问题的研究作出首次突破，并研究广义华林问题；改善了幂级数相乘的方法及其乘积的系数估计表达式，并广泛应用于各领域。此外，他们对丢番图逼近理论、级数和积分的可和性、三角级数求和法等方面也都进行了研究。他们合作共发表了100多篇论文。

外尔(**Weyl, Claude Hugo Hermann, 1885. 11. 9—1955. 12. 8**) 德国数学家。生于汉堡附近的埃尔姆斯霍恩，卒于苏黎世。1904年入格丁根大学，1905—1906年在慕尼黑大学学习数学、物理、化学。1907年，在希尔伯特指导下，完

成博士论文，1908 年获博士学位。1913 年受聘任瑞士苏黎世的联邦工学院教授。1930 年回格丁根继承希尔伯特的教授席位。1933 年任格丁根数学研究所所长，同年应聘担任美国普林斯顿高等研究所教授。1951 年退休。外尔是 20 世纪上半叶最重要的数学家之一。他的早期工作在分析学方面。其博士论文中把希尔伯特及其学生关于积分方程的工作扩广到积分上限为无穷的情形，其后研究奇异特征值问题。外尔在 1913 年发表的著作《黎曼曲面的概念》，第一次给黎曼曲面奠定了严格的拓扑基础。1915—1933 年，他研究与物理有关的数学问题，企图解决引力场与电磁场的统一理论问题，对以后发展起来的各种场理论和广义微分几何学有深远影响。在关于理论物理学的工作中，外尔开展了对李群乃至整个群论的研究。外尔对哲学始终有浓厚的兴趣。在关于数学基础问题的论战中，他赞同布劳威尔的直觉主义，反对非构造性的存在证明，反对康托尔的超穷数。外尔的主要著作还有《空间，时间，物质》(1918)、《连续统》(1918)、《群论与量子力学》(1928)、《经典群》(1939)、《对称》(1952)、《数学哲学和自然科学》(1926)等。1968 年，出版了他的全集，共 4 卷。

莱维 (Lévy, Paul Pierre, 1886.9.15—1971.12.15) 法国数学家。生于巴黎，卒于同地。早年在巴黎高等师范院校和综合工科学校学习，是阿达马的学生。1913 年以后在综合工科学校任教，1920 年任教授。1950—1962 年曾到美国访学，1964 年当选为巴黎科学院院士。主要贡献在概率论和泛函分析方面。他深入研究特征函数论，给出逆转公式和连续性定理，提出古典中心极限定理收敛于稳定律等。还从样本函数角度研究随机过程，研究一般可加过程的样本函数结构，得到无穷可分分布的明显表达式。他引进鞅的概念，证明了鞅的一些性质，并进而研究大数定律的推广等。他的工作奠定了一般极限理论和随机过程论的基础。他还从事算子运算、函数论、拓扑学和力学等方面的研究。“泛函分析”这个名称是由他引进的。主要著作有《随机过程与布朗运动》(1948)、《随机变量的加法理论》(1937)、《泛函分析教程》(1922)等。

比伯巴赫 (Bieberbach, Ludwig, 1886.12.4—1982.9.1) 德国数学家。1914—1920 年在法兰克福大学工作，后成为柏林大学教授。主要贡献在函数论、微分方程论和几何学等方面。他特别对单位圆内单叶解析函数进行了定量研究，与芬兰数学家奈望林纳共同建立了单位圆内单叶函数的系统理论。1916 年他提出了单位圆内形如 $z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 的单叶解析函数应有 $|a_n|\leqslant n$ 的猜想，称为比伯巴赫猜想(见比伯巴赫猜想)，引起许多学者的注意。他还研究了保角映射的某些课题，证明了某些类型的 n 连通域保角映射到 n 叶圆盘的可能性等。在几何学中，比伯巴赫研究了几何作图可能的条件，证明了如用直角尺和圆规，则三等分角和倍立方

体问题是作图可能的。著作有《函数论教程》(2卷,1931)、《几何作图理论》(1952)等。在纳粹统治期间,他依附纳粹,倡导数学种族理论和“德意志数学”,以致声名狼藉。

斯米尔诺夫(Смирнов, Владимир Иванович, **1887. 6. 10—1974. 2. 11**) 苏联数学家。生于彼得堡。1910年毕业于彼得堡大学。1912—1930年任彼得堡交通道路工程学院教授。1936年获得物理数学博士学位。1943年被选为苏联科学院院士。主要贡献在复变函数论、弹性理论和泛函分析等方面。他与索博列夫建立了解决具有平面边界的弹性介质中波动问题的新方法,引进了在具有正测度的欧几里得空间中共轭函数的概念。他在偏微分方程、变分学、应用数学和数学史等方面也取得了重要的研究成果。还开辟了地震理论研究的新方向。斯米尔诺夫最著名的著作是5卷集的《高等数学教程》,它是一部数学百科全书,荣获了斯大林奖金。中译本由人民教育出版社出版,从1952—1979年共印刷了十六次。他长期领导物理数学史委员会的工作,并领导由他创立的列宁格勒数学学派和列宁格勒大学和力学研究所。

斯托伊洛夫(**Stoilow, Simion G., 1887. 9. 14—1961. 7. 4**) 罗马尼亚数学家。生于布加勒斯特。早年就学于巴黎大学。1916年获数学博士学位。1923年成为教授。1945年当选为罗马尼亚科学院院士。曾任罗马尼亚科学数学研究所第一任所长。主要贡献在偏微分方程、实变函数论、拓扑学、解析函数的拓扑理论等方面。在实变函数与拓扑学中,他研究了零测度集的分类。1927年以后,他的研究工作奠定了一个新的数学分支——解析函数的拓扑理论——的基础。在《解析函数论的拓扑原理教程》一书中,他给出了解析函数的拓扑性质。他发现了半纯函数的零点和极点的当儒瓦定理的拓扑内容,推广了胡尔维茨公式,导出了内部映射和局部同胚的相互单值性原理。他引进的内部映射相关的概念不仅对拓扑学而且对多复变函数论也有重要意义。借助于内部映射,他以十分有效的研究手段解决了解析函数论的第二个基本问题——确定黎曼面的复盖面问题。

赫克(**Hecke, Erich, 1887. 9. 20—1947. 2. 13**) 德国数学家。生于波森(今属波兰),卒于丹麦哥本哈根。1905—1910年先后攻读于布雷斯劳、柏林和格丁根大学,1910年获博士学位。曾任希尔伯特和克莱因的助手。1915年受聘为瑞士巴塞尔大学教授。1919年成为汉堡大学教授。担任过几家数学杂志的编辑,是几个著名数学协会成员。主要贡献在解析数论方面。他定义了代数数域上广义狄利克雷L函数,作出了数域上狄利克雷素数定律的模拟。他还将二次数域应用于模函数的构造理论,在椭圆模函数的研究上取得进展。还研究了高阶的艾森斯坦级数,得出了阿贝尔积分的周期,系统地考察了狄利克雷级数与黎曼型函数方程及某些自同构群上函数的联系,揭示了素数同解析函

数新的关系。

波伊亚(**Pólya, George, 1887. 12. 13—1985**) 匈-美数学家。生于布达佩斯。早年在布达佩斯、维也纳、格丁根、巴黎等地攻读数学、物理和哲学。1912 年获博士学位。1914 年到苏黎世瑞士联邦理工学院任教。1940 年入美国籍,自 1946 年起任斯坦福大学教授。波伊亚在许多数学领域都有很精深的研究,特别是在泛函分析、数理统计和组合数学方面尤为突出。他还是数学方法论专家和优秀的教育家。他始终把高深的数学研究与数学的普及教育结合起来。共发表 200 多种研究论文和专著,其中最著名的有《分析的原理与习题》(1954,与赛格合作)、《数学与猜想》(1954)、《怎样解题》(1957)、《数学的发现》(Ⅰ、Ⅱ卷,1962)等。他的许多著作被译成世界上多种文字。

拉马努金(**Ramanujan, Srinivasa Aaiyangar, 1887. 12. 22—1920. 4. 26**) 印度数学家。生于坦焦尔区的埃罗德,卒于马德拉斯附近的切特普特。幼时即表现出数学才能,但因家贫困未能受到很好教育。1904 年获奖学金入贡伯戈纳姆大学学习,由于偏科未能毕业。1907 年后为谋生计备尝艰辛,但仍刻苦自学数学。后在友人协助下,给著名数学家哈代去信,陈述自己在数论方面的研究,并列举在其他方面得到的定理和猜想。哈代奇其才,在 1914 年推荐并资助他入剑桥大学深造。从此他既是哈代的学生,又是哈代的合作者。几年之内发表了大量的研究成果,内容涉及素数分布理论、整数分析、椭圆函数、超几何函数、发散级数等许多领域。拉马努金有较强的洞察力,常能预见某些数学结果,日后有不少得到证实。1918 年当选为伦敦皇家学会会员。

库朗(**Courant, Richard, 1888. 1. 8—1972. 1. 27**) 德国数学家。生于波兰卢布林,犹太血统。早年在布雷斯劳和苏黎世学习,1907 年到格丁根成为希尔伯特的助手。1910 年获博士学位。1920 年应聘为格丁根大学数学教授。1924 年以后主持创建了格丁根数学研究所,该所很快成为德国乃至世界数学研究的中心。由于纳粹政府的迫害,于 1934 年迁居美国,任纽约大学教授。他领导的数学和力学研究所在他死后改名为库朗应用数学研究所。库朗是希尔伯特学派的成员,为德国和美国的数学发展作出重要贡献。他深入研究并发展了狄利克雷原理,并把这一原理应用于保角映射和椭圆型偏微分方程的边值问题。他还把解边值问题化为求二次泛函的极值函数来研究。在二次大战期间,他还解决了一些军事课题。主要著作有《狄利克雷原理,保角映射和最小曲面》(1950)、《数学物理方法》(2 卷,1953—1962,与希尔伯特合著)、《微积分学教程》(2 卷,中译本《柯氏微积分学》)等。

斯捷潘诺夫(Степанов, Вячеслав Васильевич, **1889. 9. 4—1950. 7. 22**) 苏联数学家。生于斯摩棱斯克。1912 年毕业于莫斯科大学。1928 年获物理数学博士学位。1943 年任莫斯科数学会副主席。1946 年被选为苏联科学院通讯

院士。斯捷潘诺夫主要研究微分方程理论和函数论。他是苏联微分方程定性理论学派的创始人之一。他的专著《微分方程定性理论》(与涅梅茨基合著)对常微分方程理论的发展起到了推动的作用。在实变函数论方面,他研究了重要函数类的性质。他培养了很多优秀的学生和继承人。在他的周围不仅团结着一批数学家,而且还有物理学家和天文学家。斯捷潘诺夫的著作《微分方程教程》有中译本(高等教育出版社,1955)。

费希尔(**Fisher, Ronald Aylmer, 1890. 2. 17—1962. 7. 29**) 英国数学家、生物学家。生于伦敦、卒于澳大利亚阿德雷德。早年在剑桥大学攻读数学和理论物理,毕业后致力于生物统计学,先后在伦敦大学和剑桥大学任教授。1929年当选为皇家学会会员。主要贡献在数理统计学方面,对估计理论、假设检验、实验设计和方差分析等领域都有重要工作。在他的主要著作《理论统计的数学基础》(1922)中,对统计的多元分析、相关系数、样本分布及其在生物遗传方面的应用进行了系统论述。该书是现代统计学的奠基作之一。费希尔还是一位著名的遗传学家、优生学家,他用统计方法研究生物学,作出许多重要贡献。

普里瓦洛夫(Привалов, Иван Иванович, **1891. 2. 11—1941. 7. 13**) 苏联数学家。生于下罗莫夫。1913年毕业于莫斯科大学。1918年获物理数学博士学位并成为教授。1939年被选为苏联科学院通讯院士。普里瓦洛夫的主要贡献在函数论和微分方程等方面。有许多著名的结果是和卢津共同得到的。他们应用实变函数论中的方法研究了解析函数的边界性质,解决了某些边界问题。在1918年的博士论文《柯西积分》中,提出了卢津—普里瓦洛夫唯一性定理,证明了柯西积分的基本引理和关于奇异积分的定理。他的工作奠定了俄国单叶函数理论研究的基础。共发表论著70多种。其中最著名的有《复变函数引论》(中译本,上册,高等教育出版社,1953;下册,商务印书馆,1953)和《解析几何学》(中译本,高等教育出版社,1956)等。

维诺格拉多夫(Виноградов, Иван Матвеевич, **1891. 9. 14—1983. 3. 20**) 苏联数学家。生于米洛柳布镇。1914年毕业于彼得堡大学并留校担任教学工作。1918—1920年在彼尔姆大学任教,1920年成为教授。1920年以后在列宁格勒大学和列宁格勒综合技术学院工作。1932年开始任苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所所长。他的主要贡献在解析数论方面。1934年提出了估计外尔三角和的新方法,对华林问题作了重大改进。1937年,他证明了"任何一个充分大的奇数都能表示为3个素数之和"的结果,推动了"哥德巴赫猜想"问题的解决。为此在1941年获得苏联一等国家奖金。维诺格拉多夫的方法经典化之后,被许多学者应用于不同的数学领域。他共发表了140多种论著。其中有关数论方面的教科书多次出版,在国内大为风行。其《数论基

础》已译成中文(高等教育出版社，1956)。他的专著还有《解析数论的新方法》(1937)、《数论中的三角和方法》(第二版 1976，有中译文，载《数学进展》1 卷 1 期，1955)、《最简整序变量中的三角和方法》(1976)等。维诺格拉多夫是许多国家科学院的外籍院士或荣誉院士，同时还是一些国家学术机关、学会的成员。多次获得国家勋章、奖章及各种荣誉称号。

施密特(Шмидт, Отто Юльевич, **1891. 9. 30—1956. 9. 7**) 苏联数学家、天文学家、地球物理学家。生于莫吉廖夫，1913 年毕业于基辅大学。1916—1951 年先后在基辅大学、莫斯科林学院和莫斯科大学任教。1920 年成为教授。1935 年被选为苏联科学院院士。1929—1941 年任苏联大百科全书的主编。1939—1942 年任苏联科学院副院长。施密特数学研究的主要成就在群论方面。1916 年，他发表了专著《抽象群论》。书中不仅阐述了理论问题，而且指出了这一代数领域进一步发展的方向。1927 年，证明了群的直积分解的同构性定理。1930 年，在莫斯科大学组织了群论讨论班，这一组织后来成为苏联代数学家的一个活动中心。施密特晚年从事宇宙起源问题的研究，提出了关于地球起源的有趣问题。

莫尔斯(**Morse, Harold Marston, 1892. 3. 24—1977. 6. 22**) 美国数学家。生于沃特维尔，卒于普林斯顿。1914 年毕业于科尔比学院。1917 年获哈佛大学博士学位。1935—1962 年任普林斯顿高等研究所教授。莫尔斯的主要贡献在于把拓扑学方法应用于变分学、常微分方程理论和复变函数论等数学分支。在大范围变分法中，莫尔斯把由庞加莱和伯克霍夫所创立的理论发展成为现代的形式。近年来，莫尔斯理论被进一步推广和精密化，并应用于微分拓扑学和微分几何学而得到各种重要的结果。主要著作有《大范围变分法》(1934)、《全局分析和微分拓扑中的临界点理论》(合作，1969)和《复变函数论中的拓扑方法》(1947)等。

巴拿赫(**Banach, Stefan, 1892. 3. 30—1945. 8. 31**) 波兰数学家。生于克拉科夫，卒于利沃夫。1910 年进入利沃夫工学院学习，1919 年获博士学位。1927 年成为利沃夫大学教授。先后被选为波兰科学院和乌克兰科学院的通讯院士、波兰数学学会主席。第二次世界大战期间，波兰被德国占领，他在一所医学研究所做喂养昆虫的工作，停战后又回到利沃夫大学工作。巴拿赫是利沃夫学派的开创人之一，对泛函分析的发展作出了突出贡献。他引进了线性赋范空间的概念，建立了其上的线性算子理论，他证明了作为泛函分析基础的三个定理：哈恩—巴拿赫延拓定理；巴拿赫—斯坦豪斯定理；闭图像定理。这些定理概括了许多经典的分析结果，在理论上和应用上都有重要价值。人们把完备的线性赋范空间称为巴拿赫空间。此外，巴拿赫在正交级数论、集合论、测度论、积分论、常微分方程论、复变函数论等方面都有很

多出色的工作。其主要著作《线性算子理论》(1932)被译成多种文字，有很大影响。

切博塔廖夫 (Чеботарёв, Николай Григорьевич, **1894. 6. 15—1947. 7. 2**) 苏联数学家。生于卡明涅茨波多尔斯基。1916年毕业于基辅大学并留校担任教学工作。1921—1927年在敖得萨大学任教。1927年取得物理数学博士学位，同年任喀山大学教授，后来任该校数学和力学研究所所长。1929年被选为苏联科学院通讯院士。1943年以后任喀山物理数学学会主席。他在非欧几何代数数论、伽罗瓦理论、李群、丢番图近似和整解析函数等方面都取得了重要的成果。1924年，他解决了关于素数集合无限性的弗罗贝尼乌斯问题，得到了关于素数和算术级数的狄利克雷定理的最重要推广。1930年，第一次给出关于豫解式理论的普遍定理。他发表了大量的论文和著作，其中有《伽罗瓦理论基础》和《李群》等。他的一些代数著作被译成中文，如《代数学》(科学出版社，1954)、《代数学引论》(高等教育出版社，1954)和《代数函数论》(高等教育出版社，1956)等。1949—1950年出版了切博塔廖夫全集1—3卷。

辛钦 (Хинчин, Александр Яковлевич, **1894. 7. 19—1959. 11. 18**) 苏联数学家、教育家。生于康德罗沃，卒于莫斯科。1916年毕业于莫斯科大学并留校任教，1919年成为教授。1922—1927年在莫斯科大学数学力学研究所工作。1932—1934年任该所所长。1935年获得物理数学博士学位。1939年被选为苏联科学院通讯院士。辛钦是苏联概率论学派的创始人之一。在极限定理方面他取得了重要的结果：发现了重对数规律，给出了平稳随机过程的定义并奠定了它的理论基础。他还把概率论的方法广泛地应用于统计物理学。并研究了质量管理中的数学方法。在分析数学中，辛钦引进渐近导数的概念，推广了当儒瓦积分，研究可测函数的结构，并把函数的度量理论应用于数论和概率论中。在数论方面，他取得了一系列重要的结果，特别是对丢番图近似理论的研究尤为突出。在连分数的度量理论中，建立了许多新的原理。辛钦共发表150多种关于数学和数学史的论著。他对高等和中等学校的教育改革作出了贡献。主要著作有《数学分析简明教程》(中译本，高等教育出版社，1954)、《连分数》(中译本，上海科技出版社，1965)、《费马定理》(中译本，上海科技出版社，1984)、《公用事业理论的数学方法》(中译本，科学出版社，1958)等。

斯特罗伊克 (**Struik, Dirk Jan, 1894. 9. 30—**) 美国数学史家。生于荷兰鹿特丹。1922年毕业于莱顿大学。1934年入美国国籍。1940年任麻省理工学院教授。斯特罗伊克主要研究张量微分几何和数学史。他的著作《数学简史》，内容简练通俗，已被译成多国文字，中译本1956年由科学出版社出版。

霍普夫 (**Hopf, Heinz, 1894. 11. 19—1971. 6. 3**) 德国数学家。生于布雷斯劳，卒于瑞士措利孔。早年在布雷斯劳大学学习。1920

年随数学家施密特赴柏林研究拓扑学，1925年获博士学位。1925年在格丁根大学结识É.诺特和俄国数学家亚历山德罗夫，结为挚友，并进行长期合作。1931年任苏黎世理工科大学教授。1955—1958年被选为国际数学协会主席。他是许多科学机构的成员，曾获多种奖励和荣誉称号。主要贡献在拓扑学和微分几何学方面，取得了许多重要结果。例如，他探讨了同调理论和球面同伦理论，证明了霍普夫扩张和分类定理，建立了霍普夫映射度理论，提出了霍普夫不变量，引进了霍普夫代数等。霍普夫代数已成为代数拓扑的有效工具。他还研究局部微分几何结构同黎曼空间拓扑结构的关系以及曲线曲面理论。在数论、群论、泛函分析等方面也有所建树。他和亚历山德罗夫合作的《拓扑学》(1935)流传很广。

维纳(**Wiener, Norbert, 1894. 11. 26—1964. 3. 18**)　美国数学家。控制论的创始人。生于密苏里州的哥伦比亚，卒于斯德哥尔摩。12岁进入土夫兹学院学习，15岁时获数学学士学位。1913年以关于数理逻辑的论文获哲学博士学位。其后到欧洲旅行从师于罗素、哈代、李特尔伍德、希尔伯特等人。1915年返美后，担任过哲学、数学和工程方面的教学工作。1919年到麻省理工学院任讲师之后，开始了他的数学学术生涯。1932年以后一直为该校教授。1933年成为美国国家科学院院士。维纳早期曾在数理逻辑、概率论、巴拿赫空间、布朗运动和分析等方面取得过重大成果。第二次世界大战结束后，维纳和多种学科的专家一起对控制论作了深入的探讨。1947年他写出了划时代的著作《控制论》，1948年出版后，立即风行世界。《控制论》一书中体现的维纳的深刻思想引起了人们的极大重视。它使用了通讯理论的术语，如控制、反馈、信息、输入、系统等帮助人们进行思维，对整个科学界产生影响。《控制论》一书已有中译本(科学出版社，1965)。维纳的数学工作收入他的《数学论文集》(1980)中，1964年出版过《维纳选集》。

奈望林纳(**Nevanlinna, Rolf Herman, 1895. 10. 22—1980. 5. 28**)　芬兰数学家。生于约恩苏，卒于赫尔辛基。早年在赫尔辛基大学受教于林德勒夫。先后在赫尔辛基大学和苏黎世大学任教。1959—1962年任国际数学联合会主席。1924年当选为芬兰科学院院士。还担任过芬兰数学协会主席。主要贡献在解析函数论领域，他是现代亚纯函数理论的创始人，1925年建立了亚纯函数的一个一般性理论，并在《皮卡—波莱尔定理与亚纯函数理论》(1929)及《单值解析函数》(1935)两书中发展这个理论，给出第一及第二基本定理。由此推出亚纯函数值分布的若干结果，影响很广。此外，他在超越整函数、黎曼曲面的分类理论、单位圆盘上的单叶函数、开黎曼面上的阿贝尔积分等方面也都有研究工作。其另一著作《单值化》有中译本。

亚历山德罗夫，П. С(Алек-сандров, Павел Сергеевич, **1896. 5. 7—1982. 11. 16**)　苏

联数学家。生于俄罗斯的博戈罗德斯克。1917年毕业于莫斯科大学。1929年任莫斯科大学教授。1932—1964年任莫斯科数学会主席。1953年被选为苏联科学院院士。亚历山德罗夫是现代拓扑学的奠基者之一。他和苏联数学家乌雷松共同创立并发展了紧与列紧空间理论，引入了一系列基本概念和拓扑结构，建立了本质映射定理和同调维数论，并由此导出了一系列对偶性原理的基本规律。著作有《组合拓扑学》、《群论导引》、《非欧几何是什么?》、《集与函数的泛论初阶》(中译本，商务印书馆，1954—1955)、《拓扑对偶定理(第一部分:闭集)》(中译本，科学出版社，1959)等。他与霍普夫合著的《拓扑学》流传很广。

西格尔(**Siegel, Carl Ludwig, 1896. 12. 31—1981. 4. 5**) 德国数学家。生于柏林。1915年入柏林大学学习，1920年在格丁根大学获博士学位。后来在美因河畔法兰克福和格丁根等地任教。1940年赴美任普林斯顿高等研究所研究员。1945年任该所教授。1951年返回格丁根。1968年当选为美国国家科学院国外院士。1978年获首届沃尔夫奖。主要贡献在解析数论和函数论方面。在解析数论中给出超越数论及丢番图逼近的一些结果。本世纪20年代，他和哈塞共同研究希尔伯特第11问题，获得重要结果。他在天体力学的三体问题及有关的微分方程方面也有重要工作。主要著作有《多复变量解析函数》(英译本，1948—1949)、《天体力学讲义》(1956)等。

道格拉斯(**Douglas, Jesse, 1897. 7. 3—1965. 10. 7**) 美国数学家。生于纽约。1916年毕业于纽约市立学院。1917年到哥伦比亚大学攻读研究生，1920年获博士学位。1926—1930年访问了国内许多数学中心，得以接近当代许多数学家，对他后来的数学研究有很大影响。先后在麻省理工学院、普林斯顿高等研究所、哥伦比亚大学和纽约市立学院工作。主要贡献在变分法方面。他解决并推广了普拉托极小曲面问题，历代许多大数学家都曾试图解决这一问题而未能获得成功。由于他的这一杰出贡献而荣获1936年第一次颁发的菲尔兹奖。以后他又转向变分问题的逆问题，1941年解决了三维空间变分问题的逆问题。对群论也有一定贡献。

阿廷(**Artin, Emil, 1898. 3. 3—1962. 12. 20**) 奥地利数学家。生于维也纳，卒于汉堡。曾就读于维也纳大学和莱比锡大学。1921年获博士学位。1926年任汉堡大学教授。1937年去美国，先后在圣母大学、印地安那大学、普林斯顿大学任教。1958年回汉堡大学。阿廷在代数、群论、数论、几何、拓扑、复变函数论、特殊函数论等方面都有突出的工作。早期，主要研究二次数域的解析理论和算术理论，推动了抽象代数学的发展。1927年完成了任意数域中的一般互反律的证明，这是类域论的重大突破。同年，在超复数方面作出著名贡献，扩展了结合环代数的理论。1945年他建立了阿廷环理论。在拓扑学方面他从1925年开始并在1947年建立了辫子理

论。他的论文收集在《阿廷文集》(1965)中。

哈塞(**Hasse, Hermut, 1898. 8. 25—1979. 12. 26**) 德国数学家。毕业于格丁根大学。1920年获博士学位。1934年成为格丁根大学教授兼数学研究所所长。曾在哈雷、马尔堡、柏林和格丁根等地工作。他是阿廷和E.诺特学派的代数学家。主要贡献在代数和数论方面。可换域理论和代数数理论中的许多概念和结果都是用他的名字命名的。他首先发展了局部类域论,研究了上同调群和类域论的关系。在代数数域中,他研究了对于幂剩余记号的互反律、范数剩余及其记号、希尔伯特范数记号、代数数域的算术等课题。还以他的名字命名了一种ζ-函数。哈塞在第二次世界大战期间依附纳粹,1940年起在法西斯德国海军的研究机构中从事应用数学研究。战后被大学解职。1948年在柏林大学恢复教授职务。

绍德尔(**Schauder, Juliusz Pawel, 1899—1943**) 波兰数学家。生于利沃夫。学于利沃夫的卡齐米日大学。1924年获得博士学位。他的数学研究受到法国数学家阿达马和苏联数学家伯恩斯坦的影响。在泛函分析、拓扑学、积分论、椭圆及双曲型偏微分方程等方面都做了大量工作。绍德尔把布劳威尔关于欧氏空间中凸紧集到自身的连续映射的不动点定理推广到线性赋范空间中的凸紧集、巴拿赫空间中的凸紧集、局部凸的线性拓扑空间中的凸紧集到自身的连续映射上。1934年,他和法国数学家勒雷合作,应用不动点定理证明了微分方程解的存在性定理。他在拓扑学中也得到了一些十分著名的结果。

扎里斯基(**Zariski, Oscar, 1899. 4. 24—**) 苏联-美国数学家。生于俄国科布林,早年学于基辅大学,后赴罗马。1924年获罗马大学博士学位。1927年去美国,1936年入美国籍。相继任教于霍普金斯及伊利诺伊大学。1947年任哈佛大学教授。主要贡献在代数几何及拓扑学方面。著有《交换代数》(合作,1958—1960)、《代数曲面》(1971)。在《代数曲面》一书中,他以赋值论方法来处理代数曲面的奇性分解问题。他曾获得许多荣誉,1943年当选为美国国家科学院院士,1965年被授予美国国家科学奖章。1981年获沃尔夫奖。

诺伊格鲍尔(**Neugebauer Otto, 1899. 5. 26—**) 奥地利-美国数学家、数学史家、科学史家。生于奥地利因斯布鲁克。1926年毕业于格丁根大学并留校任教。1934—1939任丹麦哥本哈根大学教授。1939年后到美国的各大学任教。诺伊格鲍尔主要研究古代数学史和天文学史。他诠释了很多楔形文字的泥板,为巴比伦数学史的发现和研究做出重要贡献。主要著作有《古代数理科学史教程》(1934)《数学楔形文字诠释》(1935)和《古代的精密科学》(1957)等。

博赫纳(**Bochner, Salomen, 1899. 8. 20—1982. 5. 2**) 德国-美国数学家。生于克拉科夫城(今属波兰),卒于美国休斯敦。毕业于柏林大学,1921年获该校博士学位

位。在慕尼黑大学任教数年后，于1933年受聘去美国普林斯顿大学。1938年入美国籍。1946年成为教授。他的数学研究涉及函数论、级数论、多元傅立叶积分、函数的积分变换理论、概率论、多复变函数论和泛函分析等方面。在积分法的一般理论中，他给出了巴拿赫空间的函数积分定义。泛函分析中有博赫纳－辛钦关于正定函数谱表示的定理，复变函数论中有著名的博赫纳定理和表示法，等等。著有《多复变函数论》(1948)、《傅立叶变换》(1949)、《调和分析与概率论》(1955)、《傅立叶积分讲义》(1959)等。

彼得罗夫斯基(Петровский, Иван Георгиевич, **1901. 1. 18—1973. 1. 15**) 苏联数学家。生于谢夫斯克。1927年毕业于莫斯科大学并留校工作，1933年成为教授。1935年获物理数学博士学位。1946年当选为苏联科学院院士。1951年后任莫斯科大学校长。主要贡献在微分方程理论、代数几何学、概率论、积分方程、函数论和拓扑学等方面。他深入研究了实数域内微分方程组的奇点、奇点附近及周期解邻域内积分曲线的性态，柯西问题的解对初值的依赖性等课题。他把偏微分方程组分为椭圆、双曲、抛物三种类型并分别进行研究。他利用微分方程理论解决了物理学和力学中的许多问题。他编著了大量的数学教科书，其中《偏微分方程讲义》、《积分方程论讲义》和《常微分方程论讲义》同在1952年获斯大林奖金。

布饶尔(**Brauer, Richard Dagobert, 1901. 2. 10—1977. 4. 17**) 德国－美国数学家。生于柏林，卒于波斯顿。1919年入柏林大学，1926年获博士学位。毕业后在柯尼斯堡大学任教。1933年去美国，先后在肯塔基大学、普林斯顿高等研究所、多伦多大学、密歇根大学、哈佛大学任教。1955年当选为美国科学院院士，1971年获美国科学功绩奖章。布饶尔是著名代数学家。在典型群表示论、单代数和分裂域、有限群模表示论、有限单群、代数数论等方面都作出了重要的贡献。他的科学论文汇编为《布饶尔论文集》，共3卷。

诺维科夫，П. С.(Новиков, Пётр Сергеевич, **1901. 8. 28—1975. 1. 9**) 苏联数学家。生于莫斯科。1925年毕业于莫斯科大学。1934—1960年在苏联科学院数学研究所工作。1935年获物理数学博士学位。1960年成为教授，同年被选为苏联科学院院士。诺维科夫的主要贡献在集合论、数理逻辑和代数学等方面。他在读研究生时就解决了集合论的难题之一。为了解决集合论的一些重要问题，转向数理逻辑的研究，取得了一些成果。他还深入研究了连续统理论以及与其相近的射映集合的蕴度和可测性问题。1952年，他指出，存在具有有限生成元和有限个定义关系的群，对这些群来说没有一种算法能解字问题，这就证明了字问题一般不可解。在代数学领域，诺维科夫和他的学生阿江解决了重要的伯恩赛德问题。他在拓扑学、函数论和数学物理等方面也做出了一定的贡献。为高

等学校编写了大量教科书。他的许多学生后来成为优秀的学者。

塔尔斯基(**Tarski, Alfred, 1902.1.14—1983.10.26**) 波兰数学家、逻辑学家。生于华沙。1924年毕业于华沙大学，获博士学位。波兰科学院院士。1939年移居美国。从1942年起在伯克利加州大学任教，1946年任数学教授。塔尔斯基的研究工作涉及一般代数、测度论、集论、数理逻辑和数学基础以及元数学等领域。其中尤以对逻辑语义学的研究最为突出。他开展了关于对象语言和元语言的研究。数理逻辑中的许多概念和论断是用他的名字命名的。著作有《演译科学的逻辑和方法导论》(俄译本，1948)、《不可判定理论》(1953)、《逻辑学、语义学、元数学》(1956)等。还曾参加创办著名的《数学基础》杂志。

瓦尔德(**Wald, Abraham, 1902.10.31—1950.12.13**) 罗马尼亚—美国数学家。生于罗马尼亚克卢日，去印度讲学时，因飞机失事遇难。早年在克卢日大学和维也纳大学学习。1931年获博士学位。1938年去美国，在哥伦比亚大学做统计推断理论方面的研究工作。1944年任教授。瓦尔德在数理统计、计量经济学和几何学方面都有贡献。1939年，他创立了序贯分析法，完善了抽样检查理论。瓦尔德的最大贡献是创立了统计决策理论。他提出了一般的判决问题，引进了损失函数、风险函数、极小极大原则和最不利先验分布等重要概念。概率论中有著名的瓦尔德恒等式，在数学规划中有著名的瓦尔德准则。著作有《序贯分析》(1947)、《统计决策函数论》(1950，有中译本，上海科技出版社，1960)等。他的重要论文已被收集在《瓦尔德概率统计论文选集》(1955)中。

柯尔莫戈罗夫(Колмогоров, Андрей Николаевич, **1903.4.25—1987.10.20**) 苏联数学家。生于坦博夫。1925年毕业于莫斯科大学。1930年开始任莫斯科大学教授。1935年获物理数学博士学位。1939年被选为苏联科学院院士，1966年当选为苏联教育科学院院士。任《苏联大百科全书》第二版数学学科的主编。柯尔莫戈罗夫是20世纪最有影响的苏联数学家之一。他的数学研究开始于实变函数论，在三角级数收敛性、测度论、积分概念的推广和集合上的一般算子理论等多方面他都得到了重要的结果。1956年，他研究了一个多元函数用较少个数变量的函数表示的可能性问题，得到了重要的结果。1957年，他的学生阿诺尔德证明了三元函数能表示为二元函数，对于连续函数的情形，解决了希尔伯特第13问题。他还是现代概率论的开拓者之一。1925年以后，他和辛钦共同把实变函数论的方法应用于概率论，建立了在测度论基础上的概率论的公理化体系，奠定了近代概率论的基础。1930年以后，着重研究应用于具连续时间变量的马尔可夫随机过程的解析方法，发展了“马尔可夫过程”的理论，并把这理论应用于工程技术。此外，柯尔莫戈罗夫在数理逻辑、拓扑学、力学、微分方程、泛函分析、信息论和数学语义学等

方面也都有所贡献。他还从事数学史、哲学、数学论证等课题的研究。他创立了函数论和概率论领域的苏联学派。他培养了大批优秀的数学人才。共发表230多种专著和论文。1980年获沃尔夫奖。

冯·诺伊曼(**Von Neumann, John, 1903. 12. 28—1957. 2. 8**) 匈牙利-美国数学家。生于匈牙利布达佩斯,卒于美国华盛顿。父亲是犹太血统银行家。他从小就显露出数学才能,早年在柏林大学和苏黎世工业大学学习化学,1926年取得化学工程师的资格。在此期间他自学数学,于1926年获得博士学位。先后在柏林大学和汉堡大学任职。1933年成为普林斯顿高等研究所终身教授。二次大战期间,担任制造原子弹的顾问,并参与电子计算机的研制工作。冯·诺伊曼是当代最杰出的数学家之一,在纯粹数学和应用数学方面都有卓越的贡献。40年代以前,他主要研究纯粹数学,在集合论、测度论、群论及算子理论等方面作出贡献。特别在1933年解决了希尔伯特第5问题。他建立的算子环理论为量子力学奠定了数学基础。这一时期的代表作是《量子力学的数学基础》。1940年以后,转向应用数学研究,他为原子弹的设计方案提出许多重要建议。1944年参加了世界上第一台电子计算机的设计,后来又陆续研究更完善的计算机。另一项重大成果是创立了对策论,并应用于经济领域,1944年与人合著的《对策论与经济行为》已成为经典著作。他在病危的情形下,还研究人的神经系统与计算机的关系,未及完成而卒,以后以《计算机与人脑》(1958)刊行于世。

嘉当,H. (**Cartan, Henri, 1904. 7. 8—**) 法国数学家。生于南锡,是著名数学家É. 嘉当的儿子。1926年毕业于高等师范学校,1928年获博士学位。先后在里尔大学、斯特拉斯堡大学和高等师范学校任教。1967—1970年任国际数学联合会会长。他是布尔巴基学派的代表人物之一,其研究工作涉及现代数学的许多分支。20年代开始从事单复变函数论的研究,很快又转向多复变函数。30年代他证明了"全纯域一定是伪凸域"这一重要结果。50年代他利用全新的方法把单复变函数论中的一些重要结果推广到多复变量的情形。二次大战期间主要从事位势理论研究,他系统地应用"能量"的概念,证明出有限能量的正分布空间是完备的定理。他还证明了古典位势论的若干定理,并首先在齐性空间上引进了位势理论。嘉当,H. 对拓扑学进行了许多研究,引进"滤子"、"超滤"等重要概念。1948年末,他在高等师范学校举办了以代数拓扑为研究对象的讨论班。这个讨论班的工作不仅促进了代数拓扑学的发展,而且为宣传布尔巴基学派的数学观点和研究风格作出重要贡献。嘉当,H. 1980年荣获沃尔夫奖。1985年他应邀来中国上海参加中国数学会成立50周年纪念会,并作学术报告。

卢伊(**Lewy, Hans, 1904. 10. 20—1988. 8. 23**) 美国数学家。生于德国布雷斯劳(今波兰弗罗茨瓦夫)。1926年在格丁根大学获博

士学位，后留校任教。1933年移居美国，先后在布朗大学和加州大学伯克利分校任职，是库朗的高足。1928年与弗里德里希斯合作用差分方法研究偏微分方程理论。1957年提出著名的光滑线性偏微分方程无解的著名例子，为后来建立该问题的一般理论做了奠基性工作。他还对变分法、双曲方程等问题有许多论述。曾简化了希尔伯特第19问题的证明。1984年因在偏微分方程方面的贡献而荣获沃尔夫奖。

施尼雷尔曼（Шнирельман, Лев Генрихович, **1905. 1. 15—1938. 9. 24**） 苏联数学家。生于戈梅利。毕业于莫斯科大学并一直在那里工作。1929年获得物理数学博士学位，同年成为教授。1933年被选为苏联科学院通讯院士。他的数学研究涉及到代数、拓扑学、分析的拓扑和定性方法等方面。在加性数论中，他取得了哥德巴赫问题的重要进展。证明了任何正整数都能表示成有限个素数的和，这个有限数不超过800,000，他还证明了广义华林定理。在这些研究工作的影响下，产生了数论的一个新分支——数字序列的度量理论。1938年，发表了《赋范代数域中的函数》一文。建立了这一领域中函数的理论。他在1929年的论文《闭合曲线的某些几何性质》中，证明了下列定理："在具有连续曲率的任何简单的闭合若尔当曲线（曲面）上，可以找到位于正方形顶点的四点。"他还与柳斯捷尔尼克首先解决了庞加莱于1908年提出的关于闭合大地测量线的问题。为了确定变分问题的解数，他引入了闭集范畴的重要概念。他还推广了库朗所提出的求最大值的极大极小方法，并在线性方程理论中得到了新的应用。

哥德尔（**Gödel, Kurt, 1906. 4. 28—1978. 1. 4**） 奥地利－美国数学家、逻辑学家。生于捷克斯洛伐克的布尔诺，卒于美国普林斯顿。早年在维也纳大学攻读物理、数学，1930年获博士学位。1938年在美国普林斯顿高等研究所任职，1948年加入美国籍。主要贡献在逻辑学和数学基础方面。在本世纪初，他证明了形式数论（即算术逻辑）系统的不完全性定理：即使把初等数论形式化之后，在这个形式的演绎系统中也总可以找出一个合理的命题来，在该系统中既无法证明它为真，也无法证明它为假。这一著名结果发表在1931年的论文中。他还致力于连续统假设的研究，在1930年采用一种不同的方法得到了选择公理的相容性证明。三年以后又证明了（广义）连续统假设的相容性定理。并于1940年发表。他的工作对公理集合论有重要影响，而且直接导致了集合和序数上的递归论的产生。

韦伊（**Weil, André, 1906. 5. 6—** ） 法国数学家、数学史家。生于巴黎。1925年毕业于巴黎高等师范学校，之后到罗马、格丁根和柏林游学，意大利和德国的数学学派对他后来的工作产生了积极影响。1928年获博士学位。1933—1940年在斯特拉斯堡大学任教。他同嘉当及德尔萨特等人交往，成为布尔巴基学派的早期成员。1941年移居美国，不久到普林斯顿高等研究所任

职。当选为美国科学院的外籍院士。主要贡献在连续群和抽象代数几何方面。30年代末，他研究了拓扑群上的积分问题，完成了专著《拓扑群的积分及其应用》(1940)。这本书反映出的数学结构主义体现了布尔巴基学派的观点，开辟了群上调和分析的新领域。40年代，他力图把代数几何学建立在抽象代数和拓扑学的基础上。建立了严整的代数几何学体系。他在1946年出版的《代数几何学基础》已成为一部经典的著作。1940年，他证明了广义黎曼猜想，1948年提出韦伊猜想。这些工作推动了现代数学的发展。著作还有《数论基础》(1967)、《贝尔流形和代数曲线》等。1979年出版了韦伊的三卷全集。韦伊对数学史也很有研究，1983年出版《数论，从汉穆拉比到勒让德的历史研究》一书，对数论史有详尽而深入的分析。1979年获沃尔夫奖。

尤什克维奇(Юшкевич, Адольф Павловин, **1906. 7. 5—**) 苏联数学史家。生于敖德萨。1929年毕业于莫斯科大学。1940年获物理数学博士学位，同年成为教授。1960年被选为国际科学史研究院院士。1965—1968年任该院院长。尤什克维奇多年来从事数学史研究，取得了巨大成就。共发表200多种数学史的论著。其中，《中世纪数学史》(1961)和《1917年前的俄国数学史》(1968)在国内外享有盛名。他还主编了《从古代到19世纪初期的数学史》教材和4卷集的本国数学史教材。1948年以后，他和雷布金共同主编《数学史研究》论文集。这种论文集是国际上数学史方面最好的出版物之一。尤什克维奇的许多著作被译为其它国家文字。

迪厄多内(**Dieudonné, Jean Alexandre, 1906. 7. 1—**) 法国数学家。生于里尔。早年在巴黎高等师范学校就读，1931年获博士学位。以后在雷恩大学、南锡大学、巴西圣保罗大学和美国密歇根大学以及法国尼斯大学等校任教。早期受布尔巴基学派影响参加该学派活动，后来成为领导人之一。他的科学研究涉及现代数学的许多分支，对泛函分析的贡献尤为突出。他对特殊空间、测度的无穷乘积、凸集等方面都有深入研究，特别对有序空间理论和线性拓扑空间理论做了大量工作，他引进了双紧致空间的概念等。还研究了在特征$\rho>0$的域上的微分学。建立了形式群理论，可换形式群理论由于他的工作而得到很大发展。著作有《典型群的几何学》(1955)、《近代分析基础》(1960)等。近年来从事数学史研究，著有《1700—1900数学史简述》(1973)、《泛函分析史》(1981)等书。

博耶(**Boyer, Carl B, 1906. 11. 3—1976**) 美国数学史家。生于宾夕法尼亚州。1928年毕业于哥伦比亚大学。1939年获博士学位。1952年起为布鲁克林学院数学教授。1957—1958年任美国科学史学会副主席。任国际科学史研究院院士。主要研究科学史和数学史。著作有《微积分概念史》(1949)、《数学史》(1968)、《解析几何学史》(1956)，还发表过有关沃利斯的科

学贡献的论文。

勒雷(**Leray, Jean, 1906. 11. 7— **) 法国数学家,生于尚特奈。早年在高等师范学校学习,获博士学位。1947年以后任法兰西学院教授。1953年被选为巴黎科学院院士。1966年选为苏联科学院的外籍院士。主要贡献在代数拓扑和泛函分析方面。为了把连续映射的局部性质和全部的上同调联系起来,他引入了层系数上同调群。1945年,他建立了谱序列的理论,研究了李群与齐性空间拓扑。在泛函分析中,他和绍德尔应用不动点定理证明了微分方程解的存在性定理。这方法现称为勒雷一绍德尔不动点方法。勒雷曾研究微分算子理论,把F.约翰的结果推广到强双曲型算子的情形。还从数学观点研究关于粘性不可压缩流体理论,取得一定成果。主要著作有《双曲型微分方程》(1952)和《复变量解析流形上的微积分学》等。荣获1979年沃尔夫奖。

惠特尼(**Whitney, Hassler, 1907. 3. 23—1989. 5. 10**) 美国数学家。生于纽约,卒于普林斯顿。1928年毕业于耶鲁大学。1932年获哈佛大学博士学位。1933—1952年在哈佛任教。1952年任普林斯顿高等研究所教授。主要贡献在拓扑学方面。他引进了C^∞—函数类的等价性定义,研究了这类函数的局部理论,得到了n个变元情形下的某些整体结果及其与实解析函数之间的关系。他把流形及以其上每一点为原点的线性独立的切向量组全体总括在一起,而得到纤维丛的概念。1937年,他证明了微分流形的嵌入定理,正式创立了微分拓扑学。他还研究了n维流形的可微结构,提出了斯蒂费尔—惠特尼类,和斯蒂费尔共同建立了可层化空间理论。惠特尼获1982年度沃尔夫奖。

克赖因(**Крейн, Марк Григорьевич, 1907. 4. 3— **) 苏联数学家。生于基辅。早年自学数学,曾作为旁听生在基辅师范学院听格拉韦的数学课。1924年到敖德萨,开始研究数学。不久成为切博塔廖夫的研究生。1933年以后在敖德萨、古比雪夫、哈尔科夫、基辅等地的高等学校和科研机关工作。1934年成为教授。1939年在莫斯科大学获物理—数学博士学位,同年当选为苏联科学院通讯院士。1954年以后在敖德萨建筑工程学院工作。主要贡献在泛函分析方面。他的研究课题涉及密切矩阵理论、微分算子的核、矩理论、巴拿赫空间中的锥面理论、积分方程论等许多领域。他的工作是现代泛函分析思想与切比雪夫—马尔科夫学派经典理论的结合,并在力学中有广泛应用。共发表250多种论著。他还被选为美国国家科学艺术研究院荣誉院士和美国数学会的成员。1982年因泛函分析及其应用方面的贡献获沃尔夫奖。

阿尔福斯(**Ahlfors, Lars Valerian, 1907. 4. 18— **) 芬兰—美国数学家。生于赫尔辛基。毕业于赫尔辛基大学。1930年取得博士学位。1932—1936任赫尔辛基大学副教授。1936年应聘任美国哈佛大学副教授。1938年回国在母校任教授。1946年去美国,1952年入美国

籍。1953年被选为美国国家科学院院士。还是芬兰科学院院士和瑞典、丹麦等国的皇家学会会员。阿尔福斯的主要贡献在复变函数论方面。1929年解决了当儒瓦猜想,1935年他建立了覆盖面理论,因而获1936年首次颁发的菲尔兹奖。二次大战之后阿尔福斯转向研究黎曼曲面,他和其他学者共同发展了拟保角映射理论,获得了一些重要成果,使这一领域成为单复变函数论最活跃的分支。阿尔福斯有《拟保角映射教程》(1966)及黎曼曲面等方面的多种著作。1981年因在几何函数论方面的有效新方法的创立和根本性的发现而荣获沃尔夫奖。他的主要著作还有《复分析》(第2版,1966;中译本,1984)。

达文波特(Davenport, Harold, 1907. 10. 30—1969. 6. 9) 英国数学家。生于阿克灵顿。1927年毕业于曼彻斯特大学,1938年获剑桥大学博士学位。在曼彻斯特大学、威尔士大学、伦敦大学学院、剑桥大学等校任教授。1940年当选为伦敦皇家学会会员。1957—1959年任伦敦数学会主席。主要贡献在数论方面,他深入研究了丢番图方程的解析理论和代数数论。他得到的三角和的估值和有限域的特征的研究结果对近世代数理论的发展有重要影响。他共发表近200种论著,其中有《丢番图方程与不等式的分析方法》(1963)和《积性数论》(1967)等。

克莱因,M·M·(Kline, Morris, 1908. 5. 1—) 美国数学家、数学史家。生于布鲁克林。早年在纽约大学学习,1936年获博士学位。1952年任纽约大学数学教授,后在该校库朗研究所工作。主要贡献在应用数学和数学史方面。著有《数学与物理世界》(1959)、《电磁理论与几何光学》(1965)、《西方文化中的数学》(1953)、《古今数学思想》(1972)、《数学,必然性的消失》(1980)等。其中《古今数学思想》注重阐述一些重要数学思想的来源和发展,受到广泛好评。译成中文后深受国内读者欢迎。

庞特里亚金(Понтрягин, Лев Семёнович, 1908. 9. 3—1988. 5. 3) 苏联数学家。生于莫斯科。13岁时在一次劳动中因汽油炉爆炸而双目失明。在母亲的帮助下,以顽强的毅力坚持学习和科学研究。1929年毕业于莫斯科大学。1935年获物理数学博士学位,同年成为教授。1958年被选为苏联科学院院士。庞特里亚金在拓扑学方面有重要贡献。早在大学时代(1932年),就发现了对偶性的一般规律,建立了连续统的特征定理。后来,他把"有限群与其特征标群同构"的结果推广到局部紧拓扑阿贝尔群上,建立了著名的庞特里亚金对偶定理。这个定理更新了代数拓扑的内容,是一个世纪以来拓扑学最卓越的成就之一。他的专著《连续统》(中译本,科学出版社,1957)获斯大林奖金。1962年,庞特里亚金转向研究经济管理中的数学方法——控制论,成为最优化过程的数学理论的奠基者。他的基本结果是提出了所谓庞特里亚金最大值原理。在振荡理论、代数李群理论和微分几何等

方面也作出贡献。他的著作被译成中文的有《组合拓扑学基础》(中国科学院出版社,1954)、《最佳过程的数学理论》(上海科学技术出版社,1965)和《常微分方程》(上海科学技术出版社,1962)等。

索伯列夫(Соболев, Сергей Лбвович, **1908. 10. 6—1989. 1. 3**)　苏联数学家。生于彼得堡,卒于列宁格勒。1929年毕业于列宁格勒大学。1934年获得物理数学博士学位。1936年成为教授。1939年被选为苏联科学院院士。索伯列夫主要研究固体动力学和数学物理方程。在固体动力学方面,首先建立了平面波的一般理论并阐明了曲线波的一般概念。在数学物理方程中,建立了双曲型偏微分方程的新解法。和B. И. 斯米尔诺夫共同研究了分层介质振动的动力问题,提出用泛函不变式的方法来求解。以后,索伯列夫开始把现代泛函分析的方法应用于偏微分方程理论。引进了所谓索伯列夫空间,研究了这类空间的内嵌变换。1935年,他给出了偏微分方程广义解的概念和第一个广义函数的严格定义。借助这些概念,他研究了某些类型偏微分方程的边值问题。他还为苏联计算数学的发展和电子计算技术的普及做了大量的工作。他是苏联偏微分方程学派的创始人之一,培养了大批的优秀学生。共发表论著150多种,其中有《数学物理方程》(中译本,高等教育出版社,1958)和《泛函分析在数学物理中的应用》(中译本,科学出版社,1959)等。索伯列夫是许多国家科学院和学术团体的成员,以及某些大学的荣誉博士。还担任《西伯利亚数学杂志》的主编,《控制论》杂志的编委等。

谢瓦莱(**Chevalley, Claude, 1909. 2. 11—1984. 6. 28**)　法国数学家。生于南非的约翰内斯堡,卒于巴黎。是布尔巴基学派的创始人之一。1926年入高等师范学校,以后赴德国学习,深受E. 诺特、阿廷等人的影响。1938年赴美国,先后在普林斯顿大学、哥伦比亚大学任教。1955年回到法国,在巴黎大学任教。谢瓦莱的主要贡献在近世代数和数论的不同分支上。在代数群中,他得到了连通的代数群对其局部正规子群的商群是完备的充要条件,给出了半单群分解为可简约的闭子群的半直积的表达式。他还研究了紧群、有限单群、李群等多个课题,关于域上的半单代数群的基本定理称为谢瓦莱定理。在代数几何方面,他在1940年和韦伊共同提出了相交问题。他发展了局部环的理想理论,引进了有关拓扑概念,并把这些概念应用于相交问题,谢瓦莱的著作有《李群论》(1946)、《代数的基本概念》(1956)、《旋子的代数理论》(1954)等。

坎托罗维奇(Канторович, Леонид Витальевич, **1912. 1. 19—　**)　苏联数学家,数理经济学家。生于彼得堡。1930年毕业于列宁格勒大学。1932—1964年在列宁格勒大学工作。1934年成为教授,1935年获物理数学博士学位。1940—1964年在苏联科学院数学研究所列宁格勒分所兼职。1958—1971年在苏联科学院西伯利亚分

院数学研究所工作。1971年以后到苏联科学技术委员会国民经济研究院工作。1964年当选为苏联科学院院士。坎托罗维奇是一个很全面的学者，他的科学研究涉及许多数学领域。在泛函分析中，他引进并研究了一类半有序空间(后称为坎托罗维奇空间)。他把泛函分析的理论应用于计算数学中，发展了近似方法的一般理论，建立了解算子方程的有效方法。此外，他在程序设计、函数论、数学物理、微分方程、积分方程和变分法等方面也都有所贡献。坎托罗维奇还深入研究了数学在经济学中的应用和经济学的若干问题，1975年因资源配置理论方面的研究成果而获诺贝尔经济学奖。

亚历山德罗夫，А. Д. (Александров, Александр Данилович, **1912. 8. 4—　)** 苏联数学家。生于沃伦。1933年毕业于列宁格勒大学，获物理数学博士学位。1937年任列宁格勒大学教授。1952年起任该校校长。1964年被选为苏联科学院院士。他是苏联几何学派的奠基者。他所开创的研究曲面度量性质的方法扩大了几何研究领域并导致一系列曲面理论经典问题的解决。特别是建立了三个最一般的关于凸曲面的内蕴几何的命题并得到了一系列关于凸曲面的十分优美的结果。他的一些著作已译成中文，如《凸曲面的内蕴几何学》(中译本，科学出版社，1962)、《数学——它的内容、方法和意义》(多人合著，中译本，科学出版社，1986年重印)。后者广为流传，执笔者都是著名数学家。

爱尔特希(Erdös, Paul, 1913. 3. 26—　) 匈牙利数学家。生于布达佩斯。从来没有固定的职位，也不在一个地方定居。30年代在欧洲游历，第二次世界大战期间在美国。战后在全世界旅行，与各国数学家共同研究数学问题。主要贡献在数论和概率论方面，尤其在数论方面的工作更为出色。他研究了整数分析问题。1942年，他用初等的函数论方法估计了 n 的分析数 $P(n)$ 的值。他还提出了一个猜测：如果 n 个等差数列没有复盖住自然数列，那么必存在 $0<m<2^n$，m 不属于上述任何一个等差数列。1940年，他证明了存在无穷多个自然数 n，使得 $P_{n+1}-P_n<C\log P_n$，其中 P_n 为第 n 个素数，而 C 为欧拉常数。他是世界上多产的数学家之一。现已发表1000多篇数学论文。主要著作有《数论的一些新进展和当前的问题》(1965)、《组合分析中的概率方法》等。获1983—1984年度沃尔夫奖。

盖尔范德(Гельфанд, Израиль Моисеевич, **1913. 8. 20—　**)苏联数学家。生于红奥克诺。1930年中学未毕业随父迁居莫斯科，以后自学数学。1932年进入莫斯科大学参加研究活动，1939年以后在苏联科学院数学研究所工作，1940年获物理数学博士学位，1943年成为教授。1953年当选为苏联科学院通讯院士。1966—1970年任莫斯科数学会主席。盖尔范德是巴拿赫代数赋范环理论的创始人之一，他运用代数方法，引进极大理想子环空间，给出元素在其上的表示的概念，将线性算子谱论研究引向深入。他还研

究了对理论物理具有重大意义的连续群的酉表示、广义函数理论及其在微分方程中的应用，线性拓扑空间理论、光谱分析的逆问题和量子力学等。他建立了一个专门研究数学方法在生物学中应用的学派。他编著的线性代数、广义函数和变分法等方面的著作广为流传。1978年荣获沃尔夫数学奖。

小平邦彦（**Kodaira，Kunihiko，1915.3.16—** ）日本数学家。生于东京。1941年毕业于东京大学，后留校工作。战乱年代，他在艰苦的环境中，独立地完成了三篇关于调和积分的文章。1948年，他的文章得到著名数学家外尔的赞赏。1949年，应邀到美国普林斯顿高等研究所工作。1961年以后他在美国几所大学里任教授。1967年返回日本。小平邦彦的主要贡献在代数几何和群论方面。他推广了代数几何的一条中心定理：黎曼—罗赫定理。还证明了狭义凯莱流形是代数流形和所谓小平邦彦消灭定理。1956年起他同斯潘塞一起，把黎曼的模数理论推广到高维复结构的变形理论，形成一个系统的理论。后来小平邦彦又把它推广到由一类复可递的连续伪群所定义的结构的变形理论上。50年代末，他转向研究紧复解析曲面的结构及分类，用一个不变量（小平维数）把曲面分为有理曲面、椭圆曲面和K_3曲面等，并且每类都建立一个极小模型，他的工作推动了60年代以来代数几何学的发展。晚年他致力于教育事业，对日本青年一代有重要影响。他的论文收集在1975年出版的三卷全集中，1954年获菲尔兹奖，1957年获日本文化勋章。1984年获沃尔夫奖。

施瓦尔茨（**Schwartz，Laurent，1915.9.15—** ）法国数学家。生于巴黎，1937年毕业于高等师范学校。1937—1940年服兵役并参加了第二次世界大战。1940年开始在法国国家科学研究中心任职，1943年获得博士学位。1945年任南锡大学教授。后任巴黎理学院教授。施瓦尔茨的数学研究受到布尔巴基学派的影响。他的主要贡献是创立了广义函数（分布）论。这一理论现已成为泛函分析的重要分支，也是研究现代数学特别是分析数学的有力工具。1945年，施瓦尔茨在前人的大量研究工作的基础上，建立了广义函数的完整的理论。施瓦尔茨在偏微分方程和概率论等方面也做出了许多贡献。专著有《分布论》（修订本，1966）和《物理科学中的数学》（1966）。由于在现代分析方面的贡献而荣获1950年的菲尔兹奖。

尚农（**Shannon，Claude Elwood，1916.4.30—** ）美国数学家、工程师。1936年毕业于密歇根大学。1940年在麻省理工学院获数学博士学位。1940—1956年在美国贝尔公司的数学实验室工作。1956年以后任麻省理工学院教授，同年被选为美国国家科学院院士，美国科学艺术研究院院士。尚农的主要贡献在信息论和控制论方面。1948年，他发表了题为《通讯中的数学理论》的文章，开创了通讯系统中信息传输的数学理论，这种理论发展至今已成为最重要的数学理论

之一。他给出的关于无记忆信道的尚农定理已成为信息论的基本定理。他还首次把电信上的莫尔斯码和印刷电码等的编码问题归结成为数学上的编码问题。尚农在信息论方面的奠基性工作大大地促进了离散的自动机的一般原理、概率图表理论和控制系统论的发展。尚农的主要专著《信息论和控制论》已被译成多种文字。

塞尔伯格(**Selberg，Atle，1917. 6. 14—**)挪威—美国数学家。生于挪威的朗厄松。曾就读于奥斯陆大学，1943 年获博士学位。1942—1947 年任奥斯陆大学研究员，后被选为挪威科学院院士。1947 年移居美国，1951 年成为普林斯顿高等研究所的教授，美国科学艺术研究院院士。塞尔伯格的主要贡献在数论和函数论方面。在他 1942 年完成的博士论文中，研究了“黎曼猜想”，其结果使这个难题的研究跨出了重要一步。1949 年他和爱尔特希同时用初等方法证明了素数分布定理。塞尔伯格还改进了素数的筛法。由于在数论研究上的贡献，他荣获 1950 年的菲尔兹奖。从六十年代起，他的研究兴趣转向连续群的离散子群。1986 年又获沃尔夫奖。

贝尔曼(**Bellman，Richard Ernest，1920. 8. 20—1984. 3. 19**) 美国数学家。生于纽约。第二次世界大战期间曾服兵役，复员后于 1946 年在普林斯顿大学获博士学位。1950 年以后，他与人合作共同发现许多要求作出最佳决策的问题，是由多个阶段的一连串部分决策构成的。贝尔曼由此研究出一种数学技巧，这就是动态规划。他于 1957 年完成的《动态规划》一书标志着这一数学新分支的诞生。他还把动态规划的方法应用于变分法、自动控制、近似理论和运筹学等多方面，并解决了大量的工程技术问题。贝尔曼在微分方程和变分法方面也有重要工作，他建立的函数方程和不等式有广泛应用。1970 年获美国数学会首届维纳应用数学奖。

托姆(**Thom，René，1923—**)法国数学家。生于蒙彼利埃。1946 年毕业于高等师范学校。1951 年获博士学位。主要贡献在微分拓扑学方面。50 年代初期，他对高维流形的分类理论进行了深入的研究，创立了配边理论，是微分流形理论的一大成就。由于在这方面的开创性工作而荣获 1958 年的菲尔兹奖。在微分流形的拓扑学方面，托姆的研究课题还有：流形上的示性类、组合的庞特里亚金类、纤维空间中的谱序列、三角剖分问题等。还提出了一种所谓“托姆复形”、建立了微分流形的大范围理论中的基本定理，等等。托姆在完成他的拓扑学论著之后，开始发展一套全新的理论——奇点理论。他研究了从 R^n 到 R^n 映射的奇点分类问题，开拓了崭新的领域。在奇点理论的基础上，又创立了突变理论。1972 年，他的《结构稳定性与形态发生》一书出版，标志着突变理论正式诞生。对于突然变化，他利用奇点理论把它分成七种类型，并在数学上加以严格证明。近年来，许多科学家已把突变理论应用到自然科学、经济学、心理学乃至

政治、社会科学上。

沙法列维奇（Шафаревич, Игорь Ростиславович, **1923. 6. 3**— ） 苏联数学家。生于日托米尔。17岁时作为校外考生毕业于莫斯科大学。19岁获物理数学副博士学位。1953年获物理数学博士学位，同年成为教授。1958年被选为苏联科学院通讯院士。沙法列维奇主要研究代数学、代数几何学和代数数论。1954年他证明了，在任何代数数域上都存在无穷多个按照预先给定的伽罗瓦群分解的代数扩张。他还发现了对偶性问题的一般规律。他在代数学方面的工作获1959年列宁奖金。1962年，他提出了所谓"沙法列维奇猜想"。这一猜想在1983年由德国青年数学家法尔廷斯所证明。

罗特（**Roth, Klaus Friedrich, 1925. 10. 29**— ） 德国—英国数学家。生于德国布雷斯劳(今波兰弗罗茨瓦夫)。九岁时合家移居英国，1946年入伦敦大学研究数学。1948年获硕士学位。1950年成为博士后留校任教。1961年受聘为伦敦大学数学教授。1966年执教于伦敦帝国学院。1956与1965年两次到美国麻省理工学院任访问教授。罗特主要从事数论研究，受数学家达文波特的影响探讨解析数论中的图埃——西格尔定理。1955年发表《对于代数数的有理逼近》一文，将创立30多年的这一定理发展成为图埃——西格尔——罗特定理，大大促进了有关问题的进展，一举赢得1958年度的菲尔兹奖。

塞尔（**Serre, Jean-Pierre, 1926. 9. 15**— ） 法国数学家。生于巴日。1944年考进巴黎高等师范学校学习。1950年获博士学位。不久任巴黎大学教授。后来曾到美国普林斯顿工作，被选为美国科学艺术研究院院士。70年代当选为巴黎科学院院士，1982年当选为国际数学联合会执委会副主席。1949—1954年，塞尔在H. 嘉当的指导下，在代数拓扑学方面作出了重要贡献。他发展了纤维丛的概念，得出一般纤维空间概念。他解决了纤维、底空间、全空间的同调关系问题，并由此证明了同伦论中最重要的一般结果。1954年以后，塞尔的工作转向代数几何学和复解析几何学的领域。他为把黎曼—罗赫定理推广到高维代数簇做出了重要工作。1955年，他发表了《凝聚代数层》和《代数几何学与解析几何学》两篇文章。在第一篇文章里，利用"层"的理论研究多复变函数论，后来又将其应用于代数几何学的研究。在后一篇文章里，他发现了代数几何学与解析几何学之间的平行性。60年代中期，塞尔又转向数论研究，在证明"韦伊猜想"中起到很大作用。塞尔编写了大量专著。由于他在代数拓扑学方面的贡献，荣获1954年的菲尔兹奖。

格罗唐迪克（**Grothendieck, Alekxandre, 1928. 3. 28**— ） 法国数学家。生于柏林，后迁居法国。早年没有接受系统的正规教育，二次大战后才进入巴黎高等师范学校和法兰西学院听课，在此期间，受到布尔巴基学派影响，并很快显露出他的才华。60年代被聘为巴黎的

高等科学研究院的终身教授。主要贡献在泛函分析和代数几何学方面。系统研究了拓扑向量空间理论，引进"核空间"、"张量积"等概念、这些工作均因其独创性、系统性和深刻性而使数学界瞩目。50年代中期，他转向代数几何学的研究。他建立起一套抽象的庞大体系，并运用有关的概念和工具解决了许多著名的猜想和难题。他的工作标志着现代抽象代数几何学的扩张和更新。1956年以后他制定了一个大规模的写作计划，到1970年完成了十几卷。格罗唐迪克热衷于无政府主义运动及和平运动，当了解到数学研究直接或间接受军事方面的资助时，毅然于70年代初脱离数学研究工作，辞职回乡务农。获1966年的菲尔兹奖。1988年他拒领瑞典皇家科学院的克拉弗德(Crafoord)奖。

阿蒂亚(Atiyah，Michael Francis，1929. 4. 22—) 英国数学家。生于伦敦。1952年毕业于剑桥大学，1955年获博士学位。曾在剑桥大学、牛津大学、美国普林斯顿高等研究所任职。阿蒂亚的研究领域包括代数学、代数几何学、拓扑学、分析学以及理论物理学。阿蒂亚最重要的贡献是与美国数学家辛格合作证明的阿蒂亚—辛格指标定理。他为代数K理论的发展作出了突出的工作。1959年，他和其他数学家合作，把K-函子推广到紧拓扑空间上，得出了与拓扑学上同调群非常类似的K-群。他还研究并解决了李群表示论、与规范场有关的代数几何学中的若干问题。主要著作有《K-理论》(1967)。阿蒂亚曾任伦敦数学会主席(1974—1976)，1966年荣获菲尔兹奖。

斯梅尔(Smale，Stephen，1930. 7. 15—) 美国数学家。生于密歇根州弗林特。1952年毕业于密歇根大学。1956年获博士学位。1961年任哥伦比亚大学教授。斯梅尔早期的数学研究在微分拓扑学方面，他证明了微分拓扑学中最重要的定理之一——广义庞加莱猜想，因此而获得了1965年的维布伦奖和1966年的菲尔兹奖。1960年以后，斯梅尔转向微分动力系统理论的研究，并成为现代抽象动力系统理论的创始人之一。60年代后半期，他的研究方向转向应用数学，研究力学、统计力学、湍流和生物学中的许多问题。在数理经济学方面获得许多新方法，在运筹学方面也有新的突破。

赫尔曼德(Hörmander，Lars Valter，1931. 1. 24—) 瑞典数学家。生于隆德，1948年进入隆德大学学习。1955年获博士学位，以后相继任斯德哥尔摩大学、美国斯坦福大学和德隆大学教授。后被选为美国科学艺术院院士。赫尔曼德是米塔—列夫勒所奠定的瑞典数学分析传统的优秀继承者。1959年他得到了变系数偏微分方程解的存在性、唯一性及正则性的有关结果。正是这项工作使他获1962年菲尔兹奖。他还研究了微分算子的值域、微分算子的强制边界条件和边值问题、微分算子组和伪微算子等课题。1970年他又把伪微分算子推广到更广的一类——傅立叶积分算子，这些理论构成了现代偏微分方程理

论的基石。著有《线性偏微分算子》(1963)和《多复变函数论导引》(1966)等。1988年获沃尔夫奖金。

米尔诺(**Milnor, John Willard, 1931. 2. 20— **) 美国数学家。生于新泽西州奥伦治。1951年毕业于普林斯顿大学。1954年获博士学位,并任普林斯顿大学教授。60年代末任普林斯顿高等研究所教授。70年代被选为美国国家科学院院士、美国数学会副会长。由于他在微分拓扑学方面的贡献而荣获1962年的菲尔兹奖。他发展了示性类理论,证明了七维球面只有二十八种不同的微分结构。他发展了托姆的配边理论。他对拓扑学的一个重要问题——主猜想举出一个反例,从而否定了这个猜想。他在代数K理论和复超曲面的奇点等方面也作出了开创性的工作,主要著作有《微分拓扑学》(1958)、《莫尔斯理论》(1963)和《代数K一理论导引》(1971)等,1989年荣获沃尔夫奖。

广中平祐(**Hironaka, Heisuke, 1931— **) 日本-美国数学家。生于日本山口县。1950年考入京都大学。1954年进入研究院。1956年,美国数学家扎里斯基到日本讲学,使广中平祐接触当时代数几何学最尖端的课题,对他一生产生了决定性的影响。1957年,他到美国哈佛大学学习,1959年获博士学位,不久即担任哈佛大学教授。他直接继承和发展了扎里斯基在代数几何学方面的成果。从19世纪末以来,许多数学家从事二维代数簇——代数曲面的奇点解消问题。直到20世纪30年代,扎里斯基才完全解决这个问题,后来又解决了三维代数簇问题。1964年,广中平祐运用许多新工具,细致地分析了各种情形,最后用多步归纳法才最终完全解决了任何维数的代数簇的奇点解消问题,建立了相应的定理。以后他又把这一结果向一般的复流形推广,对于一般奇点理论也做出很重要的贡献。由于他的这些成就,荣获1970年菲尔兹奖。

汤普森(**Thompson, John Griggs, 1932. 10. 13— **) 美国数学家。生于奥塔瓦。1955年毕业于耶鲁大学。1959年获博士学位。1962年任芝加哥大学教授。汤普森以对有限群论的研究而著称。1963年,他与美国数学家菲特共同肯定地证明了代数学中一个猜想——伯恩赛德猜想。1966年,汤普森又解决了弗罗贝尼乌斯猜想。1968年他到剑桥大学工作,发表了总标题为《论其局部子群皆可解的不可解有限群》的6篇论文。这些论文已成为有限单群理论的重要文献。其中,汤普森引进了许多新的思想和技巧,开拓了一系列新的研究方向。由于他在有限群论方面的贡献而荣获1970年的菲尔兹奖。

科恩(**Cohen Paul Joseph, 1934. 4. 2— **) 美国数学家。生于纽约。1954年毕业于芝加哥大学,1958年获得博士学位。1964年任斯坦福大学教授。1967年成为美国国家科学院院士。科恩在分析学和连续群方面都取得了突出的研究成果。最杰出的贡献是在数学基础方面。因他证明了连续统假设和选择公理的独立性而荣获1966年菲

尔兹奖。他在证明中创造了一种新方法——力迫法，这种方法在集合论中得到了广泛的应用。科恩的工作使连续统假设成为一种既不能证明，又不能推翻的现代逻辑工具。他的主要著作有《集合论与连续统假设》(1966)。

芒福德(**Mumford, David Bryant, 1937. 6. 11—**) 美籍数学家。生于英国苏塞克斯郡，很小就去美国读书，16岁考上哈佛大学，毕业后留校工作。1961年取得博士学位，1967年成为教授。他由于在代数几何学方面的贡献而获1974年的菲尔兹奖。他的贡献在参模理论方面，他创造性地应用不变式理论研究参模的整体结构。他的工作导致许多新结果，并由此产生一门新学科——几何不变式论。1965年，他的专著《几何不变式论》出版，从此掀起研究代数不变式的新高潮。芒福德的另一重大贡献在代数曲面方面。他还对费马大定理有过贡献，证明了费马方程即使有解，也是很稀少的。著作还有《代数曲面上的曲线》(1966)和《阿贝尔簇》(1970)等。

诺维科夫，С. П. (Новиков, Сергей Петрович, **1938. 3. 20—**) 苏联数学家。生于高尔基，他的父亲П. С. 诺维科夫也是著名的数学家。1960年毕业于莫斯科大学并考取苏联科学院数学研究所研究班，1963年毕业留所工作。1966年回莫斯科大学工作，同年升为教授并当选为苏联科学院通讯院士，1981年成为正式院士。诺维科夫的主要贡献在微分拓扑学方面。他首先用同伦论来解决配边理论问题，反过来又用配边理论解决同伦论问题。他的工作推动了同伦论的发展，使配边理论成为现代拓扑学的重要方向之一。1964年，他用十分巧妙的方法证明了一般的流形上的叶状结构存在封闭的紧叶，得到叶状结构理论的一个重要结果。而最突出的贡献是在1965年证明了微分流形有理庞特里亚金示性类的拓扑不变性。1970年左右，他转向研究与物理相关的数学问题。他把孤立子理论与代数几何学联系在一起，引起数学界与物理界的重视。在相对论和量子力学的基本数学问题方面也做了许多工作。由于诺维科夫在代数拓扑学方面的贡献。1970年在尼斯召开的国际数学家大会授予他菲尔兹奖，他成为第一个获这项奖的苏联人。虽然他未能到会领奖，后来还是应邀在1978年赫尔辛基的国际数学家大会上做一个小时报告，受到热烈欢迎。

贝克(**Baker, Alan, 1939. 8. 19—**) 英国数学家。生于伦敦。早年在伦敦大学学院学习，后又到剑桥三一学院深造。成为达文波特的研究生。1964年成为三一学院研究员，1973年当选为伦敦皇家学会会员。主要贡献在数论方面，他解决了数论中十几个历时已久的困难问题，范围涉及超越数论、不定方程和代数数论等方面。他的研究工作从超越数论开始，在60年代他得到了一系列有关代数数对数的线性型定理。他应用自己建立的定理和方法，在数论的各分支中都取得了研究成果。例如，在不定方程方面，对

于二元方程，他肯定地解决了希尔伯特第10问题，建立了一种有效的计算方法：他还确定了方程 $y^2=x^3+k(k\neq0)$ 的整数解的上界等。在超越数论方面，他证明了如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 是代数数（非0或1）；$\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是线性独立的代数无理数，则 $e^{\beta_0}\cdot\alpha_1^{\beta_1}\cdot\alpha_2^{\beta_2}\cdots\cdot\alpha_n^{\beta_n}$ 是超越数。在二次数域方面，他解决了高斯时代留下的一个老问题，断定类数为1的虚二次数域只有9个。贝克的工作得到数学界的高度评价，其专著《超越数论》(1975)享有盛誉。他荣获1970年的菲尔兹奖。

奎伦（**Quillen Daniel, 1940.4.22—　**）　美国数学家。生于新泽西州奥林治。大学毕业后，到哈佛大学深造，在该校获博士学位。60年代末任麻省理工学院教授。后来成为美国国家科学院院士。奎伦的研究不仅深刻而且广博。主要工作有：在博士论文中用微分几何学方法解决微分方程问题；解决了代数 K-理论中的亚当斯猜想(1970)；得到 K-理论中塞尔猜想的证明(1976)。他还在同伦理论、形式群理论、上同调论等方面取得重要成果。1978年获得菲尔兹奖。

邦别里（**Bombieri, Enrico, 1940.11.26—　**）　意大利数学家。生于米兰。自幼对数学有浓厚兴趣，18岁开始发表科学论文，1962年他给出了素数定理新的初等证明。1963年获米兰大学博士学位。1966年以后任比萨大学教授。1963—1965年间，他与英国数学家达文波特合作，研究素数分布理论。在1965年发表的《论大筛法》一文中，他给出的著名的邦别里中值公式是研究哥德巴赫猜想和孪生素数猜想的有效工具。1967年，邦别里转向解析函数论研究，他对单叶函数的比贝尔巴赫猜想产生了浓厚的兴趣，并得到了引人注目的结果。稍后，他与比萨高等师范学院的几位学者合作，研究极小曲面问题。邦别里很快发现当 $n=7$ 时，$n+1$ 维欧氏空间中一类 n 维极小曲面可以有一个奇点。以后邦别里不断转向新的领域，在偏微分方程、复分析，有限群论等方面也都取得了杰出成就。根据邦别里的贡献，他荣获了1974年的菲尔兹奖、1976年意大利国家科学院的奖励，并在1978年当选为国际数学联合会的执行委员。

德利涅（**Deligne, Pierre, 1944.10.3—　**）　比利时数学家。生于布鲁塞尔。少年时代就对数学有浓厚兴趣，后进入布鲁塞尔自由大学就读，研读了布尔巴基的著作，了解到现代数学各分支的发展情况。1965年到法国高等师范学校深造，受教于格罗唐迪克和塞尔。1968年在布鲁塞尔大获博士学位后任该校教授。1970年26岁时受聘为巴黎高等科学研究所终身教授。主要从事代数几何研究，1966—1978年共完成近50篇重要论文。突出成就是证明了韦伊猜想，1973、1974年发表了题为《论韦伊猜想》的两篇论文，以简洁的证明解决了这一代数几何的中心问题，得到 J—函数理论中的“韦伊-德利涅定理”。在其他数学分支也做了许多工作。1978年获该年度的菲尔兹奖。

马尔古利斯（**Маргулис, Г.**

A. ,**1946**— ） 苏联数学家。生于莫斯科。自幼爱好象棋，十几岁就成为优秀的棋手。后进入莫斯科大学学习，接受了盖尔范德的严格训练。大学毕业后分配到莫斯科通讯与信息问题研究所工作。马尔古利斯主要成就是解决了关于李群的离散子群的塞尔伯格猜想。1960 年，美国数学家塞尔伯格和法国数学家韦伊提出了"除去一个例外，格子群也都是算术群"的著名猜想，称为塞尔伯格猜想。马尔古利斯在 1968—1974 年研究并解决了这个猜想，他因此而获得 1978 年的菲尔兹奖。但他未能及时到赫尔辛基召开的国际数学家大会上领奖，第二年他才得到由法兰西学院转发的菲尔兹奖。

瑟斯顿（**Thurston，William，1946. 10. 30**— ） 美国数学家。生于华盛顿。早年在佛罗里达州萨拉索塔的新学院学习。毕业后到加州大学伯克利分校去攻读博士学位。1972 年完成的博士论文讨论了三维流形上的叶状结构。继而对一般流形上叶状结构的存在、性质及其分类得出更加普遍的结果。1976 年获维布伦奖。此后，他转向三维流形的拓扑学研究，继 100 多年前黎曼的二维工作之后，借助电子计算机，基本完成了三维闭流形的拓扑分类，1982 年荣获菲尔兹奖。

孔涅（**Connes Alan，1947. 4. 1**— ） 法国数学家。生于达尔古依年。1965 年入巴黎师范学校，1970 年到法国国家研究中心工作。1973 年以论文《Ⅲ型因子的分类》获博士学位。1975 年任巴黎大学六分校教授。1980 年成为巴黎高等科学研究所教授。1982 年当选为法国科学院正式院士。孔涅主要从事算子代数研究。1972 年，他引进新的不变量，将Ⅲ型代数分为子类，进一步把这些代数归结为Ⅰ型代数及其自同构，然后按外自同构进行系统归类，从根本上解决了冯诺依曼留下的代数分类大问题。他的成就使他在 1975 年以后的五年中连续荣获国家等各级科学奖，并于 1982 年荣获菲尔兹奖。

费弗曼（**Fefferman，Charles，1949. 4. 18**— ） 美国数学家。生于华盛顿。14 岁入马里兰大学，1966 年到普林斯顿大学念研究生。1968 年获博士学位。1971 年成为芝加哥大学教授，是美国 300 年历史中最年轻的正教授。1974 年任普林斯顿大学教授。费弗曼主要从事古典分析研究。1970 年将三角级数的收敛问题推广到多变量的情形，并找到一些反例。1973 年发现三角级数收敛与奇异积分算子有密切的内在关系，由此推动了整个领域的发展。在偏微分方程中给出非退化线性偏微分方程局部可解性的一个充分必要条件。他还在复变函数和多复变函数论方面做出重要贡献。费弗曼的工作既深刻又广博。他曾获多种数学奖金。特别是 1978 年获菲尔兹奖。

经典数学著作

《算经十书》（Ten books of mathematical classics） 中国汉唐千余年间陆续出现的十部数学著作。唐代在国立大学设算学，以十部数学著作作教科书。由于儒家的重要经典称为"经"，所以把重要的数学著作也称为"算经"。当时采用的十部算经是:《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《张邱建算经》、《海岛算经》、《五经算术》、《缀术》、《缉古算经》。北宋时曾将这十部算经刊刻发行（1084），但此时《缀术》已失传；南宋进行翻刻（1213）时，用《数术记遗》替代了失传的《缀术》。清代戴震整理校订了这十部著作，由孔继涵刻印（1773）时，题名为《算经十书》，这是《算经十书》之名首次出现。《算经十书》较完备地体现了中国古代数学的各个方面，简述如下：

《周髀算经》 是中国流传至今的一部最早的数学著作，也是一部天文学著作。据考证，现传本《周髀算经》大约成书于公元前1世纪，历代有为它作注的，如赵爽、李淳风等。书中的数学内容主要是：学习数学的方法、用勾股定理测量、计算高深远近以分数计算等。

《九章算经》 即《九章算术》，见该条。

《孙子算经》 共三卷，作者及成书年代均无可考。其上卷较详细地记述了算筹记数法和用算筹进行乘、除、开方以及分数等运算的步骤和法则。后两卷包括64个问题，大多属于日常生活中的实用问题，全书给出67个"术"，这是主要的内容。下卷第26题是著名的"物不知数"问题（称为"孙子问题"），是求解一次同余式问题，与当时的历法编算有密切联系。解此题的算法，到宋代发展成为中国古代最有创造性的数学成果之一——求解一次同余式组的"大衍求一术"。

《五曹算经》 北周甄鸾著。"曹"是古代分科办事的官署，亦即各级政府的业务管理部门。《五曹算经》就是为五类曹官准备的实用数学手册。也以问题集形式编写。其中"田曹"是各种田亩面积的计算问题；"兵曹"是关于军队配置、给养运输等军事数学问题；"集曹"是贸易交换的计算问题；"仓曹"是粮食税收和仓窖体积问题；"金曹"是丝织物交易等问题。全书共收67个问题，其数学内容浅显，没有超出《九章算术》的水平。

《夏侯阳算经》 作者与年代均无可考，其中包含了中国社会4—8世纪的实际问题，因而疑是后人托古之作。全书共三卷，有83个数学问题——也是数学问题集的形式，内容与《孙子算经》相类似。

《张邱建算经》 作者与写作年代均不可考，现认为是5世纪中叶

的作品。全书分三卷，也是实用问题集的形式，现传本有92问，其问题除延用《九章算术》的之外，尚有等差数列，二次方程、不定方程问题为其新发展，特别是不定方程的“百鸡问题”成为后世不定方程的入门例子。

《海岛算经》 三国刘徽著（或注），最早附于他所注《九章算术》（263）之后，唐初开始单行，也是应用问题集的形式。其第一题为测算海岛的高、远问题，因而得名。全书共9题，都是利用测量来计算高深广远的问题，是中国最早的一部测量数学专著，也为地图学提供了数学基础。

《五经算术》 北周甄鸾著，共二卷。对《易》、《诗》、《书》、《礼》等儒家经典及其注中与数学有关的地方详加注释，是研究，教授经学的数学参考书。

《数术记遗》 现传本题汉徐岳著、甄鸾注，但现在疑是甄鸾自著。书中例举了十几种不同的记数方法，其中有一种大数记法与现代相同。

《缉古算经》 唐王孝通著（约7世纪初），一卷，也是问题集形式，共有20问。现传本中，后四问残缺不全。它的主要成就是在中国数学史上第一次提出并解决了需要求解三次方程的问题。

《九章算术》（The mathematics on nine sections） 中国古代著名的数学专著，是《算经十书》中最重要的一种，它上承先秦数学发展的源流，在汉代又经过许多学者的删补，最后于公元1世纪下半叶成为现传样式的定本。后世的数学家，大多是从《九章算术》开始学习和研究数学的，许多学者为它做过注释工作。最著名的有刘徽（263）、李淳风（656）等人，他们的注释与《九章算术》一同流传至今。唐宋两代，《九章算术》都由国家明令为官学数学教科书。在北宋，政府还组织刊刻过《九章算术》（1084），这可以说是世界上最早的印刷数学书。在《九章算术》的现存本中，最早的版本是上述北宋本的南宋翻刻本。清代戴震由《永乐大典》中抄出《九章算术》全书，并作了校勘。此后一般都以戴本为底本。

《九章算术》成书，标志着中国古代数学体系的形成，它有这样一些特点：①是一个应用数学体系，全书表述为应用问题集的形式，共有246个问题，大多有实际应用意义；②以算法为主要内容，全书以问、答、术构成，“术”是主要要阐述的内容，“术”实际是可应用的算法；③以算筹为工具，所谓“术”是布列算筹的算法。《九章算术》把246个问题及202个“术”分为九章，主要情况如下：

“方田”：田亩面积计算。

“粟米”：谷物粮食等的按比例折算。

“衰分”：比例分配问题。

“少广”：由面积求边长或径长。

“商功”：土石工程、体积计算。

“均输”：合理摊派赋税徭役。

“盈不足”：用双设法解的问题。

“方程”：用一次方程组解的问题。

“勾股”:用勾股定理解的问题。其中绝大多数问题与当时的社会生活密切相关。

《九章算术》取得多方面的数学成就。例如：分数运算、比例问题、双设法；一些面积、体积计算；一次方程组解法、负数概念的引入及负数加减法则、开平方、开立方、一般二次方程解法等。《九章算术》的思想方法对我国古代数学产生了巨大的影响，并成为现代数学思想方法的重要源泉之一。

《九章算术》是一部世界性的数学名著，隋唐之际已传入朝鲜、日本。现在更被译成多种文字。

《数书九章》(Nine chapters of mathematical book) 中国南宋数学家秦九韶撰。秦九韶早年曾在杭州学习，后又从隐君子学习数学，成年后先后在湖北、安徽、江苏等地做官。1244年因母亡故回家守孝，潜心数学研究，于1247年9月著成《数术大略》，明代后期改名为《数书九章》。这是秦九韶唯一的数学著作，但仅此就使他成为中国宋元时代杰出的数学家之一。

《数书九章》最初为9卷，叫《数术大略》或《数学大略》，分为9类，每类为一卷。约到元代时更名为《数学九章》，内容也由9卷改为18卷。明初抄本被收入《永乐大典》(1408)，另抄本藏于文渊阁。明代学者王应遴传抄时定名为《数书九章》，明末学者赵琦美再抄时沿用此名。抄本形式流传到清代，1781年由李锐校订后收入《四库全书》。1842年由宋景昌校订后收入《宜稼堂丛书》第一次出版，结束近600年的传抄历史。1898年收入《古今算学丛书》，为第二次印刷。1936年又分别被收入《丛书集成初编》和《国学基本丛书》出版，流传甚广。目前还有十几种抄本传世，成为学者研讨时的珍品。

《数书九章》共列算题81道，分为9类，每类9个问题。主要内容如下：

(1) 大衍类：一次同余式组解法。(2) 天时类：历法计算、降水量。(3) 田域类：土地面积。(4) 测望类：勾股、重差。(5) 赋役类：均输、税收。(6) 钱谷类：粮谷转运、仓窖容积。(7) 营建类：建筑、施工。(8) 军族类：营盘布置、军需供应。(9) 市物类：交易、利息。全书采用问题集的形式，并不按数学方法来分类。题文也不只谈数学，还涉及自然现象和社会生活，成为了解当时社会的重要参考文献。

《数书九章》在数学内容上颇多创新。中国算筹式记数法及其演算式在此得以完整保存；自然数、分数、小数、负数都有专条论述，还第一次用小数表示无理根的近似值；卷1大衍类中灵活运用最大公约数和最小公倍数，并首创连环求等，借以求几个数的最小公倍数；在《孙子算经》物不知数基础上总结成大衍求一术，使一次同余式组的解法规格化、程序化，比西方高斯创用的同类方法早500多年；卷17市物类给出完整方程术演算实录，书中还继贾宪增乘开方法进而作正负开方术，使之可以对任意次方程的有理根或无理根来求解，比19世纪英国霍纳的同类方法早500多年；

书中卷5田域类所列三斜求积公式与公元1世纪希腊海伦给出的公式殊途同归；卷7～8测望类又使《海岛算经》中的测望之术发扬光大，再添光彩。

《数书九章》是对《九章算术》的继承和发展，概括了宋元时期中国传统数学的主要成就，标志着中国古代数学的高峰。当它还是抄本时就先后被收入《永乐大典》和《四库全书》。1842年第一次印刷后即在民间广泛流传。秦九韶所创造的正负开方术和大衍求一术长期以来影响着中国数学的研究方向。焦循、李锐、张敦仁、骆腾凤、时曰醇、黄宗宪等数学家的著述都是在《数书九章》的直接或间接影响下完成的。秦九韶的成就也代表了中世纪世界数学发展的主流与最高水平，在世界数学史上占有崇高的地位。

《测圆海镜》(Ts' e-yüan hai-ching, Sea Mirror of the Circle Measurements)　中国金、元时期数学家李冶著，成书于1248年。全书共12卷，170问。这是中国古代论述容圆的一部专著，也是天元术的代表作。

《测圆海镜》共12卷，170问。所讨论的问题大都是已知勾股形而求其内切圆、旁切圆等的直径一类的问题。勾股形的解法是古代传统数学的重要内容之一。李冶在这部著作中把勾股形分成14个相似的小勾股形，并把相似勾股形之间的线段关系集中在一起，称为《识别杂记》。《识别杂记》共有692条关系，实际上相当于692个几何公式。此外，李冶还建立了9种容圆公式，这9种容圆是勾上容圆、股上容圆、弦上容圆、勾股上容圆、勾外容圆、股外容圆、弦外容圆、勾外容半圆、弦外容半圆。李冶在几何图形表示方面突破传统方法，他除给出各勾股形以专门名称（如通勾股形、边勾股形、底勾股形等）外，还给每个勾股形以专门的记号（如天日旦勾股形，其勾为日旦、股为天旦，弦为天日等）。总之，在勾股形的解法方面，《测圆海镜》在内容和方法上对传统数学都有较大的扩充和发展。

在中国古代数学的发展中，天元术起着重要的作用。在《测圆海镜》问世之前，我国虽有以文字代表未知数用以布列方程和多项式的工作，但是没有留下很系统的记载。李冶在《测圆海镜》中系统而概括地总结了天元术，使文词代数开始演变成符号代数。

所谓天元术，就是设“天元一”为未知数，根据问题的已知条件，列出两个相等的多项式，经相减后得出一个高次方程，称为天元开方式，这与现代设x为未知数列方程一样。其表示法为：在一次项系数旁记一“元”字（或在常数项旁记一“太”字），“元”以上的系数表示各正次幂，“元”以下的系数表示常数或负次幂（或“太”以上的系数表示各正次幂，“太”以下的系数表示各负次幂）。例如方程

$$2x^2+32x+256=0$$

的天元表示式为

‖
═‖ 元
‖ ≡T

这在中国传统数学发展中是一个重要的创造，是符号代数的开端。欧洲的数学家,只有到了16世纪以后才完全作到这一点。《测圆海镜》全书170题，基本上都是（依据《识别杂记》）列出天元式，求出勾股容圆问题的解。

自贾宪提出二项系数表与增乘开方法以后，高次方程求正根的解法得到迅速发展，这促使人们寻求建立方程的方法。13世纪的数学家们在这方面作了许多努力。李冶在《敬斋古今黈》中提到东平《算经》和《复轨》两部著作，前者用“仙、明、霄、汉、垒、层、高、上、天、人、地、下、低、减、落、逝、泉、暗、鬼”19个字表示正、负次幂和常数项；后者分别用天、地两个字表示正次幂和负次幂。李冶在改进这些工作的基础上得到他的方法。在《测圆海镜》中还可以归纳出李冶给出的多项式运算法则。多项式加减是同次幂系数相加或相减，常数乘多项式是将常数乘各项的系数，未知数各次幂乘多项式是将元字移下数层（乘几次幂移下几层）。对于多项式的除法，李冶利用乘法消去分母，化分式为整式，其方法与现代分式方程解法一致。当出现根式时,李冶利用乘方消去根号,使根式化为有理式，解法与现代无理方程解法相同。此外，在小数记法和多项式的写法上也有一些创新。

李冶在40岁时便放弃功名,终生从事数学研究。他反对象数神秘主义,认为数学来自客观的自然界,这些观点反映在他自己写的“《测圆海镜》序”中，这在当时是十分可贵的，也是他在数学上取得重大成就的主要因素之一。

后世学者对《测圆海镜》给以高度的评价。清代阮元认为《测圆海镜》是“中土数学之宝书”，李善兰称赞它是“中华算书实无有胜于此者”。

《四元玉鉴》（Jade-Mirror of Four Unknowns）　中国元代数学家朱世杰著，成书于1303年。全书共3卷，24门，288问，主要论述高次方程组的解法、高阶等差级数求和以及高次内插法等内容。

早在中国古代经典数学著作《九章算术》中就详细地记叙了多元一次联立方程组的解法。到13世纪，数学家们掌握了列方程的天元术，之后，这种方法很快被推广到二元、三元乃至四元的高次联立方程组中去，天元术迅速发展成为四元术。祖颐在《四元玉鉴》后序中叙述了从天元术发展到四元术的情形：“平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《钤经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕细草之，后人始知有天元也。平阳李德载因撰《两仪群英集臻》兼有地元，霍山邢先生颂不高弟刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》末仅有人元二问，吾友燕山朱汉卿（即朱世杰）先生演数有年，探三才之赜，索九章之隐，按天地人物立成四元。……”其中提到的许多书籍都未能流传下来，而《四元玉鉴》则是流传至今且对四元术进行系统论述的重要代表作。

消元法是求解多元方程组的关键步骤。在莫若、祖颐为《四元玉

鉴》所写的序中有："其法以元气居中，立天元一于下，地元一于左，人元一于右，物元一于上……，""考图明之，上升下降，左右进退，互通变化，乘除往来，用假象真，以虚问实，错综正负，分成四式。必以寄之、剔之、余筹易位，横冲直撞，精而不杂，自然而然，消而和会，以成开方之式也。"其中讲的就是四元式的表示法和消元法。四个未知数分别用天、地、人、物来表示，常数项记为"太"。在演算时，把未知数的各次幂依次放在上下左右，常数项放在中央（即所谓"元气居中"），而各未知数各次幂的两两乘积则置于平面的相应位置上。如用 x、y、z、u 表示四个未知数，则四元术筹式如下图：

y^4u^4	y^3u^4	y^2u^4	yu^4	u^4	zu^4	z^2u^4	z^3u^4	z^4u^4
y^4u^3	y^3u^3	y^2u^3	yu^3	u^3	zu^3	z^2u^3	z^3u^3	z^4u^3
y^4u^2	y^3u^2	y^2u^2	yu^2	u^2	zu^2	z^2u^2	z^3u^2	z^4u^2
y^4u	y^3u	y^2u	yu	u	zu	z^2u	z^3u	z^4u
y^4	y^3	y^2	y	元	z	z^2	z^3	z^4
xy^4	xy^3	xy^2	xy	x	xz	xz^2	xz^3	xz^4
x^2y^4	x^2y^3	x^2y^2	x^2y	x^2	x^2z	x^2z^2	x^2z^3	x^2z^4
x^3y^4	x^3y^3	x^3y^2	x^3y	x^3	x^3z	x^3z^2	x^3z^3	x^3z^4
x^4y^4	x^4y^3	x^4y^2	x^4y	x^4	x^4z	x^4z^2	x^4z^3	x^4z^4

yz

xu

对于具体的四元式，例如 $x+y+z+u$，可表示为

	|	
|	太	|
	|	

而 $(x+y+z+u)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu+2yz+2yu+2zu$ 则表示为右图。这既是四元方程，也是四元多项式的表示法。这种方法

		|		
	||	0	||	
|	0	太	0	|
	||	0	||	
		|		

||

||

可以看作是中国古代位置制记数法的又一次新发展。

四元式的加减法，以常数项为

准，将其余相应各项相加减即可。四元式的乘除法，以未知数的整次幂乘除，将整个四元式上升下降，左右进退即可。以四元式中某行乘另一四元式，等于以该行各项分别乘以四元式之后所得诸四元式之和。四元式乘四元式等于以一式各行乘另式所得诸四元式之和。

这是中国，也是世界数学史上最早出现的关于多项式的运算。

关于朱世杰的消去法，如以二元二次方程组为例，相当于现代的方程组

$$\begin{cases} A_2y^2 + A_1y + A_0 = 0, & ① \\ B_2y^2 + B_1y + B_0 = 0。 & ② \end{cases}$$

式中 A_0、A_1、A_2、B_0、B_1、B_2 均为只含 x 不含 y 的多项式，则以 B_0 乘①式，A_0 乘②式，相消之后得

$$C_1y+C_0=0。 \quad ③$$

其中 $C_1=A_2B_0-A_0B_2$，$C_0=A_1B_0-A_0B_1$。

以③式再与①或②式联立，用同样方法相消得

$$D_1y+D_0=0。 \quad ④$$

③、④两式相消即可得出只含一个未知数的方程。

对于三次或四次方程组，都可用此消元法来求解。这是世界上最早的多元高次方程组的解法。

高阶等差级数求和和高次内插法也是《四元玉鉴》的重要内容。由许多求和问题中的一系列三角垛公式可归纳得公式

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1) = \frac{1}{(p+1)!}n(n+1)\cdots(n+p)。$$

朱世杰给出了上式中当 $p=1,2,\cdots 6$ 时的公式。此外，还有其他高阶等差级数求和公式。

在招差法方面，朱世杰相当于给出了招差公式

$$f(n) = n\triangle + \frac{1}{2!}n(n+1)\triangle^2 + \frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)\triangle^3 + \frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)\triangle^4 + \cdots$$

这比西方要早 400 多年。

朱世杰还著有《算学启蒙》，在当时是一部较好的启蒙数学书。由于这些成就，朱世杰和秦九韶、李冶、杨辉一起被称为中国宋元时期四大数学家。美国著名的科学史家萨顿评论说，“朱世杰是他所生存时代的，同时也是贯穿古今的一位最杰出的数学家”，《四元玉鉴》是“中国数学著作中最重要的一部，同时也是整个中世纪最杰出的数学著作之一。”

《算法统宗》（Systematic treatise on algorithm） 中国明代数学家程大位撰。程大位（1533—1606）20 岁开始经商，因商务计算需要留心数学，后遍访名师，搜集古籍，40 岁返家后潜心钻研，终于 1592 年 60 岁时完成《直指算法统宗》17 卷（简称《算法统宗》），后又取其切要部分，另编为《算法纂要》4 卷，于 1598 年刊行。

据数学史家研究，现在发现的《算法统宗》仅明刊本就有 6 部，其中抄本一部。最早的就是 1592 年在安徽屯溪刊行的 17 卷本。该书一出版，立即受到欢迎，因此售缺后就用原版印刷、随时装订，明末已多

次重印。入清以后，出现了各种翻刻本及改编本，民间尚有各种抄本流传。康熙五十五年（1716），程大位的族孙翻刻此书，程世绥在序中说，此书“风行宇内，迄今盖已百有数十年，海内握算持筹之士，莫不家藏一编”。明朝末年，传入朝鲜、日本及东南亚各地。清代编《古今图书集成》（1726）把《算法统宗》全部辑录。此外根据《算法统宗》缩编的《算法纂要》亦有多种版本流传。《算法统宗》成为我国古算书中印行数量最多，流传和影响最广的一部著作。

《算法统宗》共列算题 595 个。程大位自序说是“参会诸家之说，附以一得之愚，纂集成编”。题目大部分是从传本数学书中摘录的，但解题时必需的数字计算工作都在珠算盘里演算，和用筹算有所不同。其中卷 1～卷 2 的主要内容是数学名词与词汇的解释，大数、小数和度量衡单位，珠算口诀，并举例说明在珠算盘上的用法。卷 3～卷 12 的应用问题的解法汇编，各卷以从《九章算术》章名为标题，但粟米改为“粟布”，盈不足改为“盈朒”，卷 3 记录了程大位自己创造的测量田地用的“丈量步车”，类似现在测量用的皮尺。卷 6、卷 7 中首先提出开平方、开立方的珠算方法，所有计算步骤与筹算术相同，只是位置略有改动。卷 13～卷 16 为“难题”汇编，是用诗歌形式表述的、意义比较隐晦的问题。卷 17 为“杂法”，是一切不能归入前面几卷里的各种算法。最后附有“算经源流”，著录了北宋元丰七年（1084）以来的刻本数学书籍 51 种，其中只有 15 种现在还有传本，其余均已失传。这是研究古算书流传的重要文献。

《算法统宗》是明代数学的代表性著作，对中国古代筹算向珠算的转变起了决定性的作用。在明代数学落后的情况下，它又是最高水平的著作，对明代商业数学的发展起了巨大的推动作用。以后这方面的著作都是以它为蓝本而写作的。《算法统宗》对中算起了承先启后的作用，明末清初的数学家（如徐光启、李之藻、梅文鼎、梅瑴成等）都是从《算法统宗》中学习《九章算术》等古算书知识的，他们所从事的数学研究也多以《算法统宗》为基础，如李之藻的《同文算指》、梅文鼎的《勾股举隅》等。《算法统宗》还是一部良好的数学入门书，在清代对普及数学知识和造就数学专门人才方面起了很大作用。李锐、焦循、华蘅芳等清代中后期和清末数学家也都是从中吸取营养，进行研究，取得成绩的。《算法统宗》对日本数学的发展有很大影响。日本早期数学家毛利重能的《割算书》（1622）和吉田光由的《尘劫记》都记述了中国珠算术。《算法统宗》对日本传统数学的形成起了积极的作用。

《莱因德纸草书》（Rhind Papyrus） 公元前 1650 年左右的埃及数学著作，属于世界上最古老的数学著作之一。作者是书记官阿默斯（A'h-mosè）。内容似乎是依据了更早年代（1849B. C. —1801B. C.）的教科书，是为当时的包括贵族、祭司等知识阶层所作，最早发

现于埃及底比斯的废墟中。公元1858年由英国的埃及学者莱因德(A. H. Rhind)购得，故名。现藏伦敦大英博物馆。该纸草书全长544厘米，宽33厘米。

纸草书的卷首载录了一组分数分解表，把$\frac{2}{n}$(n为3到101之间的奇数)分解为单位分数(分子为1的分数)之和，如将$\frac{2}{33}$写为$\frac{1}{22}$ $\frac{1}{66}$。之后是用10除1—9的自然数所得的分数表。接着列出了87个问题，每个问题都给出了解答。问题1—6是如上第二个表的应用，如问题3是10个人分6只面包，问各得多少。7—20题是分数的乘法运算。21—23题分别是将一已知分数变为单位1和$\frac{2}{3}$。问题24—38内容在今天可归为一元一次方程，其解法使用了假位法。其中后半部分(35—38)是关于量器海克特(hekat)的使用问题。39—40是关于面包分配的问题，涉及等差数列。如第40题为："把100只面包分给5个人，使每人所得成等差数列，且使最大的三份之和的$\frac{1}{7}$是最小的两份之和，问各得多少?"问题41—46是体积问题。48—55题为面积问题，其中有圆、正方形、等腰三角形、等腰梯形等。圆的面积是直径的九分之八的平方，即相当于取圆周率$\pi=3.16049$。56—60题是金字塔问题，从中可看到三角学的初步知识。问题61以后是杂题，涉及许多实际问题，其中69—78题是关于食物中所含原料的比例问题。79题是一个等比数列问题。84题是牲畜饲料的分配问题。其它问题不甚完整。

留传至今的古埃及数学著作除莱因德纸草书外，还有比较著名的莫斯科纸草书和其它一些残篇。而莱因德纸草书是了解埃及数学的最主要依据。它准确反映了当时埃及的数学知识状况，其中鲜明地体现了埃及数学的实用性，各种问题的解决都没有给出公式，基本上看不出埃及人有寻求一般方法的兴趣。他们的数学知识是技巧性的，缺少系统性，其中逻辑证明是没有的。它对我们应该如何看待数学的起源问题有很大的启发。莱因德纸草书体现了埃及文明的一个重要方面，从这一宝贵的史料中，我们还可以窥见当时埃及社会生活的某些侧面。

《几何原本》(Elements) 希腊数学家欧几里得(Euclid，公元前300年前后)著，是用公理方法建立演绎数学体系的最早典范。是至今流传最广、影响最大的一部世界数学名著，它对人类思想的影响仅次于《圣经》。

在欧几里得之前，希腊数学已经历了三百多年的蓬勃发展的历史，积累了大量成果。建立一个严密的逻辑体系已成为势所必然。当时希波克拉底(Hippocrates，约公元前460年)、勒俄(Leo，公元前4世纪)。修迪奥斯(Theudius of Magnesia，公元前4世纪)等人曾试图综合整理希腊几何学的成就，写有《几何原本》数种。但欧几里得的《几何原本》所取得的巨大成功，使这些同类著作逐渐散失了，只有它经受住了历史的考验，流传至今。

《几何原本》共13卷。每卷

(或几卷一起)都以定义开头。第Ⅰ卷首先给出23个定义，如“点是没有部分的”，“线只有长度没有宽度”等，还有平面、直角、锐角、钝角、平行线等定义。之后是5个公设。欧几里得先假定下列作图是可能的：(1)从某一点向另一点画直线；(2)将一有限直线连续延长；(3)以任意中心和半径作圆。即他假定了点、直线和圆的存在性作为其几何学的基本元素，如此他就可以证明其它图形的存在性。第4个公设假定所有的直角都相等。第5公设即所谓平行公设：“若一直线与两直线相交，使同旁内角小于两直角，则两直线若延长，一定在小于两直角的两内角的一侧相交。”自此以后，有许多学者认为这一公设可以证明，并试图寻求证明，未能成功。直到19世纪，高斯、罗巴切夫斯基和波尔约分别独立地由此发展出非欧几何学。公设之后有5个公理，它们一起构成了整部著作的基础。当时认为公理是对所有学科都适用的。如第1个公理“与同一事物相等的事物，彼此相等”。由这些基本定义、公设、公理出发，欧几里得运用严格的逻辑工具在第Ⅰ卷中共推出48个命题，这也是整部著作的特点。《几何原本》前6卷是平面几何内容。第Ⅰ卷内容有关点、直线、三角形、正方形和平行四边形。第5命题：“等腰三角形两底角相等。两底角的外角也相等。”在历史上曾被称为“驴桥”(“笨蛋的难关”之意)。命题44有关面积贴合问题：“在一已知直线(段)上以已知角贴合一平行四边形等于一已知三角形。”意即以已知线段为一边，以已知角作一平行四边形等于已知三角形。此处图形的相等指面积相等，这是在“割补相等”的意义上说的。欧几里得从未把面积看成一个数。面积贴合方法在第Ⅵ卷中又得到发展。第Ⅰ卷命题47是著名的毕达哥拉斯定理：“直角三角形斜边上的正方形等于直角边上的两个正方形(之和)。”

第Ⅱ卷在定义了磬折形之后，给出了14个命题，是第Ⅰ卷命题44、45有关面积变换问题的继续。若将几何变换翻译成代数语言，即从所谓几何代数的观点来看，命题4“将一线段任意分为两部分，则在整个线段上的正方形等于在部分线段上的两个正方形加上以这两部分线段为边的矩形的二倍”相当于等式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。命题5、6、11、14就相当于解二次方程$ax-x^2=b^2$、$ax+x^2=b^2$、$x^2+ax=a^2$、$x^2=ab$。第12、13命题相当于余弦定理的证明。

第Ⅲ卷的37个命题，论述圆、圆的相交与相切、弦、圆周角等。

第Ⅳ卷16个命题，全是有关圆的问题，尤其圆的内接与外切直线图形，包括圆内接正多边形的作图。如命题16要求作圆内接正15边形。

第Ⅴ卷发展了一般比例论，赢得后世数学家的高度赞扬。毕达哥拉斯学派的比例论只适用于可公度量，而这里的一般比例论则适用于一切可公度与不可公度量。该卷的核心即含于开篇的定义中，定义4表明：“两量之间有一个比，若其中

之一倍乘时能超过另一量。"此定义排斥了无穷大与无穷小，与今天的所谓阿基米德公理类同。定义5给出了比例的定义，被认为是古希腊数学中几个最具创造性的成果之一。数学史家表明欧几里得的定义将有理数分为两类，与戴德金分割异曲同工。余下的定义有关多种比的变换—交比、反比、合比、分比等。在之后给出的25个命题中应用了以上各种运算。

第Ⅵ卷中应用前一卷建立的一般比例论于相似图形，给出了33个命题。其中第1个命题和最后一个命题都表明了第Ⅴ卷定义5的重要性。命题25要求作一直边图形相似于一已知直边图形而与另一直边图形相等。在命题27—29中欧几里得再次讨论了面积贴合方法。这里给出了亏形贴合和余形贴合两种情形。命题28即："在一已知线段上贴合一平行四边形，使之等于一已知直边图形，且亏形相似于一已知平行四边形。"命题给出的巧妙作法给人留下很深的印象，使数学史家对这种方法的来源大惑不解。从代数的观点看，其几何作法相当于解出了一个一元二次方程。命题29相当于余形贴合问题。这些命题在第Ⅹ卷中被用来处理无理数，但更重要的是它们成为其后阿波罗尼奥斯发展圆锥曲线论的基础。事实上，"抛物线"（parabola）、"椭圆"（ellipse）及"双曲线"（hyperbola）几个词即来源于面积贴合方法。

第Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ三卷是算术内容，主要讲数论，各有39、27、36个命题。其中第Ⅴ卷中发展的一般比例论被用于数。第Ⅶ卷命题1给出了欧几里得算法。第22—32命题是关于素数的。第Ⅷ卷主要处理成连比例的数列问题。第Ⅸ卷命题20相当于证明了"素数个数无穷多"这一结论。

第Ⅹ卷包含115个命题，试图将无理线段进行分类，主要详尽讨论了可以表示成$\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$的线段的各种可能的形式，但离欧几里得的目标相距很远。本卷第1个命题："给定两不等的量，如果从较大的量中减去它的一大半，再从余下的量中减去其一大半，如此继续不断，总可使余下的量小于所给的较小的量。"这是穷竭法的基础，在第Ⅻ卷中得到应用。

最后三卷致力于立体几何。第Ⅺ卷大量命题有关平行六面体。第Ⅻ卷主要是应用穷竭法证明了图形的面积和体积之比的一些命题。如命题2："两圆面积之比等于直径的平方之比"；命题18："两球的体积之比等于它们直径的立方之比"等。运用穷竭法能够对命题给出严格的证明。过程一般可分为两步，首先是一个逼近程序，然后利用双重归谬完成证明。其严格性即便用现代数学的标准也无可挑剔。据说穷竭法是由欧多克索斯所发明，是古希腊数学最重要的几个创造之一。第ⅩⅢ卷研究了五种正多面体。

《几何原本》一书从很少的几个定义、公设、公理出发，推导出大量结果，"这是几何学的光荣"（牛顿语）。更重要的是它给出的公理体系标志着演绎数学的成熟，主导了

其后数学发展的主要方向，使公理化成为现代数学的根本特征之一。当然，如果用现代数学的标准衡量，《几何原本》的公理系统并非完美无缺，首先欧几里得没有认识到一个公理系统必须有原始不定义概念，其次他的公理系统也不完备。直到1899年希尔伯特（David Hilbert）的《几何基础》（Grundlagen der Geometrie）一书出版，第一个完备的几何公理系统才建立起来。

欧几里得的希腊文《几何原本》手稿早已失传，现在的各种版本都是后人整理出来的。希腊文明衰微后，大约在9世纪，《几何原本》传入阿拉伯，被译成阿拉伯文。其后又传入欧洲，被译成拉丁文，最早的拉丁文本是1120年左右从阿拉伯文译成的。15世纪后又有从希腊文译成拉丁文的版本。1482年，《几何原本》的印刷本在威尼斯出版，这是西方最早印刷的数学书。到19世纪末，《几何原本》的印刷版本达一千种以上。如今世界各国主要文种都有《几何原本》的译本。最早的英译本1570年由比林斯利（Henry Billingsley）译成出版。中国最早的中文译本是1607年由利玛窦（Matteo Ricci）和徐光启合译的。他们只译出前6卷。250年后，1857年伟烈亚力（Alexander Wylie）和李善兰合译出后9卷（据15卷版本）。1990年，陕西科技出版社出版了根据希思（Thomas Heath）的标准英文版本《欧几里得几何原本13卷》（The Thirteen Books of Euclid's Elements，1956年新版）译出的新版本。希思的英译本的底本是海伯格（J. L. Heiberg）与门格（H. Menge）的权威版本《欧几里得全集》（Euclidis opera omnia，1883—1916年出版，希腊文—拉丁文对照）。

二十世纪六十年代，西方数学教育界掀起一场“新数运动”，喊出了“欧几里得滚蛋”的口号，结果这场运动以失败告终。这表明欧氏几何在中学数学教育中仍然具有不可替代的重要作用。《几何原本》作为重要的数学经典著作不仅具有极大的历史价值，而且仍然具有重要的现实意义。

《已知条件》（Data） 希腊数学家欧几里得（Euclid，公元前300年前后）著。是除《几何原本》外欧几里得所著的在纯几何学方面唯一以希腊原文幸存至今的另一部著作。其内容与《几何原本》第Ⅰ—Ⅵ卷密切相关，考虑了各种不同意义下的已知条件，意在提供一系列命题以证明例如在一已知图形中某些部分或关系是已知时，其它部分或关系在这种或那种意义上也是已知的。因而该著作以各种意义上的所谓“已知”的定义开始，如此，诸如面积、直线、角和比称作“在量的意义上是已知的”，当我们可以使另外的量等于它们时（定义1）。另一方面，直线形称为“在种类上是已知的”，或“形状是已知的”，当它们的每个角以及边与边相互之间的比是已知的时（定义3）。点、线、角称为“在位置方面已知”，如果它们总是具有相同的位置（定义4）。更甚，一个圆称为在“位置和量方面是已知的”当圆心的位置已知且

半径在量的意义上是已知的（定义6）。在这些定义之后，共有94个命题，分别处理了量（命题1—23）、线段（命题24—38）、直边图形（命题39—86），以及圆（命题87—94），例如：

命题4：如果从一已知量中取去一已知量，则剩余的量也是已知的。

命题25：如果两条在位置方面已知的直线相交，则交点的位置也是已知的。

命题39：如果一个三角形的每条边在量方面是已知的，则此三角形在种类方面是已知的。

命题91：如果在一已知位置的圆外取一点，从该点向圆内作一直线，则由该点到直线与圆周交点之间的线段与整条线段所成的矩形是已知的。

该书中最有趣的命题是一组与《几何原本》中的面积贴合方法（《原本》命题Ⅵ28,，Ⅵ29）有关的命题，即命题58、59、84、85。命题58是："如将一已知面积贴合到一线段上，使亏形的形状是已知的，则亏形的边是已知的"。而命题84有赖于此："如果两线段夹一已知面积（角度已知），若其中一线段大于另一线段一已知量，则二者均为已知"。这相应于面积贴合方法中的亏形贴合情形。命题59和85则相应于面积贴合方法中的余形贴合情形。这些命题为理解《几何原本》内容提供了线索。

该书在希腊数学中的真正作用是为"分析"这种重要的数学方法提供必要的辅助手段。它为理解通常以综合方法写出的希腊数学著作提供了线索。它并非仅仅是关于《几何原本》中内容的练习，其中的命题大大便利了解决问题的"分析"过程。《已知条件》后来被帕波斯收入其著作《分析集锦》中并放在首位，在希腊数学家中曾被广为利用，产生了相当影响。

《已知条件》没有象《几何原本》那样得到彻底研究，但至今已出版了希腊文、拉丁文、和现代翻译的各种版本。作为一部经典几何学著作，它在古代数学史中有着不容忽视的地位，1980年又出版了拉丁文—英文对照版本。

《数沙者》（Sandreckoner） 希腊数学家、天文学家、物理学家阿基米德（Archimedes，约287B. C. —212B. C.）著。尽管阿基米德的数学研究主要在几何学方面，但他对数值计算也做出了重要贡献。《数沙者》是他流传至今的唯一一篇算术论著，其中给出了一整套表示大数的方法。

《数沙者》是阿基米德写给国王盖伦的一封信，开头便提出要解决大量沙粒数目的表示问题。当时的希腊记数采用数词或希腊字母，对较大的数目便采用组合法来记数。人们对表示象地球体积这么多的沙粒的数目感到无能为力，而阿基米德给出的方法甚至能写出象宇宙间沙粒数目那样大的数。开始他对天体的体积根据当时的天文学知识给出了一些假定，推出宇宙的直径小于10^{10}斯达迪（希腊长度单位）。之后给出了记数法则。阿基米德称一至万万（10^8）为第一级数，以此为

出发点，即以万万作为第二级数的单位，可数至 10^{16}，然后以 10^{16}为第三级数的单位，可数至 10^{24}，依此类推，便可一直数至$(10^8)^{10^8}$，称之为 P。仿上程序可数至 P^2，$P^3\cdots$，以至 P^{10^8}。进而阿基米德给出定理：如果一个等比数列 A_1，A_2，$\cdots Am$，$\cdots A_n\cdots$，A_{m+n-1}，$\cdots$中 $A_1=1$，$A_2=10$，$A_3=100$，…，则任两项 A_m 与 A_n 相乘时，乘积 $A_m\cdot A_n$ 是该数列中的项，且该项距 A_n 的项数与 Am 距 A_1 的项数相等。同时，该项距 A_1 的项数比 A_m 和 A_n 各自距 A_1 的项数之和少 1，即 $A_m\cdot A_n=A_{m+n-1}$，这相当于得到：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，揭示了幂运算的算律。之后，阿基米德将以上理论应用于数沙中，推出结论：一个能容纳整个宇宙的球体所能包含的沙粒总数小于 10^{51}，而比上述“宇宙”还要大的恒星球所能包含的沙粒总数小于 10^{63}，即 $10^7\times(10^8)^7$，而他能数至 P^{10^8}，即$((10^8)^{10^8})^{10^8}$。

《数沙者》的重要性并不在于实际给出了写任何大数的一套方案（这当然是一种创新），而是发表了可以把数加大到不受限制的思想。此外，《数沙者》还是研究阿基米德生平的重要资料，而且从中人们可以窥见当时希腊天文学的知识状况。当然，阿基米德未能发明十进位置制记数法，这反映了希腊记数制度发展的局限性。

《论球和圆柱》 (On the Sphere and Cylinder) 希腊数学家、物理学家、天文学家阿基米德(Archimedes，287B. C. —212B. C.)著。阿基米德的几何学著作是希腊数学的顶峰。该著作是作者关于几何形的面积和体积方面的几种主要著作之一。由其卷首的序言可知，该著作是作者的《抛物弓形求积》的继续，并先于另外的著作《论螺线》和《论劈锥曲面体与椭球体》。

全篇共分两卷。第一卷开头先给出了六个定义和五个假设。如定义了底为球面的圆锥（扇形圆锥）以及由二圆锥组成的算盘珠形的立体。第一个假设（或公理）是：具有两相同端点的所有（曲）线中以直线为最短。类似地，具有相同边界（边界在一平面上）的所有（曲）面中以平面为最小（假设 3)。第五个假设是所谓阿基米德公理：“在不相等的线、面或立体中，累加较大者与较小者的差，总可超过任给一可与之相比的量”。用现代术语即，对任意二量 A、B，$A-B>O$，则对任意大的量 C，总存在 n，使 $n(A-B)>C$。之后在第一卷中共给出了 44 个命题，内容涉及圆柱和圆锥的表面积、球的表面积与体积以及球缺与扇形圆锥的体积。如命题 13：“任一正圆柱（不计两底面）的表面积等于一圆的面积，该圆的半径是圆柱的高与直径的比例中项”。命题 33：“任一球的表面积等于其大圆面积的 4 倍”。命题 34：“任一球的体积等于一圆锥体积的 4 倍，该圆锥以球的大圆为底，高为球的半径”。该命题的推论是：以球的大圆为底以球的直径为高的圆柱，其体积是球体积的$\frac{3}{2}$，其包括上下底在内的表面积是球表面积的$\frac{3}{2}$。这就是刻在阿基米德墓碑上的著名定

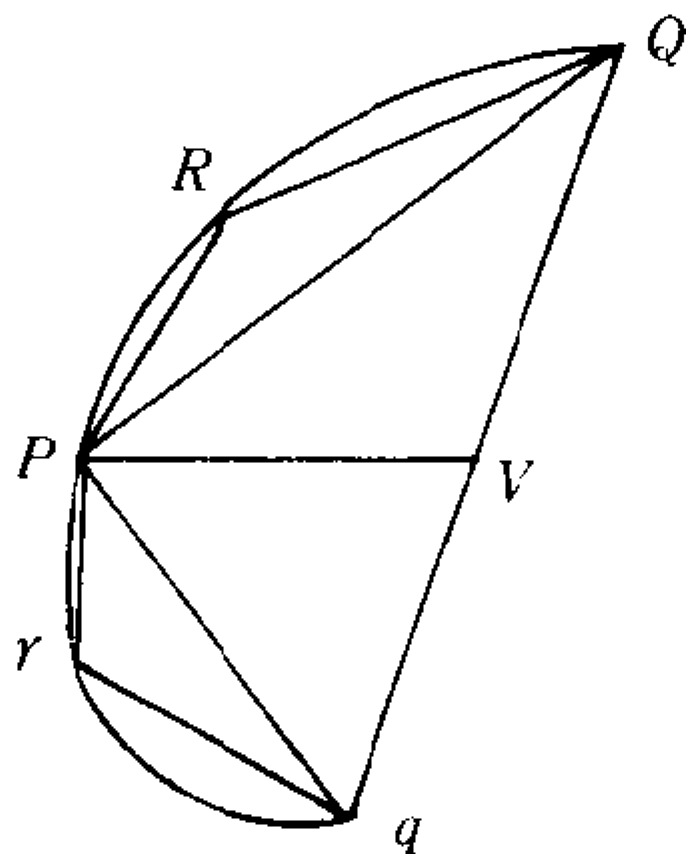
理。其后给出了球缺的表面积公式（命题 42、43）。第二卷中讨论了由第一卷命题推出的结果（3 个命题，6 个问题）。主要关于球缺内容，如命题 9："在所有球缺中，与半球具有相同表面积者体积最大"。作者在前言中谈到了他关于螺线与劈锥曲面体的发现，并准备在以后的著作中叙述。

《论球和圆柱》中所有结果都以穷竭法进行严格证明，是古代数学严格性的典范。其中关于面积和体积的系统结果充分反映了希腊几何学的高度发展水平，对其后一切关于面积和体积方面的研究产生了深远影响。

《抛物弓形求积》（On the Quadrature of the Parabola） 希腊数学家、物理学家、天文学家阿基米德（Archimedes，约 287. B. C. —212B. C.）著。阿基米德精通力学，尤其娴熟于杠杆原理的运用。他把力学技巧应用于数学问题，从而得到了许多新发现。这在该著作中得到充分体现，它为我们了解阿基米德的方法提供了宝贵的资料。

在前言中阿基米德申明，他的一些数学发现是通过力学手段得到的，最终从几何学上加以证明。他首先给出了证明赖以进行的基础，即阿基米德公理，并历数了前人运用此公理得到的一些关于面积和体积方面的结果。全篇共 24 个命题，主要证明了如下的结论："由一抛物线与其一条弦围成的抛物弓形的面积等于与抛物弓形同底等高的三角形面积的$\frac{4}{3}$"（命题 24）。阿基米德用两种方法求得上述结论，首先运用了力学方法，在命题 16 中给出："抛物弓形以 Qq 为底（q 到弓形顶点的距离不远于 Q），过 q 点作直线 qE 平行于抛物线的轴，且与 Q 点的切线相交于 E，证明弓形的面积等于 $\triangle EqQ$ 的面积的三分之一"。之后他运用一系列定理（命题 18—24）给出了严格的数学证明。

阿基米德的证明使用了穷竭法，但该处与他的其它著作中所采用的穷竭法的形式不同，没有用通常的扩约，而是采用了我们可称之为逼近的方法。他用一系列三角形



"穷竭"抛物弓形（如图）。如果 A_1 为原三角形（P 为抛物线顶点），以此三角形的两边为底所作的两小三角形之和为$\frac{1}{4}A_1$，继续此程序，各小三角形之和依次为 $(1/4)^2A_1, \cdots$。为证明抛物弓形的面积等于$\frac{4}{3}A_1$，阿基米德首先在命题 22 中证明了以上序列的有限项之和小于弓形的面积，之后在命题 23 中证明了，如果序列 $A_1, A_2, A_3, \cdots$满足条件 $A_1=4A_2, A_2=4A_3, \cdots$，则 $A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n+\frac{1}{3}A_n=\frac{4}{3}A_1$。

由以上结论及《几何原本》第X卷命题1，阿基米德利用双重归谬法证明了抛物弓形面积等于$\frac{4}{3}A_1$（命题24），这里他实际上是求出了一个无穷几何级数的和。

《抛物弓形求积》与他的其它著作一样体现了阿基米德数学论证的高度严格性。他清楚地意识到了物理论证和数学证明之间的区别，这一点在数学史上得到了高度评价。

《论劈锥曲面体与椭球体》(On Conoids and Spheroids) 希腊数学家、物理学家、天文学家阿基米德(Archimedes, 287B. C. —212B. C.)著。是作者在有关由曲线和曲面所围成的面积和体积方面的几种主要著作之一。主要论述由圆锥曲线旋转所形成的立体的性质，以及这些立体被平面截取部分的体积。

阿基米德的所谓直角劈锥曲面体是指一旋转抛物面，钝角劈锥曲面体则是由旋转双曲面的一支所成，而所谓椭球体即旋转椭圆体。全篇共含32个命题。开篇给出了圆锥截段与圆柱截段的定义之后叙述了一个引理：如果一递增算术序列$A_1, A_2, \cdots, A_n$的公差为其中最小项A_1，则$2(A_1+A_2+\cdots+A_{n-1})<nA_n<2(A_1+A_2+\cdots+A_n)$。阿基米德用穷竭法证明了许多漂亮的命题，如命题5:“若AA'和BB'分别为一椭圆的长、短轴，d是任一圆的直径，则椭圆与圆的面积之比等于$AA'\cdot BB'$与d^2之比”。此定理相当于给出了用椭圆长、短轴表示的椭圆面积公式。命题19、20为：“已给一旋转抛物体或一双曲线旋成体由一平面截取所得的截段，或一旋转椭圆体由一平面截取所得的小于其一半的截段，那么可以在截段内内接一立体图形和在其外外接一立体图形（立体图形由等高的圆柱或圆柱截头组成），使外接图形与内接图形的体积之差小于任一已知立体”。这是此类问题运用穷竭法的基础，其中蕴含了原始的积分思想。紧接着证明了如下重要结论，即命题21、22：“旋转抛物体任一截段的体积是同底同轴圆锥或锥台体积的二分之三”。命题24：“若以任意两平面截一旋转抛物体得两截段，则其体积之比等于它们轴的平方之比”。对于双曲线旋成体及椭球体也有类似结果（命题25—32）。

《论劈锥曲面体与椭球体》不仅给出了许多关于由圆锥曲线旋转所成立体的体积的有趣结果，而且还含有阿基米德在圆锥曲线方面的研究结果，显示了阿基米德处理此类问题的高度技巧。在对命题的严格证明中所采用的穷竭法是对欧多克索斯方法的发展。欧洲中世纪以后对阿基米德著作的研究是发明微积分的主要源泉。

《圆锥曲线论》(Conics) 希腊数学家阿波罗尼奥斯(Apollonius，约公元前262～约前190年)著。作者与欧几里得、阿基米德常被合称为古希腊亚历山大前期的三大数学家。本书原共8卷，卷Ⅰ—Ⅳ的希腊文本及Ⅴ—Ⅶ的阿拉伯文本保存了下来，最后一卷佚失，但其中一些内容的思想可以从帕波

斯给出的一些引理中看到。

在阿波罗尼奥斯之前，圆锥曲线的数学性质至迟在公元前4世纪中期即已为希腊人研究。阿基米德曾不加证明地叙述了圆锥曲线论的一些基本命题。当时，我们今天所谓的抛物线、双曲线和椭圆是用垂直于锥面一母线的平面来割该圆锥所产生的。相应于直角、钝角和锐角圆锥分别就得到抛物线、双曲线和椭圆。但阿波罗尼奥斯采用了截然不同的方法。他只依据同一个圆锥的截面便得到三种圆锥曲线。这种新方法与旧方法相比有许多优点，首先，所有三种曲线都可以用面积贴合的方法来表示，而旧方法只有在抛物线情形才有可能。用现代术语，阿波罗尼奥斯是把三种曲线的方程归于一个坐标系，该坐标系分别以曲线的一已知直径和该直径一端点的切线为坐标轴。这带来第二种优点：由阿波罗尼奥斯得到曲线的方法立即可进行斜交贴合，而旧方法只允许直交贴合，用现代术语即，曲线的坐标可换为任一直径及其切线。正由于此，《圆锥曲线论》开创了对圆锥曲线的现代研究。

该书第一卷首先给出了圆锥曲线的定义。在介绍了圆锥曲线的基本性质之后，证明了关于共轭直径的一些简单事实。第二卷开头给出了双曲线渐近线的作法和性质。然后引入双曲线的共轭，并证明它与所给双曲线具有相同的渐近线，之后说明如何求一圆锥曲线的直径。第三卷论述关于切线与直径所成的图形的面积的一些定理，并论述了极点和极线的所谓调和性质。第四卷介绍极线的其它性质，讨论了各种位置的圆锥曲线之间可能有的交点的数目，这一点是前人没有论述过的。总之，前四卷除个别内容之外基本上是前人成果的集大成，只是在论述上更加全面和一般，其余几卷则是更加深入的研究。第五卷有许多新颖和独特之处，论述了从一特定点到圆锥曲线所能作的最长和最短的线。第六卷讲述合同圆锥曲线、相似圆锥曲线及圆锥曲线弓形，指出如何在一给定的直角圆锥上作出与一已知圆锥曲线相等的圆锥曲线。第七卷介绍了有心圆锥曲线两共轭直径的性质，并把这些性质与轴的相应性质进行比较。第八卷的内容大概是关于怎样求出有心圆锥曲线的直径，使其满足一定条件。

《圆锥曲线论》一书是古代关于圆锥曲线研究的登峰造极之作，它将圆锥曲线的性质网罗殆尽，几乎包括了我们今天所知的关于圆锥曲线的直径、轴、中心、渐近线等的一切性质（虽然它没有提及抛物线的焦点），使得后人几乎没有再研究的余地。在这方面直到十七世纪才有所突破，对它的研究大大促进了坐标几何的诞生。

《度量论》(Metrica) 希腊数学家、测量学家、机械工程师海伦(Heron 或 Hero of Alexandria，公元62年前后）著。该书过去一直认为失传，1896年舍内（R. Schöne）在君士坦丁堡（今土耳其的伊斯坦布尔）发现了它的唯一一份手抄本，于1903年校订出版。

《度量论》共分为三卷。第一卷

讨论了平面图形和普通立体表面面积。每一情形都以数字例子开始，假设读者具有初等几何的知识并提供了形式的几何证明。从矩形和三角形开始，海伦在命题Ⅰ，8中给出了求三角形面积的著名的“海伦公式”$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中$A$表示三角形面积，$a,b,c$，为三角形三边边长，$S=\frac{a+b+c}{2}$（实际上海伦并非该公式的发现者，根据阿拉伯数学家比鲁尼（al－Biruni，973—1050后），此公式早已为阿基米德所发现。这一公式后来也被印度和中国数学家独立得到）。在具体运用该公式时，出现了求无理根的问题。海伦采用了近似公式。在Ⅰ．8中，让$N=a^2\pm r$，则$a_1=\frac{1}{2}(\frac{N}{a}+a)$是$\sqrt{N}$的第一个近似值，$a_2=\frac{1}{2}(\frac{N}{a_1}+a_1)$是第二个更精确的近似值，他能反复利用这一关系求得越来越精确的近似值。其后，海伦通过将一般直线图形剖分为矩形与三角形求得其面积。第一卷命题17—25讨论了从3到12条边的正多边形，有些情形的处理与巴比伦人的方法无异。讨论了圆和圆环之后，海伦广泛讨论了圆的截段（不是扇形）的面积，提供了三个公式，其中两个为已知的，另一个是他自己发现的。对于椭圆、抛物线的面积及圆锥、球等立体的表面积海伦给出了一些近似公式，内容并未超过阿基米德的结果。第二卷讨论了立体图形的体积。从圆锥和圆柱开始，他处理了以各种直线形为底的棱柱。之后讨论了五种正多面体。第三卷处理了将平面和立体图形按一定比例分割的问题，其风格与内容跟欧几里得《论图形的分割》（On Divisions of Figures）非常相似，其中用到求立方根的近似公式。

海伦的工作反映了亚历山大时期希腊数学的特点，具有重要的历史意义。他把严密的希腊几何学风格与巴比伦、埃及数学中的近似方法融为一体，毫不顾忌地给出各种精确的和近似的有用结果，为实际应用提供了方便。更重要的是他用算术方法提出和解决了代数问题。他的工作促进了算术和代数脱离几何学而成为独立的学科。

《算术入门》（Introduction to Arithmetic） 古希腊数学家、哲学家尼科马霍斯（Nicomachus of Gerasa，公元100年左右）著。这是在古希腊数学中第一本完全脱离几何讲法的算术（即数论）书，对算术成为一门独立学科起了重要作用。它对于算术的重要性可以与欧几里得《几何原本》对于几何的重要性相比，它成为此后一千年间一本标准课本，是其后数学家学习的典范。

尼科马霍斯属于毕达哥拉斯学派，他使已趋衰亡的毕氏学派的传统重新活跃起来。他强调算术是各科之母，他认为，这“不仅是因为我们说它在造物主的心中先于其他一切而存在，…而且也因为它本来就是存在较早的…。”《算术入门》共分2卷，其主要内容是早期毕氏学派在算术方面的工作。前边有6章致力于阐述数学的哲学重要性，之

后尼科马霍斯考察了数本身，论述了相对数、平面数、立体数、比例。他给出了几种数的定义，将数分为奇数和偶数。给出了定理：任何整数都等于其前后两整数之和的一半。并给出了偶数的分类（偶乘偶、奇乘偶、偶乘奇）和奇数的分类（素数、合数、相对数）。数的基本关系分为相等和不相等，后者又分为大于或小于。第一卷最后归结出一个一般原理。据此，任何形式的比例不等式都可由三个等式产生（意在表明相等是所有形式的不等之母）。第二卷开头首先给出了倒换原理。接着详细讨论了正方形数、立方数和多边形数。他将比例分成不连续和连续的两种，划分了 10 种类型，与欧几里得在《几何原本》中的作法不同。尼科马霍斯没有给出演绎证明，而是用一些特殊数为例说明他的原理。本书从思想内容上讲并无独到之处，大部分是前人成果的汇编，但也包含作者本人的一些发现。例如，他发现相继几个奇数之和是一个立方数。他比毕氏学派更能进一步看出一些一般性质。如他说第 $(n-1)$ 个三角形数加上第 n 个 k 角形数会得出第 n 个 $(k+1)$ 角形数。又如，第 $(n+1)$ 个三角形数加上第 n 个正方形数得出第 n 个五角形数。用我们的记号，即

$$\frac{n\ (n-1)}{2}+n^2=\frac{n}{2}\ (3n-1)。$$

再如，第 n 个三角形数、第 n 个正方形数、第 n 个五角形数等等，形成一个递进算术序列，其公差为第 $(n-1)$ 个三角形数。

《算术入门》改变了当时希腊数学的状况使算术而不是几何成为风行于亚历山大时期的学问。其后在欧洲曾有数种译本问世。

《天文学大成》（Almagest） 希腊亚历山大时期的天文学家、数学家托勒密（Ptolemy，约公元 100—约公元 170 年）著，是托勒密的主要天文学著作。其希腊原名［μαθηματικη συνταξις］意为“数学（即天文学）汇编”，其后被非正式地称为“大汇编”，大约是为了与此前的一部关于初等天文学的希腊著作“小天文学汇编”区别。后来阿拉伯人将其译成“al－majisti”，这便成为后来中世纪拉丁译文的“almagesti”或“almagestum”的来源。

《天文学大成》共十三卷，是一部囊括了古代全部数理天文学的著作，是托勒密之前的古代天文学知识之集大成。其中天文学和三角学是混在一起的，内容全部具有数学性质，其基本点是地球中心说。托勒密假定读者只懂得欧几里得几何学和一些基本的天文学概念。从第一原理出发，他通过必要的宇宙论和天文学工具，表述了古代所知道的一些天体（太阳、月亮、水星、金星、火星、木星、土星等）的运动理论，并解释了与它们相关的各种现象，如日、月食。对每一种天体，托勒密又描述了这些现象的类型，为之设计了适当的几何模型，又从一些观测数据中推导出其直径数值。最后制作了一些表，使人们能够确定它们在指定日期的运动或现象。

《天文学大成》的第一卷主要讲述球面三角学，这是最具有数学兴

趣的一卷，其余各卷主要讲天文学。他的目的是想把天文学建立在“不容置辩的算术和几何方法”的基础之上。托勒密在第一卷的第九章里一开头就计算圆弧所对的一些弦的长，从而充实了希帕霍斯（Hipparchus）和门纳劳斯（Menelaus）的工作。他将圆周分成360份，直径分为120份，然后他提出：给定一弧为360份中的若干份，求相应弦的长。他先计算了36°弧和72°弧所对应的弦，然后得到144°弧的弦长。他证明了相当于$\sin^2 A+\cos^2 A=1$这样的关系式。接着托勒密证明了一引理（现称为托勒密定理）。给定圆的任一内接四边形$ABCD$，他证明了$AC \cdot BD=AB \cdot DC \cdot +AD \cdot BC$。其次，托勒密指出怎样从圆的任一给定弦，求出相应半弧所对的弦，用现代术语这就是从$\sin A$求$\sin \frac{A}{2}$。他还给出了相应于现代$\sin(A+B)$和$\sin(A-B)$的化积公式。利用这些技巧，他把从0°到180°间所有相差为$(\frac{1}{2})°$的弧所对应的弦都算出并列成表。这是第一个三角函数表。然后托勒密着手（在第一卷第十一章里）解决需要求出球面大圆上的一些弧的天文问题，这些弧是球面三角形的边。为了定出这些弧，托勒密证明了球面三角中的一些关系式，他证明了在C为直角的球面三角形中，记a为A的对边，有（用现代记法）：

$$\sin a=\sin c \ \sin A$$

$$\text{tg}\ a=\sin b \ \text{tg}\ A$$

$$\cos c=\cos a \ \cos b$$

$$\text{tg}\ b=\text{tg}\ c \ \cos A$$

当然，这里的各种三角函数在托勒密的著作中都是弧的相应弦。

《天文学大成》基本上将三角术定了型，并于此后一千多年间保持不变，虽然托勒密在此书中讲的三角术主要是球面三角，但该著作实际上也奠定了平面三角的理论基础。因而该书不仅在天文学史而且在数学史上也具有重要的意义。

《算术》（Arithmetica）　希腊数学家丢番图（Diophantus of Alexandria，活动于公元250年前后）著。该书序言中记载共有13卷。长期以来，人们都以为只有雷格蒙塔努斯1464年在威尼斯发现的前6卷希腊文手抄本保存下来。但最近又在伊朗东北部的马什哈德发现了4卷阿拉伯文译本。

《算术》是一部问题集，它显示了作者在不定分析方面的高超技巧。除帕波斯之外，丢番图是希腊化衰落时期最伟大的数学家。他使问题的求解完全脱离了几何形式，这与欧几里得时代的希腊经典大异其趣，在希腊数学中独树一帜。对后来的阿拉伯数学，文艺复兴时期的意大利数学乃至整个欧洲数学产生了巨大的影响，也为包括韦达、费马、高斯等在内的许多数学家提供了创作源泉。在数学史上，《算术》一书对代数学、数论的发展产生的影响，可与欧几里得的《几何原本》对几何学发展的影响相比，是数学史上一部重要经典著作。

《算术》并不是一部毕达哥拉斯学派意义上的理论算术方面的著作，它处理的是实际问题，解答所使用的计算算术（logistic），其大部

分内容可归入代数范围。丢番图引入了代数符号，用 Δ^r 表示 x^2；k^r 表示 x^3；$\Delta^r\Delta$ 表示 x^4；Δk^r 表示 x^5；k^rk 表 x^6。未知数 x 只简称为"数"('αριθμός)，用 s 形状的符号 S 表示。↑表示减号，没有加号，因为没加括号，所以在一个式子中负项都放在后面。有了这样一些符号，方程式的表示便变得简短易懂，如 $630x^2+73x=6$ 表示为 $\Delta^r\ \overline{\chi\lambda}S\ \overline{o\gamma}$'ισ. $M\bar{s}$（Ⅵ.8）。上式中利用了"等于('ισος)"一词的缩写。这样，丢番图迈出了从文辞代数向符号代数发展的重要的一步。

《算术》中的问题既有确定问题，又尤其有不确定问题；既有用代数方程解的，也有用代数不等式处理的。第一卷（及第二卷问题1—7）是有关一次与二次方程的确定问题，第二卷及以后各卷只包括不定问题，从二次方程开始到第四卷便涉及高次方程，这些方程通过巧妙地选择数值便化归为低次的。本书主要内容一不定分析的大量问题大体上可分为几类。

Ⅰ 将多项式表示为平方数

1. 一个方程一个未知数：

（Ⅵ，18）$ax^3+bx^2+cx+d=u^2$

（Ⅳ，18）$x^6-ax^3+x+b^2=u^2$

一个方程两个未知数：

（Ⅴ，7，引理1）$xy+x^2+y^2=u^2$

一个方程三个未知数：

（Ⅴ，29）$x^4+y^4+z^4=u^2$

2. 两个方程一个未知数

（Ⅱ，11）$a_1x+b_1=u^2$，$a_2x+b_2=v^2$

（Ⅵ，12）$a_1x^2+b_1x=u^2$，$a_2x^2+b_2x=v^2$

3. 3个方程3个未知数：

（Ⅳ，19）$xy+1=u^2$，$yz+1=v^2$，$xz+1=w^2$

4. 4个方程4个未知数

5. 其它变化如Ⅴ.5．Ⅳ.20等

Ⅱ 将一多项式表示为立方数

如（Ⅳ，26）$xy+x=u^3$，$xy+y=v^3$

Ⅲ 求两多项式，其一表为平方数，另一表为立方数。

（Ⅵ，21）$x^3+2x^2+x=u^3$，$2x^2+2x=v^2$

Ⅳ 将一数分解为几部分

（Ⅴ，13）$10=x+y+z$ 且满足 $x+y=u^2$ $y+z=v^2$ $z+x=w^2$

Ⅴ 将一数分解为一些平方数的组合

（Ⅱ，10）$60=x^2-y^2$

（Ⅴ，9）$13=x^2+y^2$ 且 $x^2>6$，$y^2>6$

Ⅵ 其它形式的问题

丢番图解决问题过程中并未提出一般方法，而是对每个问题使用特定的技巧，确如数学史家汉克尔(H. Hankel)所说，既使研究了100个问题的解答，也无法预知第101个问题的形式。我们可以看出他总共使用了如下几种方法：

1. 对一次与二次方程，丢番图具备解它们的基本技巧。对方程组，他能利用第一个方程将其中之一未知数表出，然后代入第二个方程求解，等等。

2. 减少未知数的数目。这通常是由取定数进行的。对线性方程来说这相当于"假位法"。

3. 将方程降次。或将一个或多个未知数取定数，或将第一个未知

数的一个函数代入来实现。

4. 利用已知结果，如等式 $m \cdot n = [(m+n)/2]^2 - [(m-n)/2]^2$。

5. 限定法。如求得80＜$(8x)^2$＜128 则 $(8x)^2=100$是显然的一个解。

6. 倒推法等。

《算术》的部分问题属于数论范围，这些问题在17世纪得到广泛研究，从而建立起近代数论。为了纪念丢番图，现在对于只有整分数的不定方程，如果只考虑其整数解，就叫丢番图方程，但丢番图的解答并不要求是整数，只限于正有理数。他排除负根，虽然他已经知道负数的运算法则。

此外，丢番图的工作与巴比伦人的数学性质相近，但其真正来源至今仍然是一个谜。

《数学汇编》（Mathematical Collection） 希腊亚历山大后期的数学家帕波斯（Pappus of Alexandria，约公元300—约350）著。作者把他以前从希腊古典时期到亚历山大时期的希腊优秀数学著作精心予以整理，加以阐释和评注，附有它们的历史发展过程和一些原始材料。从而使许多珍贵的希腊数学著作得以保留下来。

《数学汇编》共含八篇，实际上覆盖了希腊几何学的全部领域，是一本手册而非百科全书，每一篇都有系统的序言，指明所论课题的内容及其范围。对特定问题帕波斯往往给出不同的证明。第1篇及第2篇的部分章节已失传，残留的第2篇以命题14开始，阐释了阿波罗尼奥斯的大数系统，推测第1篇大概也是讲算术。第3篇共有4节，第1节论述了在两已知线段中间如何求两比例中项的问题；第2节研究了算术平均、几何平均和调和平均理论；第4节讨论如何把5种正多面体内接于一个球内，其方式不同《几何原本》第13卷。第4篇共5节，第1节给出了一些互不相关的命题，其中头一个是毕达哥拉斯定理的推广；第2节讨论内接于一名为“鞋匹刀”的图形中的圆的关系；第3节讨论化圆为方；其余讨论三等分角问题，利用了螺线、蚌线和割圆曲线。第5篇论述等周问题，在前言中帕波斯赞扬了蜜蜂的蜂房的巧妙构造；在第1节中他给出了芝诺多罗斯关于等周问题的一些结果；第2节他比较了具有相同面积的立体的体积，表明球的体积比具有相同表面积的任何圆锥、圆柱或正多面体的体积都大。第6篇内容属于天文学，论述了含于所谓《小天文学》（作为托勒密的《天文学大成》的引篇）中的内容。第7篇在《数学汇编》各篇中最为引人注意，它对近代数学有很大影响，其命题129是下述定理的特例：设有四线交于一点 O（图1），则对任何与此四线相交的横跨线来说，交比

$$\frac{AB}{AD}\Big/\frac{BC}{CD}$$

都相等。帕波斯要求横跨线都通过 A 点。命题130所叙述的结论用我们的话来说就是：若一完全四边形的六条边（四边及两对角线）与一直线相交的点有五点固定，则第六点也固定。命题131相当于这样一个定理，即在每个四边形中，一根对角线被另一对角线以及被其两组对边

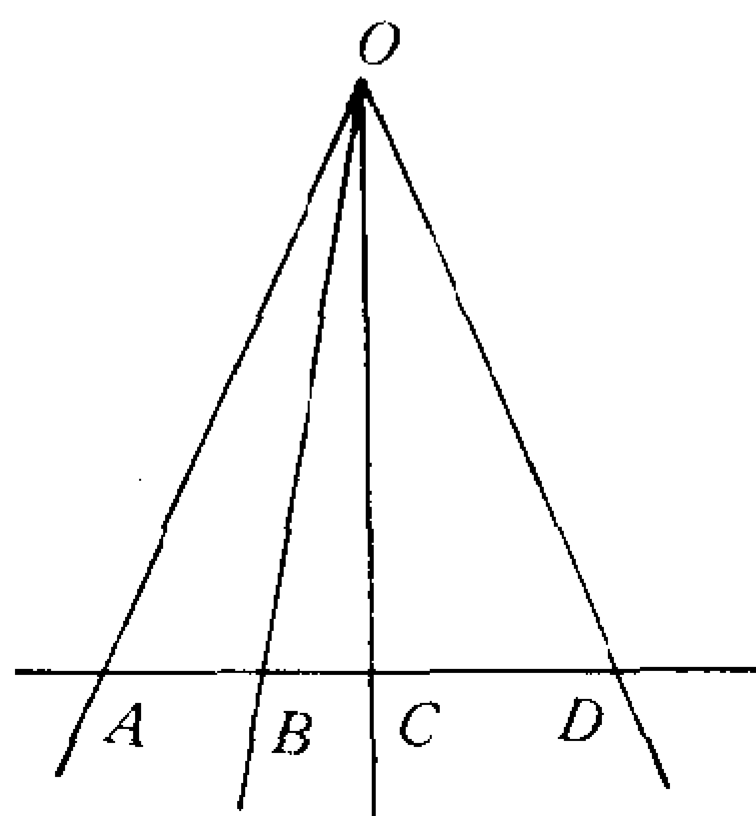


图1

交点的连线分割成调和比。命题139给出今日以帕波斯命名的定理：若A、B、C是一直线上三点，而A'、B'、C'是另一直线上三点（图2），则AB'与$A'B$，BC'与$B'C$以及AC'与$A'C$相交的三点共线。第7篇所载帕波斯

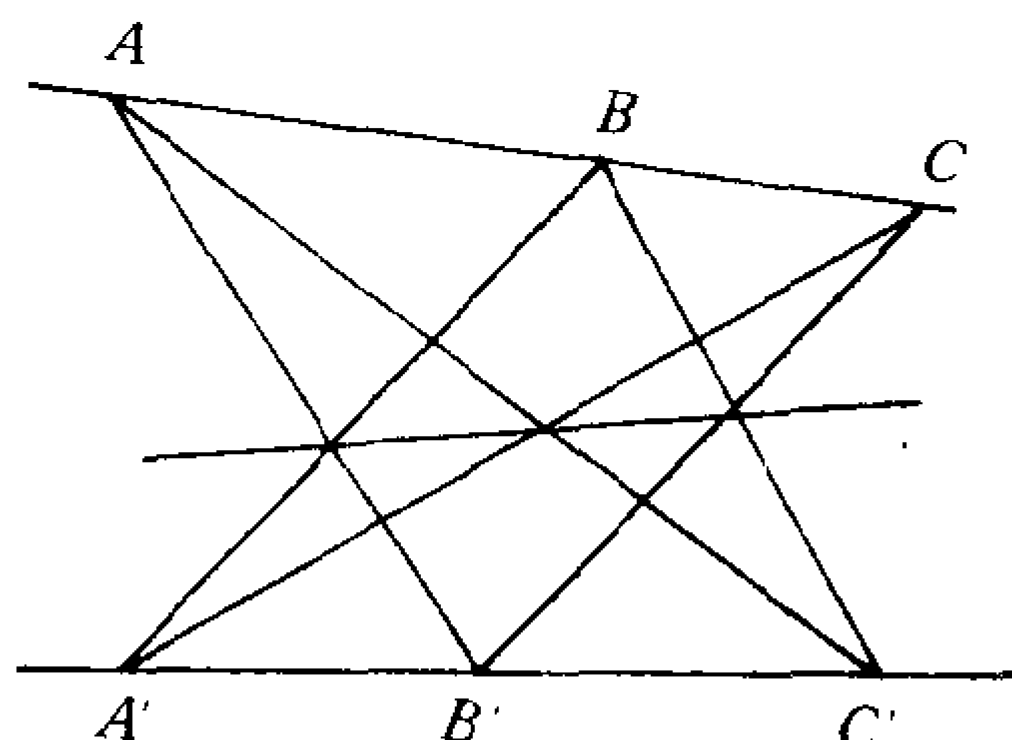


图2

问题曾极大的推动了笛卡儿的坐标几何学研究。该问题的叙述如下：在平面上给定三条直线，求所有这样的点的位置（即轨迹）：从这点作三条直线各与一条已知线交于已知角，使在所得的三条线段中，某两条的乘积（指长度之积）与第三条线段的平方成定比。如果给定四条直线，画法同上，但要求所得的四条线段中，某两条的乘积与其余两条的乘积成定比。若是已知五条直线，则要求所得的五条线段中，某三个的乘积与其余两个的乘积成定比。所给定的直线多于五条时，作法照此类推。帕波斯问题刺激了新解析几何方法的诞生。牛顿的《自然哲学的数学原理》中有些问题也是由帕波斯的问题所引起的。本篇还讨论了平面图形绕一固定轴旋转所产生的立体体积问题，后来为古尔丁重新独立发现，因而有时称帕波斯定理，有时称古尔丁定理。古尔丁定理的叙述为：一个平面图形绕同一平面内且不与之相交的轴回转，则回转所产生的立体体积等于这一图形的面积乘以该图形重心所描画出的圆周的长。第8篇主要研究力学问题，同时给出了一些具有几何意义的命题。按照当时数学家之见，力学是数学的一部分。帕波斯先定义了重心，给出了斜面的理论。最后描述了五种力学装置。

《阿耶波多历数书》（Āryabhatīya） 印度数学家、天文学家阿耶波多第一（Āryabhaṭa Ⅰ，生于公元476年）著。该书写于公元499年。公元十世纪时印度还有一位数学家名为阿耶波多，为防止混淆，称本书作者为阿耶波多第一。这部著作是印度现存最早的冠以个人作者名字的数学与天文学著作。

本书共有诗121行，分为四部分。第一部分（Dasagītikā）13行为引言，其中10行以非常简明的形式给出了阿耶波多的天文系统中最重要的数据。其中采用了特殊的字母符号，如给出地球的直径是1050尤加

那（yojana），太阳直径为4410尤加那，月球的直径是315尤加那，并给出了太阳系中其它行星之直径；第二部分（Ganitapāda）论述数学共33行；第三部分（kālakriyāpāda）共25行，有关计时与行星模型，属于天文历法内容；第四部分（Golapāda）共50行是关于球的（其中包括日月食）。本书主要内容有关：记数法；整数的运算法则；自然数平方、立方等求和公式；分数约分和通分法则；三率法、算术原则；三角垛等算术问题；假位法、逆推法和特殊的线性方程组解法及一次不定方程（组）解法；从利息问题引进的二次方程求根公式；直线形面积公式；还明确提出了勾股定理并借此解决在弓形中弦矢关系及相交两圆的弦矢关系问题。阿耶波多对希腊人的三角学作了两项改革：第一，他把半弦与全弦所对弧的一半相对应，他这种对正弦的观点为以后的印度数学家和阿拉伯数学家所采用；第二，他把半径的3438等分作为单位。阿耶波多计算了正弦和余弦表。他提出了圆的面积等于半周乘半径，并说100加4，乘以8，加上62000，是直径20000的圆周的近似长，这相当于取 $\pi=3.1416$。对于几何立体他也提出了一些体积公式，其中关于球和四面体的体积公式都是错误的。关于天文学阿耶波多提出：地球是运动的，它有自转。这与传统的印度天文学主张是背道而驰的，因而这一大胆的主张受到他以后的印度天文学家的激烈批判。

本书叙述简略，是一本抽述性的概论，给出了阿耶波多体系的最显著的特点。自阿耶波多之后，历代印度数学家对《阿耶波多历数书》多有评述。大约在公元800年它被译成阿拉伯文，因而该书对印度和阿拉伯数学和天文学产生了相当的影响。

《婆罗摩历算书》（Brāhmasphutasiddhānta） 印度天文学家、数学家婆罗摩及多（Brahmagupta，598—665后）著。于公元628年写成，全书共24章。主要为数理天文学内容，其中有两章专论数学。第1、2两章为关于行星的经度问题；第3章为有关周日运动的三个问题；第4章论述月食；第5章论述日食；第6章为行星的偕日升落问题；第7章新月；第8章论述月亮和阴影；第9章，行星会合问题；第10章关于行星与恒星的会合；第11章关于前人天文学著作的评论；第12章专论数学；第13—17章分别为第1—5章及第7章的补述；第18章专论代数问题；第19章关于磬折形；第20章关于量器问题；第21章论述仪器装置；第23章关于度量问题；第24章是本书的一个内容摘要。

第12章名为《算术》，实际上除了关于零和负数的运算法则以外，还涉及关于三角形、四边形的一些几何知识，以及属于代数内容的二次方程问题。婆罗摩及多在印度最早使用了负数，用负数表示欠债，并且提出了负数的四则运算法则。关于零与负数的运算，他提出：“负数减零是负数，正数减零是正数，零减零是零；零与负数或正数的乘积是零，零乘零等于零；零被零除无意义，零被正数或负数除或为零或

可表为一个以零为分子、有限量为分母的分数”。这反映了当时对零与负数的认识。在几何学方面，婆罗摩及多得到两个定理。第一个定理是："两对对边之和的一半之积是一个四边形的近似面积，四边形的精确面积是四个边之和的一半分别减去四条边后的乘积的平方根”。这在圆内接四边形情形下是正确的，而婆罗摩及多研究的四边形都内接于圆。第二个定理给出了四边形对角线的计算公式。他还得到一元二次方程的一个求根公式。第18章名为“库塔卡法”，研究不定方程问题，给出了求解不定方程的库塔卡法。这一方法类似于辗转相除法。他还研究了二次不定方程 $Du^2+1=t^2$ (D 为非平方整数，即佩尔方程)，得到一些结果，后人称之为婆罗摩及多推论。本章开篇便谈到代数学的重要性，写道："因为不使用代数学，问题便很少能够解决，因而，我将以例解说代数学”。并认为："知道辗碎法（即库塔卡法）、零、正负数、未知量、消去中间项、含有一个未知数的方程等，一个人便可成为学者中之尊者”。这反映了代数学在古代印度的地位。

《婆罗摩历算书》对印度后世天文学与数学产生了很大影响。婆罗迦罗第二的《天文系统至极》一书的第三部分中的许多内容便取自此书。在曼苏尔王朝时期（公元753—774年)，从印度到巴格达的使者将《婆罗摩历算书》带入阿拉伯国家，并译成阿拉伯文，被阿拉伯学者广为学习和研究，对阿拉伯数学的发展起了巨大的推动作用。花拉子米的《代数学》一书便是根据婆罗摩及多的著作写成的。

《代数学》 (al-Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala) 伊斯兰数学家、天文学家花拉子米（Abū Ja 'far Muhammad ibn Mūsa al-khwārizmī，约783—约850)著。阿拉伯原文书名直译为《利用还原与对消运算的简明算书》。该书1183年被译成拉丁文传入欧洲。比较流行的一种说法认为西文中“代数学”(Algebra)一词是由阿拉伯文的拉丁转写 al-jabr 演变而来，后渐称该书为《代数学》。这是历史上使用这一名称的最早的代数方面的著作。一般认为该著作是近代意义下的代数学的真正肇始之作。书名中包含了两种运算：Al-jabr 原意为“还原”，指从方程中消去负项的过程，实即移项；而 Al-muqābala 意为“对消”，指从方程两端消去相同的正项的过程，即合并同类项。这些正是解方程中对方程变形的基本代数运算。

作者在前言中说明了本书的目的，意在提供“算术中最简单最有用的东西”，考虑了人们经常遇到的如遗产继承、财产分配、土地测量、几何计算等各种各样的问题。全书由三部分组成，第一部分讲述现代意义下的初等代数；第二部分讲各种实用算术问题。最后列举了大量有关遗产继承的各种问题。全书不使用符号，而是用语言叙述。第一部分中只讨论了一次和二次方程，根据花拉子米，所有他提出的问题都可化归为六种标准形之一，这六种类型的方程如下（用现代符号表

示)：

$$ax^2=bx$$
$$ax^2=b$$
$$ax=b$$
$$ax^2+bx=c$$
$$ax^2+c=bx$$
$$ax^2=bx+c$$

其中 a、b、c 均为正整数。他给出了每一种方程的解的法则，如第4章中的一个问题："一个平方数及其根(即未知数)的十倍等于三十九"，其求解过程叙述为"取根数目的一半，即五，然后将它自乘得二十五，同三十九相加得六十四，开平方得八，再减去根数目的一半，即五，余三，这就是根"。对于一般方程 $x^2+px=q$，这相当于给出求根公式

$$x=\sqrt{(\frac{p}{2})^2+q}-\frac{p}{2}。$$

花拉子米对二次方程的解法还给出了几何证明，如对 $x^2+10x=39$，他给出了两种不同的几何证明，事实上就是配方。第一种证法是在边长为 x 的正方形的四个边上向外作另一边长为 x 和 $\frac{10}{4}$ 的矩形，再把该图补充为边长等于 $(x+5)$ 的正方形(如图1)。第二种证法是在边长为 x 的正方形的两个邻边上作边长为 x 和 $\frac{10}{2}$ 的两个矩形，再把图形补充为一个边长为 $(x+5)$ 的大正方形(图2)。两种方法都是利用已知方程求出大正方形之面积，然后开方，再求出根来。

《代数学》是受到了希腊数学乃至印度数学的影响的。它不仅对阿拉伯数学而且对欧洲数学的发展产生了深远的影响，花拉子米因此有"代数学之父"之称。

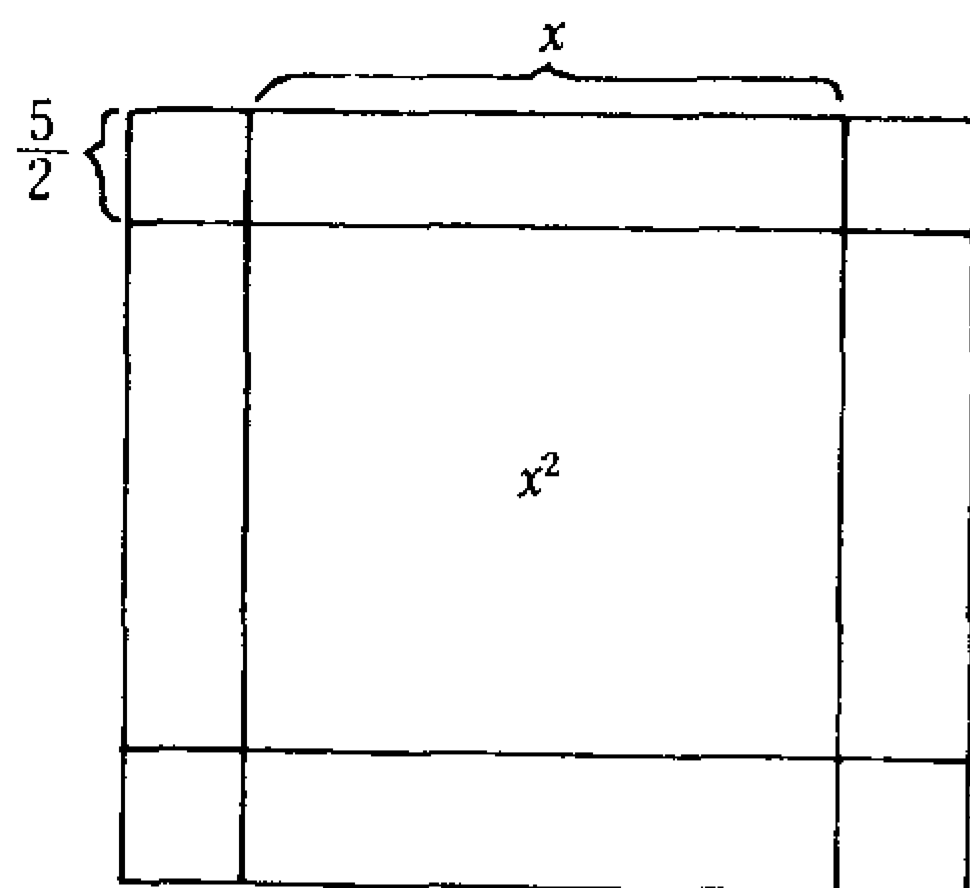


图1

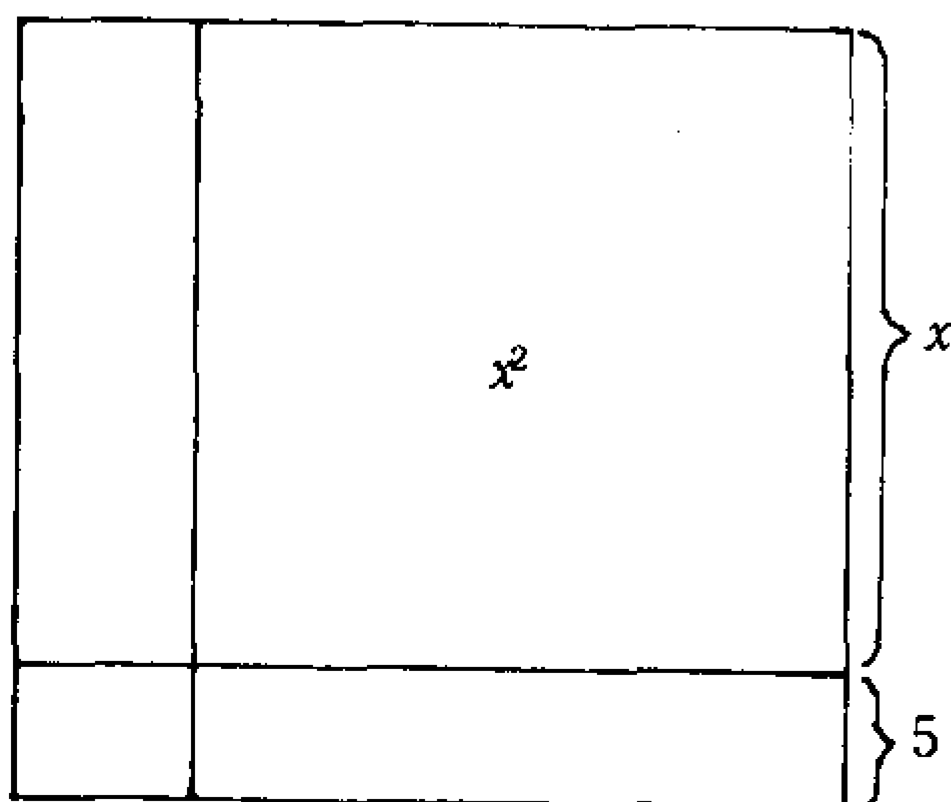


图2

《天文系统至极》(Siddhāntaśiromaṇi) 印度数学家、天文学家婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ，1115—约1185)著。作者为12世纪印度最卓越的数学家和天文学家，也是古代印度最后一位重要数学家。该书用散文的形式写成。通常认为它包括四部分。前两部分为数学内容。其中第一部分为"丽罗娃蒂"(为"美丽"之意，传为婆什迦罗第二女儿或妻子之名，作者以此为篇名，有纪念之意)，共分13章。第1章为所使用词项的定义；第2章讲述算术运算，包括整数和分数、平方根与立方根的计算等；第

3章介绍了一些规则，如假位法；第4章涉及一些实用问题，如利率之类；第5章是关于算术级数与几何级数的问题；第6章是平面几何内容，如平面图形面积的计算；第7—10章属于立体几何；第11章讲述磬折形问题；第12章属于代数内容，讲述求解一次不定方程的库塔卡法（原意为“粉碎”，实质同于辗转相除法）；第13章为数字组合问题。第二部分名为“求根”，属于代数内容，共含12章。第1章讲述正负数法则；第2章专门处理关于零的运算问题；第3章关于未知数；第4章关于根式问题；第5章讲述库塔卡法，同于《丽罗娃蒂》第12章内容；第6章研究二次不定方程；第7章给出了一些简单方程的例子；第8章解二次方程；第9章研究含有多个未知数的方程；第10章处理具有多个未知数的二次方程；第11章关于数个未知数乘积的运算；第12章是关于作者及其著作的介绍。

第三部分有关数学天文学，由12章组成：第1—2章关于行星的经度；第3章有关周日运动的三个问题；第4章朔望；第5章月食；第6章日食；第7章行星纬度；第8章行星的偕日升落；第9章新月；第10章行星的会合；第11章行星与恒星的会合；第12章关于太阳与月亮的一种现象。第四部分研究球体的问题，由13章组成：第1章对球体的欣赏；第2章球的本质；第3章宇宙学与地理学；第4章行星平动原理；第5章行星的离心周转模型；第6章浑仪的制作；第7章球面三角学原理；第8章日、月食计算原理；第9章行星的视度计算；第10章月牙计算原理；第11章天文仪器；第12章季节描述；第13章天文计算问题。

《天文系统至极》是古代印度数学的登峰造极之作。作者集波罗摩笈多以来印度数学之大成，在无理数的处理、解不定方程等方面取得了很高的成就。婆什迦罗第二倍受他的同时代人及后世学者的推崇，他的著作在印度产生巨大影响，但自他之后，印度的数学和天文学便日趋衰微，直至近代得以复兴。

《算盘书》（Liber abbaci） 意大利数学家斐波那契（Leonardo Fibonacci，约1170—约1250）著，出版于1202年。作者是基督教西方第一个大数学家，早年随父经商，游历甚广，熟悉不同国家在商业上使用的算术体系，回国后把在各地学习到的数学知识进行比较和总结写出《算盘书》，这是向欧洲介绍印度—阿拉伯数码和阿拉伯数学的最早著作。该书对后世数学家如巴乔利（Pacioli）、塔尔塔利亚（Tartaglia）等人有很大影响。

本书题目中的“算盘”一词并非指计算工具，而是意味着一般计算。《算盘书》共有15章，可分为四部分。第一部分（第1—7章）中，斐波那契首先介绍了印度—阿拉伯数码，说明利用它们记数是很方便的，之后通过大量的示例给出了整数四则运算的方法。最后引入许多符号表示分数，如$\frac{1\,1\,5}{5\,4\,3\,9}$表示$\frac{5}{9}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{5}{9}$，并介绍了分数运算方法。这部分中有许多乘法表、素数表

等。第二部分（第8—11章）包括许多有关商业的问题，例如货物的价格，利润计算，利息、工资的计算等等，较详细地讲述了如何将新的记数制度和运算法则运用到上述问题的计算中去。其中有一问题与中国数学中的“百鸡问题”相同，属于不定分析问题。第三部分（第12和13章）论题广泛，包括许多类型的问题，大部分是数学游戏，其中有“蓄水池问题”（一只蜘蛛在池壁上爬，每天前进若干步，每夜又倒退若干步，问多少天它可以爬出水池），还有来自埃及数学的著名问题（可以表述为 $ax\pm b/c\cdot x=s$ 的形式）。另一类为“运动问题”包括追赶（例如著名的“野兔和猎狗”问题，其中猎狗和野兔的速度成一比例，要计算猎狗追上野兔需多少时间）和相向运动。许多问题中，速度并非常数，而是算术地增加，所以在第12章开头给出了求级数和的公式。有一类问题属于“给与取”问题，其中有两个或更多的人，每一个人从另一个或另几个人那里取若干钱之后，他与其它人的钱数成一定比例。有一个简单的例子导致如下方程组（1）$x+7=5(y-7)$，（2）$y+5=7(x-5)$。有些则是属于不定分析的。另有一类“买马”问题，或“一个人不能买”问题，即一个人只有当从别人手里取一部分钱时才能买一匹马。其中一个问题涉及三个人，等式为 $x+\frac{y+z}{3}=y+\frac{z+x}{4}=z+\frac{x+y}{5}=s$，相应于丢番图《算术》第Ⅱ卷24题。此外，《算盘书》中的其它一些问题值得一提，如中国剩余问题“大衍求一术”；几何级数求和；古埃及的“七个老妇”问题（求 $\sum_{i=1}^{n}7^i$），象棋问题（求 $\sum_{i=0}^{64}2^i$）；以及兔子问题。兔子问题表明，一对兔子需要一个月成熟产子，之后每月产子一对，问 n 个月后共有多少对兔子，其解导致著名的斐波那契数列，通项为 $k_n=k_{n-1}+k_{n-2}$。有关斐波那契数列的数学理论后来得到深入发展，在数论，优选法等许多方面得到应用。斐波那契在第13章中使用了“假位法”和“双假位法”解决了一次和二次方程，斐波那契对许多问题给出了两种或更多解法。第四部分（第14、15章）表明斐波那契是应用代数方法的大师，也是欧几里得的卓越的学生。第14章致力于开方运算，斐波那契认为《几何原本》第Ⅱ卷中的命题是他的方法的证明．他使用了逼近公式如

$\sqrt{A}=\sqrt{a^2+r}$ 的第一个近似值为 $a_1=a+r/2a$，

$\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{a^3+r}$ 的第一个近似值为 $a_1=a+\frac{r}{(a+1)^3-a^3}$。

尽管《算盘书》的数学内容并未超过阿拉伯人，但其例子的丰富及方法安排以及严格证明值得重视。第15章末尾分为三部分，表明他娴熟地运用几何与代数方法解决二次方程的技巧。第1部分是比例及其变换问题；第2部分给出了毕达哥拉斯定理的应用；第3部分是二次方程问题，表明他熟悉花拉子米的著作，对未知量及其幂他赋予一些名字，但还未固定成为一种代数符号。

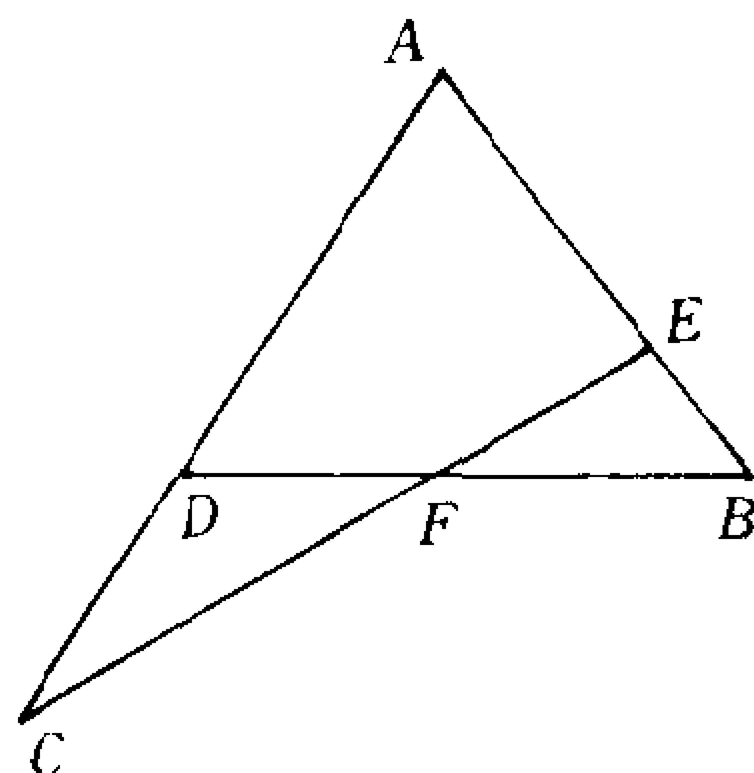
《算盘书》出版后在欧洲广为流传，对欧洲数学的发展产生了巨大影响。

《论完全四边形》（kashf al-qināʿ fī asrār shakl al-qitāʿ） 阿拉伯天文学家、数学家、哲学家纳西尔丁（Nasīr al-Dīn al-Tūsī，1201—1274）著，作者是伊斯兰科学史上最著名和最有影响的人物之一。该著作不依赖天文学而发展了三角学，在历史上第一次使之成为纯粹数学的一个独立分支，因而成为三角学史上的重要经典著作。

《论完全四边形》共分5卷。在第1卷中纳西尔丁为了发展三角学的需要（因为三角函数值即是线段之比，且除少数例外都是不可公度量之比）发展了希腊数学中的比例论。他从关于比的乘积的定义开始，证明了成对的比之间的交换性，并认为每一个比都是一个数，这使数的概念得到了扩展。在第1卷第14节中，纳西尔丁给出了合成比的一系列性质，其中最主要的是：比 A/B 是由 C/D 和 E/F 合成的，其充分必要条件是 $A\times D\times F$ 等于 $B\times C\times E$。第2卷论述了完全四边形，给出了与之相关的一些定理的证明。纳西尔丁讨论了这种图形的各种情形。对于完全四边形 $ABCDEF$（如图），他用六种方法证明了如下等式：

$$\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{FD}\times\frac{DC}{CA}。$$

第3卷叙述了关于平面圆中的三角函数。纳西尔丁定义了弧的正弦，即现今所谓对应于弧的角的正弦，并证明了具有同一端点的两个弧的正弦之比等于联结两弧其它两端点的弦被过共同端点的直径所分成的线段之比。由此结论即可解决由两个



弧的正弦和或差求两个弧的问题。第4卷是关于球面上的完全四边形的论述。第5卷中对球面三角形进行了分类，其中纳西尔丁引入了弧的余弦、弧的正切、弧的余切、弧的正矢以及弧的余矢等概念，证明了正弦和余弦定理。在该书中，纳西尔丁第一次给出了直角球面三角形中的所有六种情形如下（用现代形式，C 是球面三角形的斜边）：

$$\cos c=\cos a\cos b$$
$$\cot A=\tan b\cot c$$
$$\cos c=\cot A\cot B$$
$$\sin b=\sin C\sin B$$
$$\cos A=\cos a\sin B$$
$$\sin b=\tan a\cot A$$

纳西尔丁还利用极三角形求解一般的球面三角形，这在数学史上是一个首创。

《论各种三角形》（De triangulis omnimodis） 德国数学家、天文学家雷格蒙塔努斯（Johannes Regiomontanus，1436—1476）著。完成于1464年，但直到1533年才出版。在欧洲这是第一本使三角学脱离天文学而正式成为数学的一个独立科目的系统著作。

三角学的发展，大体可以说，其重点首先是在天文学上，从中产生出球面三角，最后发展到平面三角学。公元前1600年的古巴比伦人便具有弦的某些知识。希腊希帕霍斯曾做出一个弦表。门纳劳斯曾给出了三角形的一个基本定理。之后托勒密在其《天文学大成》(Almagest) 中发展了弦表。这些弦表在欧洲一直被利用，直到雷格蒙塔努斯的著作发表之前没有多大变动。三角学的下一个发展是在东方。印度人和阿拉伯人都为之做出了贡献。印度人考虑半弦和圆的半径。这样他们就发现了现代三角学赖以存在的基础—正弦比。阿拉伯人艾布瓦法 (Abū al-Wafā) 利用正切作为真正的三角线，从而得到关系：$\mathrm{tg}A : 1 = \sin A : \cos A$。之后比鲁尼 (al-Bīrūnī) 对于平面三角写出了正弦法则。所有这些进步都通过翻译介绍到了欧洲，雷格蒙塔努斯在写作《论各种三角形》时，知晓托勒密以及一些印度、阿拉伯数学家的著作。他知道弦表、正弦、余弦律等。雷格蒙塔努斯做出了自己的贡献。他建立了三角学知识的统一基础，使之成为一个系统的整体。

《论各种三角形》基于欧几里得几何，共分五篇。第一篇的头一部分(从定理1到19)讨论了量和比。其余部分给出了直角、等腰及不等边三角形的几何解。其中定理20、27、28中提到或明确使用了正弦函数。斜三角形的四种情形的解在定理49、50、52、53中得到处理。三角学知识的系统处理开始于第二篇的定理1。这里雷格蒙塔努斯阐述了正弦定理。利用该定理他对定理4和定理5中的斜三角形进行处理：当三角形中两角和一边已知，或两边及其一对角已知时，三角形余下的元素便可以求得。此外，在定理12、13中，雷格蒙塔努斯提出了求三角形边长的代数解法，其中用到解二次方程。其次，定理26隐含了三角形面积的三角公式。第三篇是一个为第四篇作准备的初等基础。第四篇定理25、26、27处理了直角球面三角形，定理28—34给出解斜球面三角形的六种情形。第五篇继续解球面三角形。定理2是球面三角形中的余弦定理，用现代符号表示为

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}。$$

总之，雷格蒙塔努斯为完善的三角学在平面和球面几何中建立了牢固的基础。他的后继者哥白尼等人从其著作中为自己的三角学汲取了营养。《论各种三角形》全文的英译出版于1967年 (Barnabas Hughes, Regiomontanus on Triangles, Univ. of Wis. Pr.)。

《算术、几何、比及比例全书》 (Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita) 意大利数学家帕乔利 (Luca Pacioli, 约1445—约1517) 著。1494年出版于威尼斯。是作者的两部重要著作之一〔另一为《神圣比例》(Divina proportione, 1509)〕。它在数学上虽然没有多少独特的创建，但却是西方继斐波那契《算盘书》之后第一本内容全面的数学著作。它也是最早印刷的数学书之一。

本书分两部分，内容包括理论

和实用算术，代数基础，意大利各地使用的币值、重量、度量表、复式簿记法以及欧几里得几何的概述，几乎罗列了当时的所有数学知识。材料的来源主要是欧几里得、托勒密、博伊西斯和斐波那契的著作。书中采用了印度-阿拉伯数码，大量采用符号。帕乔利在书中论述了三次方程问题，认为："$x^3+mx=n$，$x^3+n=mx$（m、n 是正数）现在之不可解，正象化圆为方问题一样。"该书尤为引人注目的是在第一部分第9编"关于计算与记录"的标题下分36章，就复式簿记进行了极为详尽的论述，被认为是关于复式簿记的最早的文献。帕乔利对当时流行的簿记知识进行了整理。他列举的簿记的特点有如下几点：（1）帐簿体系是日记帐、分类帐及总帐三种帐簿记制；（2）分类帐除了进行所谓的分类外，还有核算、统一价额的任务；（3）盈亏核算每次都是在各项业务的终了进行，不存在商品买卖的预算和商品盘点；（4）使用与现在不同的独特的汇总结帐与预算的方法。

该书在16世纪广为流传，对当时欧洲数学的发展有重要影响。卡尔达诺在其《实用算术》(1539）中曾专辟一章纠正帕乔利的错误，并向帕乔利致谢。塔尔塔利亚的《数量概论》(1556—1560）遵循了帕乔利著作的风格。邦贝利在其《代数学》的引言中称，帕乔利是斐波那契之后第一位对代数学有贡献的数学家。

《算术、几何、比及比例全书》在1523年出了第二版，1543年被译成英文，从此其影响超出了欧洲大陆诸国。

《大术》(Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus，一般称 Ars magna) 意大利学者卡尔达诺（Girolamo Cardano，1501—1576）著，1545年在纽伦堡出版。卡尔达诺是十六世纪人文主义的代表人物，也是数学史上有名的怪人。他博学多才，精力过人，通晓医学、数学与天文学，且喜好赌博与占星术。终生放荡不羁，行为怪异。他对当时的一切知识倾注了满腔热情，著述甚丰，涉及很多方面。

《大术》是他最重要的数学著作，尤以其中首次披露了一般三次方程的求根公式而闻名于世。由此而引起的与另一位意大利数学家塔尔塔利亚的争执是数学史上有名的事件。大约1500年左右，意大利波仑亚大学的数学教授费罗解出了 $x^3+mx=n$ 类型的三次方程，并把他的方法秘传给菲奥尔。由于1535年菲奥尔对塔尔塔利亚的挑战，卡尔达诺得悉塔尔塔利亚已经知道三次方程的解法。于是恳求塔尔塔利亚将方法传授给他。大概是在发誓保密的前提下，塔尔塔利亚把他的方法告诉了卡尔达诺。后来当卡尔达诺肯定塔尔塔利亚的方法与费罗的方法是相同时，便不顾他的誓言，将这一方法发表在《大术》之中。因而后人称此方法为"卡尔达诺公式。"这一行为遭到了塔尔塔利亚的强烈抨击。卡尔达诺先以具体方程为例说明了一般方程 $x^3+mx=n$（m、n 为正数）的解法。对以上方程卡尔达诺引入 t 和 u 两个参变量，并令 $t-u=$

n及$tu=(\frac{m}{3})^3$，之后他断言$x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$，并利用以上两个假定进行消元，得到一个二次方程，解之得：$t=\sqrt{(\frac{n}{2})^2+(\frac{m}{3})^3}+\frac{n}{2}$，$u=\sqrt{(\frac{n}{2})^2+(\frac{m}{3})^3}-\frac{n}{2}$。求出$t$和$u$之后，取两者之正立方根，卡尔达诺便由$x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$得到方程的一个根。之后用几何方法对他的方法给出了证明。卡尔达诺还解出了如下三种特殊类型的方程：$x^3=mx+n$，$x^3+mx+n=0$，$x^3+n=mx$。对如$x^3+6x^2=100$这类方程，他先以$y-2$代替x设法消去x^2项，得到$y^3=12y+84$，归入上述类型的方程解之。而对$x^6+6x^4=100$这样的方程，他知道可设$x^2=y$作为y的三次方程来处理。在书中他自始至终都给出正根和负根，但他没有认真对待虚根。尽管他在解方程时曾得到$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$这样的复数，认为它们的乘积是40，由此他认为“算术是精致而又不中用的。”对三项方程的可约情形，他的讨论详细之至，但在1545年的版本中，没有涉及不可约情形。

除了所谓卡尔达诺公式，《大术》中载录了卡尔达诺的许多创造，反映了他对代数学的许多新思想：在一个一般三次方程中消去二次项的线性变换；注意到高于一次的方程具有一个以上的根；当方程的一个根已知时方程降次等。书中还载录了四次方程的解法，是卡尔达诺的女婿费拉里得到的。卡尔达诺还研究了数值方程的近似解法，考虑了方程的根与系数的关系，而在此以前人们只注重方程的求解，因此他被认为是代数方程论的先驱。在1570年新版的《大术》中，讨论了三次方程的不可约情形，卡尔达诺公式被推广到虚数。尽管这一工作非常晦涩且没有给出不可约情形的解，但所用的代数变换仍然是很重要的。

《大术》是十六世纪最重要的数学著作之一。在它出版后的几十年里，一直被认为是最好的代数学著作。韦达曾对它详加研究，并在代数学中引入了系统的符号，从而使代数学的发展产生了质的飞跃。

《数量概论》(General trattato di numeri et misure) 意大利数学家塔尔塔利亚（Niccolò Tartaglia，约1499—1557)著，共6篇，于1556—1560年间出版。作者出身寒微，自学成才，其原名为丰坦那，因孩提时脸部受伤而引起口吃，故有“塔尔塔利亚”之称，意即“口吃者”。塔尔塔利亚意在仿效帕乔利的《算术、几何、比及比例全书》，将本书写成一本包含他的新发现的百科全书式的巨著，但因其去世，未能完成，后半部分是在他去世后出版的。

与塔尔塔利亚的名字联系在一起的最重要的数学内容是三次方程的解法。意大利数学家费罗曾于16世纪头10年发现了三次方程的解法，但未发表。1535年塔尔塔利亚在与菲奥尔（费罗的学生）的数学竞赛中重新发现了这一解法，但也没有公开发表。1539年3月25日在卡尔达诺的恳求下，塔尔塔利亚将自己的发现告诉了他，条件是不得告诉

别人，但1545年卡尔达诺在其著作《大术》中将这一方法公开了出来，并对费罗和塔尔塔利亚表示了感激。塔尔塔利亚被卡尔达诺的行为激怒，与他的学生费拉里之间开展了一场数学竞赛，互相之间交换许多包含各种问题的小册子，并于1548年8月10日在米兰大教堂进行了一场公开辩论。这些小册子不仅包括算术、代数、几何，而且还有地理、天文、建筑等内容，生动地反映了十六世纪意大利的精密科学的状况。其中有些内容又写进了《数量概论》一书中。在该书中出现了“塔尔塔利亚三角形”〔亦称“帕斯卡三角形”（1665）或“贾宪三角形”（11世纪）〕。

《数量概论》第一篇是实用算术，包含四则运算的练习和应用，例题是从实际商业贸易中选取的。第二篇主要是基于欧几里得《几何原本》的理论算术，研究了比例论、无理量理论、完全数等，讨论了开平方和开立方的计算，使用了近似公式：$\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$，$\sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\frac{b}{3a\ (a+1)}$，给出了“塔尔塔利亚三角形”。第三篇是实用几何学。第四篇为理论几何学，其中介绍了阿基米德的《论球和圆柱》。第五篇研究了平面和立体几何的作图问题，最后第六篇是代数学方面的内容，是由作者的遗稿片断组成的，讨论了方程的解法。

《砺智石》（The Whetstone of Witte） 英国数学家雷科德（Robert Recorde，1510—1558）著。1557年出版于伦敦。这是第一篇用英文写成的代数学著作。除此书外雷科德还撰有《技艺基础》（The Ground of Artes，1543）等书。《砺智石》是作者唯一一本没有再版的书，无疑是因为它对于伦敦的艺人来说不如《技艺基础》等书有直接的用途。《技艺基础》是雷科德最受欢迎的书，在第一版中只讨论了整数的各种运算、黄金律等。1552年扩充再版，加入了分数运算、假位法等内容。其后多次再版，在一个半世纪的时间里一直是算术教科书的楷模，最后一版出版于1665年。在此书中，雷科德首次在英语国家使用了“＋”及“－”号，这是今天数学中加、减号的原型。

《砺智石》包含有打算写于《技艺基础》中的“算术的第二部分”以及通过二次方程介绍的初等代数内容。它基于德语资料，特别是绍伊贝尔（Johann Scheubel）和施蒂费尔（M. Stifel）的著作，其代数使用了德语符号。雷科德在这些符号中加入了新的等号“＝”，从而使之完全变成了符号代数，这就是现在的等号的来源。作者说他所知道的最相象的两种东西是两根平行线，所以用两根平行线来表示相等。除此之外，该书还有一些值得注意的特点，如：代数长除法中零系数的使用；通过使用任意数检验代数运算的正确性，而不是运用逆运算来检验；以及对二次方程的处理等内容颇为新颖。雷科德不承认方程的负根，但确实使用了负系数。所有二次方程都写成平方项等于根加或减去一个数，或者是平方项等于一个数减去

根的形式（即 $x^2=q+px$, $x^2=q-px$, $x^2=px-q$）。对上述方程他给出了通常的解公式，但对于具有两正根的方程 $x^2=px-q$，他着重使用了根与系数的关系式：$x_1+x_2=p$，$x_1x_2=q$。

《代数学》（L' algebra） 意大利数学家、工程师邦贝利（Rafael Bombelli，1526—1572）著。1572年出版大部分关于代数学的内容，第四、五两卷手稿直到1923年才被发现，并于1929年出版。邦贝利是意大利文艺复兴时期最后一位代数学家。他的前辈们曾经将这门学科推向一个发展高潮。先有帕乔利（Luca Pacioli）于1494年出版《算术、几何、比及比例全书》，并于十六世纪初在波伦那讲学。还有费罗（Scipione dal Ferro）也是当时第一流的数学家。之后有卡尔达诺、塔尔塔利亚及费拉里对解三次与四次方程的突出贡献。这些人都生活工作于附近的意大利北部城市。卡尔达诺的《实用算术》一书于1539年发表，1545年出版了著名的《大术》，由此引起的卡尔达诺与塔尔塔利亚之间的争执在意大利的主要城市里是家喻户晓的。这就是邦贝利撰写该书的背景。邦贝利认为除了卡尔达诺之外还没有人能够很深入代数学这一科目，但对卡尔达诺的表述他并不满意，因此他准备写一本书以其清楚明了的表述使任何人都可以不借助别的书掌握代数学这门学问。该书写于1557—1560年之间，是一本系统地逻辑地表述代数学的著作，其中邦贝利不仅综合了当时这一科目的所有知识，而且以自己的新贡献丰富了它。

《代数学》全书共分五卷。第Ⅰ卷包括基本概念（幂、根、二项式、三项式）的定义及基本运算的演算。卷Ⅱ引入代数幂和符号。之后解一次、二次、三次及四次方程。当时邦贝利只考虑正系数的方程，因此他必须处理大量的情形，包括5种二次方程、7种三次方程、42种四次方程，对每一种类型的方程都给出解的法则，并用实例示之。卷Ⅳ、Ⅴ是该书的几何部分。在卷Ⅳ中将几何方法应用于代数，卷Ⅴ则致力于用代数方法解几何问题。在该书的前三卷中可以看到丢番图著作的影响。其中对不可约三次方程的处理表明邦贝利是远远超出其时代的，他的处理方式差不多正是今天的方式。卡尔达诺曾经注意到费罗的一般法则是不能运用于三次方程的情形的，但邦贝利处理虚数的技巧使他证明了在这种情形下法则的适用性。他发现了不可约三次方程的根中出现的复数的立方根，指出复根总是伴随其共轭出现。他给出了计算复数的公式，并给出了表明其应用的实例。在第Ⅴ卷中他还指出三等分角问题可以化为解三次不可约方程。尽管他没有对四次方程的解有重要贡献，但他展示了费拉里的公式在各种情形下的应用。他的目的是讲解“高等算术”，把代数提高到一个独立的学科的地位，将代数学与算术分离开来。事实上他是第一个普及丢番图著作的人。除此之外，他对代数学的最突出贡献是他采用的符号。他采用半圆表示未知量的幂，将指数放在半圆中，如$\underset{\smile}{1}$表示未知量 x，$\underset{\smile}{2}$表示 x^2，5 $\underset{\smile}{1}$ 或 $\overset{5}{\underset{\smile}{1}}$ 表示$5x$，符号

RII 则表示根号。这种思想对后世产生了影响。卷Ⅳ、Ⅴ表明了他对几何学的广博知识，他不认为用代数方法得出的结果必须用几何证明，从而打破了从古希腊以来的传统。此外，在《代数学》中邦贝利第一个用连分数来逼近平方根，并明确定义了负数。

《代数学》一书奠定了邦贝利在数学史上的地位，此书对低地国家的影响从斯蒂文的工作中可以明显地看到。斯蒂文认为“邦贝利是我们时代的大算术学家”。大约在《代数学》出版一个世纪之后，莱布尼茨在自学数学时便采用该书作为学习三次方程的指南，用莱布尼茨的话说，邦贝利是“分析术的卓越大师”。

《论十进》(De Thiende) 荷兰数学家、工程师斯蒂文 (Simon Stevin, 1548—1620) 著。1585年在莱顿出版。原文为佛兰芒语，同年有法文版本 (La Disme) 出版。作者生于荷兰的布鲁日（今属比利时），做过荷兰军队的军需官，对商业簿记和工程技术有贡献，实际事务的需要使他最先认识到十进制的优越性，因而竭力倡导。

在数学史上，本书虽然被认为是欧洲第一本系统论述十进分数（小数）理论的书，但斯蒂文的意图却是利用十进位思想和他发明的记数符号避免分数，而以整数运算取代之。他在该书的标题下写道：“教授商业中遇到的一切计算如何可以只使用整数而无需分数之助进行”。当时的欧洲，由于受巴比伦及希腊数学传统的影响，数学与天文学计算都是采用六十进位制，极为复杂。斯蒂文在该书中发明的记数方法虽然看起来笨拙，但由于利用了十进位值制，因而大大简化了分数运算。当然十进分数的发明不能归功于任何个人，佩罗斯 (Pellos) 1492年曾用小数点分出被除数的一位，二位或三位（当除数是10，100或1000的倍数时）。赖瑟 (Adam Reise) 1522年印刷了一张平方根表，其中无理数计算到三位值。最重要的是鲁多尔夫 (Christoff Rudolff) 1530年在一张复利表中使用了符号|作为小数点。但斯蒂文是第一个系统讨论十进分数及其算术的人。他在《论十进》的前言中强调了十进思想的重要性，全书篇幅很小，正文分为两部分，此外有六个附录。正文第一部分给出了十进数的定义：“十进数是一种基于以十进位思想的算术，它使用通常的阿拉伯数码，其中任何数都可以写出来，利用它商业中遇到的一切计算都可以只用整数而无需分数之助进行”（定义1）。之后给出了具体表示方式和符号，“任意已知数称为单位并有符号⓪”（定义2）；“单位的十分之一称为第一级，有符号①。第一级的十分之一称为第二级，有符号②，依此类推”（定义3）。“定义2和定义3的数称为十进数”（定义4）。正文第二部分阐明了十进数的四则运算法则。根据斯蒂文的记数法（有两种，如2⓪3①5②7③和$\overset{⓪}{2}\overset{①}{3}\overset{②}{5}\overset{③}{7}$都表示2.357），他分别以实例演示，利用4个命题规定了加、减、乘、除运算的方式。除此之外的六个附录分别讲述了十进分数在实际问题计算中的应用。如附录1给出了在

测量计算中的应用，附录5则介绍了天文计算。斯蒂文主张应在一切度量衡和币制中使用十进制。

从斯蒂文尚嫌笨拙的记数法中，十进分数（小数）的原理已明显可见了。事实上，中国利用十进分数比斯蒂文早得多。但该书对欧洲计算数学和度量衡制的影响，使它在数学史上有着不朽的价值。《论十进》有法文（1585，1608）、德文（1965）、英文（1608，1619，1921，1929）等多种版本。

《分析术入门》（In artem analyticem isagoge） 法国数学家韦达（Francois Viète，1540—1603）著，1591年出版。作者是职业律师，同时也是16世纪第一流的数学家，本书建立了符号代数学的基础。“分析”在这里是相对于“综合”而言的，对韦达来说，代数是发现数学真理的特设步骤，它执行了分析的过程，所以韦达把他的代数称为分析术。在代数学中，韦达之前虽然也有一些人如欧几里得、丢番图等人曾用字母代替特定的数，但这种用法只是偶然的。韦达是第一个有意识地、系统地使用字母的人，他不仅用字母代表未知量（用元音表示）以及未知量的乘幂，而且用字母表示一般的系数(用辅音B、C、D、等表示已知量)。据此对方程作了一般的表示，从而把代数学从求未知数的一些技巧提高到方程式理论的高度，这是数学史上最重要的进步之一，它为代数学的进一步发展开辟了道路。

《分析术入门》共8章。在该书第1章中，韦达对“分析”术进行了重新表述，他在帕波斯的两种分析即“理论的”分析和“问题的”分析基础上又添加了第三种，他名之为“注释的”分析。在第2章中韦达在欧几里得《几何原本》第Ⅰ、Ⅱ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ各卷的公理、定义、定理的基础上提出了一些他自己的约定，从而为展开方程理论创造了条件。在第3章中他给出了基本的“齐性原则”，据之只有同类的量可以进行比较，因而他的方程均限定为齐次的，这里显示出希腊数学的特征。在第4章中他提出了“类计算的典型规则”，它们对应于通常的计算中应用的四则运算法则，这里韦达把他的符号性代数称为“类的算术”（Logistice speciosa），以区别于普通的“数的算术”(Logistice numerosa)。他的这种区分就规定了算术与代数的分界，代数学从此成为研究一般类型的形式和方程的学问。在第5章中韦达研究了方程的基本运算，其中命题1给出了方程中移项的规则；命题2告知如何化约方程的次数；命题3介绍了将方程转化为比例的形式的方法。第6章讨论了综合与分析的关系。在第7章中，韦达讨论了他给出的第三种分析术的作用，这种方法被应用于数（当所求的量可表示为数时）、长度、平面与立体（当所求的东西本身必须表示出来时）。在第8章中韦达给出了一些定义如方程是未知量和确定量的一个比较。此外，还给出了一些规则和他的另外一部著作的纲要。

虽然《分析术入门》是一部“复古的数学分析著作”(韦达语)——韦达在该书开篇主要引述了两部希

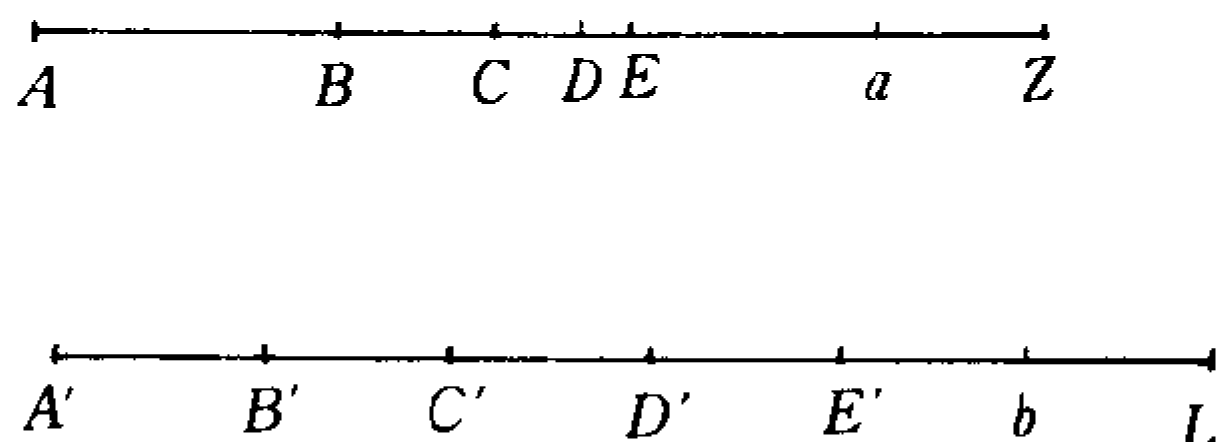
腊数学著作即帕波斯的《数学汇编》的第Ⅶ篇和丢番图的《算术》，而且在该书中保留了齐性原则—但他自觉地在数学中引入了一套系统的符号，导致了代数学中的一场革命，并大大推进了整个数学的发展。

《奇妙的对数表的描述》(Mirifici logarithmorum canonis descriptio ...) 苏格兰数学家纳皮尔(J. Napier，1550—1617)著。1614年出版于爱丁堡。纳皮尔是对数的发明者之一，该书是关于对数的最早著作。

对数思想约始于1594年。纳皮尔当时的动机是寻求一种球面三角计算的简便方法，以便利天文学计算。纳皮尔的发明使计算数学产生了革命。他的思想发表在该书及他去世后出版的《奇妙的对数表的构作》(Mirifici logarithmorum canonis constructio; …)中。在纳皮尔的发明中，算术级数与几何级数的理论起着核心作用。它们的项之间的对应关系已为16世纪的许多数学家所注意。施蒂弗尔在其《整数算术》(1544)中给出了相当于

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\ (a^m)^n=a^{mn}$$

的基本法则，但他只研究了离散集合的对应关系。纳皮尔的几何模型中则建立了基于连续运动的算术与几何级数的项之间的对应。设有两点沿两平行直线运动。在直线 AZ 上纳皮尔令 A 朝向 Z 运动，速度正比于到 Z 点的距离。考虑某一小段时间 t，设 AB、BC、CD、…分别为 t 时间内质点所通过的距离并设在这段时间里速度不变，并与初始速度相同。则据条件有



$$\frac{AB}{AZ}=\frac{BC}{BZ}=\frac{CD}{CZ}=\cdots$$

因而 AZ、BZ、CZ，…这些长度就形成一几何级数。同时，设另一点与 A 同时沿另一直线 $A'L$ 匀速运动，使得当 AZ 上点到达 B、C、D、…时，$A'L$ 上的点分别到达 B'、C'、D'，…。显然 $A'B'=B'C'=C'D'=\cdots$。因而 $A'B'$、$A'C'$、$A'D'$，…成等差数列。在此基础上，纳皮尔给出对数的定义如下：设上述两质点在同一时刻分别到达 a、b 两点，则线段 $A'b$ 就定义为 aZ 的对数。纳皮尔取 $AZ=10^7$，其对数为0，则当 $n>10^7$时，n 的对数就小于0。用现代符号表示：若 $A'b=y$，$y_0=0$，$aZ=x$，$AZ=x_0=r=10^7$，则

$$\frac{dx}{dt}=-kx,\qquad \frac{dy}{dt}=kr。$$

其中 k 是参数，消去 k 有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{r}{x},\ \log_e\left(\frac{x}{r}\right)=-\frac{y}{r}$$

或 $\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{y}{r}$。

纳皮尔利用他的定义，计算了一系

列表，其中包含下列值：

$10^7(1-\frac{1}{10^7})^n$，$n=0$，1，2，3，…，100；

$10^7(1-\frac{1}{10^5})^n$，$n=0$，1，2，3，…，50。

最后是

$10^7(1-\frac{5}{10^4})^n(1-\frac{1}{10^2})^m$，

$n=0$，1，2，…，20；

$m=0$，1，2，…，68。

显然，纳皮尔对数（记作Nap·log）与自然对数（记作ln）不同，它们的关系为

$$\text{Nap}\cdot\log x=10^7\ln\frac{10^7}{x}$$

1624年，布里格斯将纳皮尔的对数改为常用对数。纳皮尔的著作一发表，他的方法便广为流传，极大地便利了计算。

值得一提的是，瑞士数学家比尔吉（J. Bürgi）略早于纳皮尔曾独立地得到相当于自然对数的概念，但迟至1620年才发表。

《不可分量几何学》（Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota） 直译为《以运用连续体的不可分量的新方式推进的几何学》。意大利数学家卡瓦列里（Bonaventura Cavalieri 约1598—1647）著，于17世纪三十年代完成，1635年出版于波伦那。卡瓦列里是积分学的先躯之一，《不可分量几何学》是他的主要著作，也是积分学史上的重要文献，他在本书中提出的方法是古希腊的“穷竭法”到牛顿、莱布尼茨的微积分的过渡，对微积分的建立起了很大的促进作用。

《不可分量几何学》共有七卷，在第一卷中卡瓦列里阐述了他的一些有关平面和立体的假定，主要致力于旋转体，一般圆柱和圆锥（以任意闭曲线为产生曲线）及这些立体的部分截段（特别是那些相似的部分），提出了一些引理。最有趣的是处理平面和立体图形的切线的第一部分，其中引理3是分析学中的重要定理——中值定理的雏形。卡瓦列里是基于几何的观点阐述的，他表明在函数$f(x)$表示的曲线上至少存在一点ξ，使该点的切线平行于点$(a, f(a)$、$(b, f(b))$之间的连线。在第二卷中卡瓦列里介绍了他的不可分量方法，其目的是提供一种求面积和体积的方法，这种新颖的方法是基于希腊人关于量的理论的。他引入了“所有直线”（omnes lineae）的概念，称之为一给定图形的不可分量，并用来作为求积的工具，证明了一些有关于不可分量集合的一般定理。卡瓦列里可能受到将一平面或立体看成由无穷小量组成这一直觉思想的影响。古希腊德谟克利特以来的一些数学家曾将这种思想作为他们求积方法的出发点，从开普勒这一思想成为积分方法的基础，他曾经在他的《酒桶新立体几何》中运用无穷小方法处理许多求积问题。但尽管卡瓦列里对此留下很深的印象，但他认为开普勒的方法基础太不牢固，他认为牢固的基础只能由坚持希腊传统即不使用无穷小证明才能得到。虽然，关于连续体的构成卡瓦列里没有一个固定的观点。为了处理立体

图形，在本书的第二卷定义2中卡瓦列里引入了平面集合的概念，他认为对夹于两平面 A、B 之间的一立体，"所有平面"由一平面 A 平行地向平面 B 移动时，立体与平面的交接图形所组成，这些平面的集合就构成该立体。此外，卡瓦列里给出了"所有点""所有横坐标"等概念，这是构成他的不可分量方法的基本概念。之后在第二卷命题3、4中给出了他的不可分量方法的基本定理，命题3建立了面积和直线集合之间以及体积和平面集合之间的关系，若用 θ 表示"所有的"(omnes)，l，p 分别表示直线和平面，F、S 表示图形，则卡瓦列里建立了如下关系：

$$F_1:F_2=\theta_{F_1}(l):\theta_{F_2}(l),$$

$$S_1:S_2=\theta_{S_1}(p):\theta_{S_2}(p)。$$

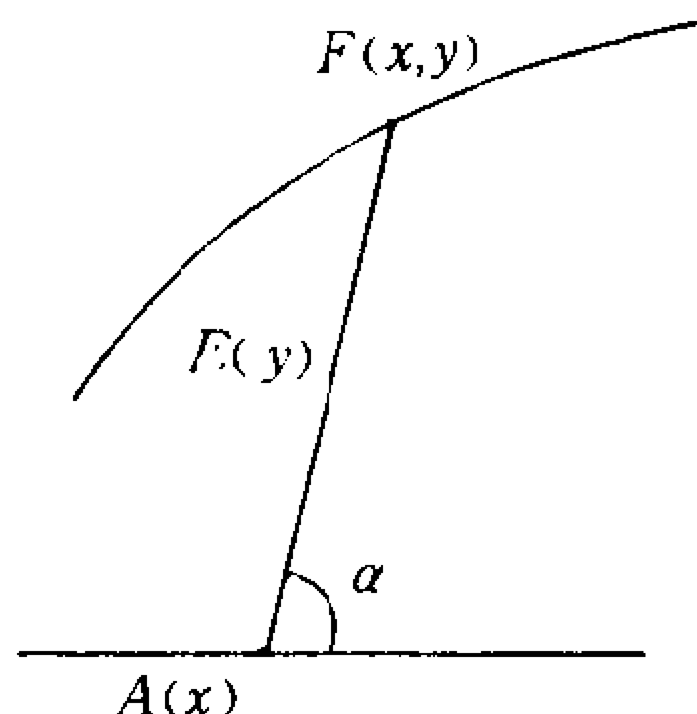
命题4含有一个结果，通常称为"卡瓦列里原理"即如果两平面(或立体)图形具有相等的高，若由平行于底且从它们到底等距的直线(或平面)组成的部分总有相等的比，则平面(或立体)图形也具有同一比。中国的祖暅也曾提出(另说刘徽亦提出)同样的原理："幂势既同，则积不容异。"第二卷中也含有第三至五卷的一些引理，其最后8个命题是纯代数的，与不可分方法无直接联系。命题5—34包括：(A)关于两平行四边形之间的比的基本陈述；(B)直线集合之间的比，正方形集合之间的比，等等的计算，处理了相当于 $\int_0^a t dt$，$\int_0^a (t+b)(t-b)dt$ 等等的一些积分问题；(C)关于两相似平面图形之比、两立体图形之比与它们的直线比之间的关系的两个基本定理；(D)有关两圆柱之比、两圆锥之比及两棱锥之比的一些结果。在第三卷至第五卷中卡瓦列里将他的新方法用于获得有关圆锥曲线的求面积、体积问题，如在第三卷的前一部分的33个定理，除了求两椭圆之比外，主要是关于正方形集合、矩形集合与由椭圆确定的图形之间的关系的计算。这些关系在后一部分的29个原理中被用于各种立体的求积问题。为了由求一直线和一阿基米德螺线围成的图形的面积，卡瓦列里在第六卷中推广了他的"所有"(omnes)的概念，引入了"所有周长""所有幂"的定义，得到了一些有关曲线 $y=x^n$ 的求积的结果。在第七卷中，他避开他先前的"所有"概念，给出了所谓"卡瓦列里原理"的一种新形式，运用它得到一些相当于二次多项式积分的新的几何结果。

《不可分量几何学》共700多页，异常难读，但它受到许多十七世纪数学家的重视，1653年便又重印，在当时产生了很大影响。托里切利(E. Torricelli)曾称卡瓦列里开辟了一条求积问题的"皇家之路"。《不可分量几何学》一书至今仍具有现实意义。1940年俄译本出版，1966年被全文译成意大利语出版。

《平面与立体轨迹引论》(Ad locos planos et solidos isagoge) 法国数学家费马(Pierre de Fermat，1601—1665)著。大约写于1629年，但直到1679年才出版。本书使费马与笛卡儿共享着解析几何创立者的盛誉。由于对求极大、极小值与曲线的切线的研究，费马被认为是微分学的创始人之一，同时他开创了近

代数论的研究，又是概率论的早期研究者。

费马认为自己的数学工作继承了韦达（Francois Viète）的传统。他以韦达的符号代数与方程的理论作为自己数学研究的工具，更进一步，他试图将代数与几何研究结合起来。他们的数学研究是以希腊人的著作为起点的。帕波斯的《数学汇编》的第七卷中被认为含有一些所谓的“分析的”著作（不同于《几何原本》这样的“综合的”著作），惜已失传，费马追随韦达等人试图将它们复写出来，其中包括阿波罗尼奥斯的《论平面轨迹》一文。他认为希腊人的研究尽管处理了数量众多的轨迹，但没有形成一般的理论。这里轨迹的意义沿留希腊人的用法，称直线和圆为平面轨迹，椭圆、抛物线、双曲线等称为立体轨迹。因此费马写成了《平面与立体轨迹引论》。该书尽管用希腊几何的传统风格写成，但费马利用代数分析试图给出帕波斯给出的一些定理的证明。他认为阿波罗尼奥斯讨论的所有轨迹都可表示成含有两个未知数的不定代数方程的形式，运用韦达的方程理论对这些方程的分析就可以洞悉轨迹的本质与作法。费马写道：“当两个未知量出现于一个最后的方程中时，我们就有一条轨迹，其中一未知量的端点描述出一条直线或曲线。直线是简单的、唯一的；曲线则有无穷多类—圆、抛物线、双曲线、椭圆等，如此费马建立了方程与曲线之间的对应。费马取一固定直线为轴，其上一定点为原点，从原点沿轴量出第一个未知量 A 的可变长度，第二个未知量的相应值为 E。他以此为长度从第一个未知量的末端开始并与轴成一定角（通常为直角）作出一线段，则第二个未知量的各种不同长度的末端就在 A、E 平面上产生一条曲线。跟笛卡



儿一样，费马没有利用坐标系，而是采用具有一移动纵坐标的一条轴。这是坐标几何的肇始。费马将一般二次方程 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ 依据系数的可能取值分为七种不可约情形，表明每一种不可约方程如何定义一条曲线：$Dx=Ey$（直线）、$cxy=F$（等轴双曲线）、$Ax^2\pm Cxy=By^2$（直线）、$Ax^2=Ey$（抛物线）、$F-Ax^2=Ay^2$（圆）、$F-Ax^2=By^2$（椭圆）、$F+Ax^2=By^2$（双曲线）。在每一种情形下，他证明方程包含作出曲线的一切必要数据。由于费马的目的是想重新写出阿波罗尼奥斯的著作，他保留了希腊数学中的一些限定，如方程中的量必须同性。此外，他不使用负坐标，因而作出的曲线是不完整的。

尽管费马与笛卡儿的坐标几何本质上相同，但其表述却迥然相异，费马集中于基于曲线的方程，曲线的几何作图问题，大量运用了韦达的代数和方程论知识；相比之下，笛

卡儿忽视作图问题，在《几何学》中致力于一种新的更高级的方程论。但他们却卷入了一场优先权的争论。他们创立坐标几何的功绩都已得到历史的承认。《平面与立体轨迹引论》已成为解析几何史上的经典著作。坐标几何的创立极大地推动了整个数学的发展。

《求极大值与极小值的方法》(Methodus ad disquirendam maximam et minimam) 法国数学家费马(Pierre de Fermat，1601—1665)著。写于1636年前，由于费马从来不愿公开发表自己的著作，只是在给朋友的信中或以其它方式记下自己的发现，因而其著述的年代不能确定。该文记述了费马利用“准等式”(adequality)求极值的著名方法，是微分学前史上的重要经典文献。

费马的求极值的方法后来成为求代数多项式的一阶导数的法则，跟他的坐标几何思想一样也是起源于将韦达的代数应用于帕波斯的《数学汇编》中的一个问题的研究。帕波斯曾试图将一已知线段分成数份，使部分线段所成的矩形相互成最小比。在对这一问题的代数分析中，费马意识到可以将其与二次方程联系起来。他认为这意味着方程的常数项只能取使方程只有单一重根解的特殊值。如费马考虑了“将一线段分成两部分，使两线段的乘积最大”这种简单情形。这一问题的代数形式即 $bx-x^2=c$，其中 b 是所给线段长度，c 是部分线段的乘积，如果 c 是所有乘积中的最大值，则方程只能有一个重根。基于该方程有两相异根 x、y 的假设，费马得到 $bx-x^2=c$ 和 $by-y^2=c$，因而 $b=x+y$，$c=xy$。认为这些关系对上述形式的任意二次方程都一般地成立，费马然后考虑了一个重根即 $x=y$ 的情形。他发现 $x=b/2$，$c=b^2/4$，如此便求得上述问题的正确解，费马认为他的这一方法是完全普遍的。在《求极大值与极小值的方法》中，费马将假定的两相异根记为 A 和 $A+E$，(即 x 和 $x+y$)，其中 E 表示根之间的差。例如，求表达式 bx^2-x^3的极大值，费马如下进行：

$$bx^2-x^3=M^3,$$

$$b(x+y)^2-(x+y)^3=M^3,$$

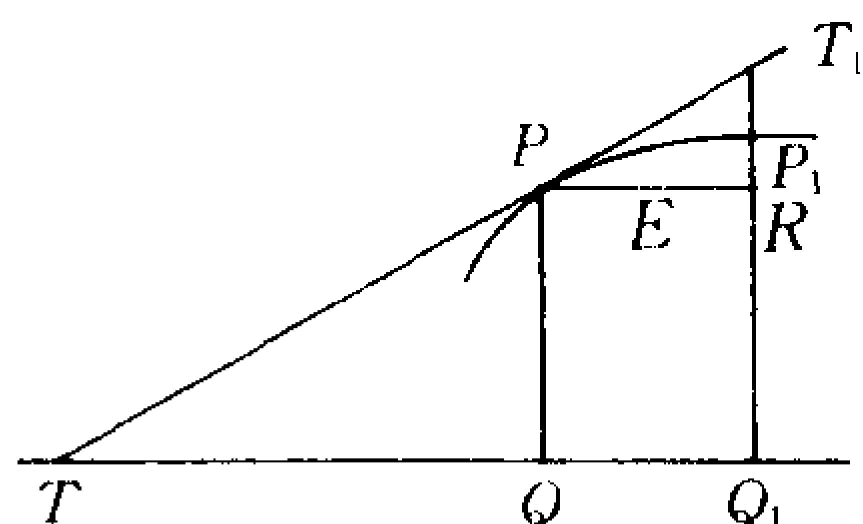
因而$2bxy+by^2-3x^2y-3xy^2-y^3=0$。用 y 除上式得方程

$$2bx+by-3x^2-3xy-y^2=0。$$

这一关系对形如 $bx^2-x^3=M^3$的任意方程都成立。但当 M^3是极值时方程有一个重根，即 $x=x+y$ 或 $y=0$，所以$2bx-3x^2=0$或 $x=2b/3$，$M^3=4b^3/27$。费马的方法适用于任意多项式 $p(x)$。为了运用韦达的方程理论确定多项式的系数之一与根的关系，它故意假定了两相等根的不等性，当费马使两个根相等时，这一关系就导致了一个极值解。费马称其令两根相等之前的方程为“准等式”。

费马的极大与极小的方法有两个重要的应用，第一个是求曲线的切线的方法。已给曲线的方程，费马能够在曲线上的任一点作出曲线的切线。设曲线上一点 P 处切线 PT 已作出(如图)费马欲求出该切矩 TQ 以确定 T 的位置。他设 QQ_1是 TQ 的增量，长度为 E，因为$\triangle TQP\backsim$

$\triangle PRT_1$所以 $TQ:PQ=E:T_1R$。费马认为T_1R和P_1R差不多长，因此



$TQ:PQ=E:(P_1Q_1-PQ)$。若曲线的方程为$y=f(x)$，此即$TQ:f(x)=E:[f(x+E)-f(x)]$。因此$TQ=\dfrac{E\cdot f(x)}{f(x+E)-f(x)}$。费马对具体的曲线方程，用$E$除上式的分子、分母、然后令$E=0$就求得$TQ$。第二个重要的应用是确定几何形的重心的方法。费马实际上是利用了一个无穷小增量，这种方法应以极限理论为基础，但费马并没有严格的极限工具。

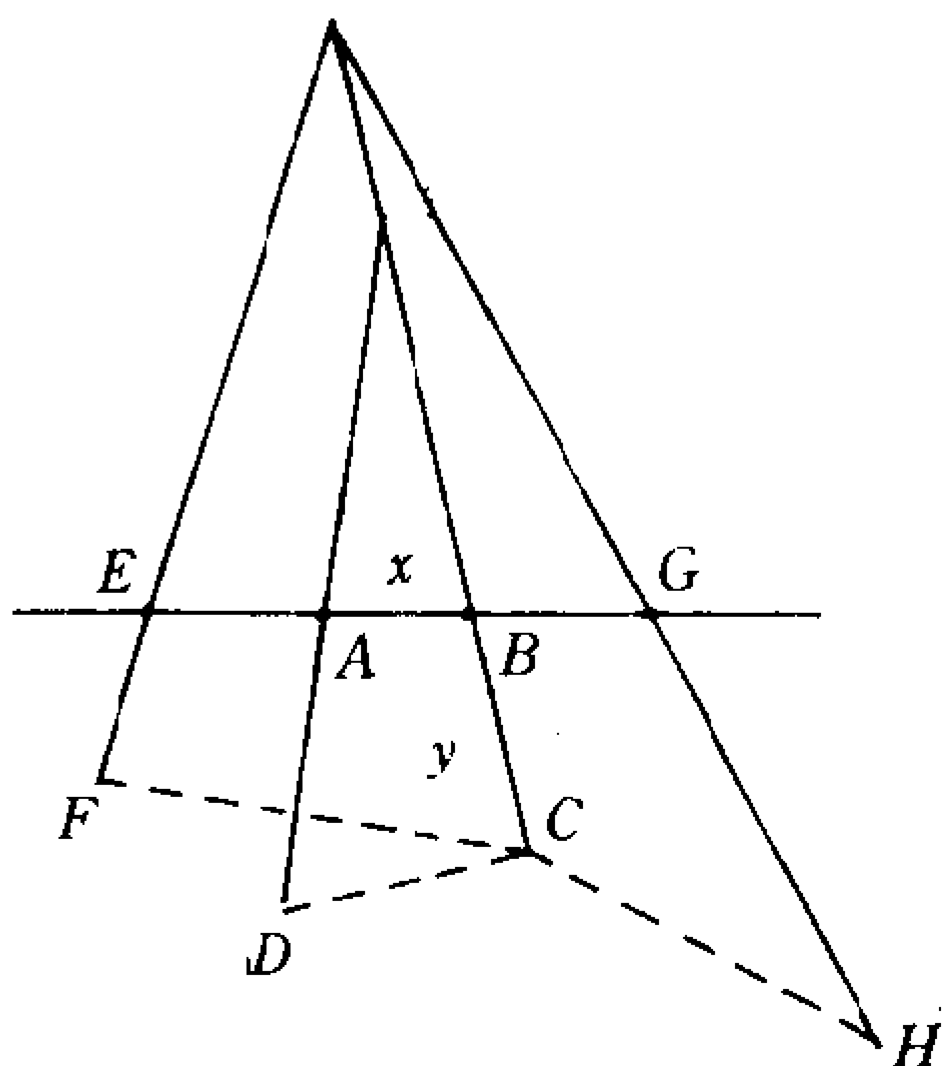
1638年春费马的极大、极小方法和求切线法引起了费马与笛卡儿之间的一场关于优先权的争论。但跟坐标几何的情形一样，他们很快便认识到对方的各自的独创性。1642年费马的方法发表后，许多数学家很快便得到了他们各自的更一般的方法。不久，费马关于极大、极小值的方法就被牛顿和莱布尼茨的微积分所取代。

《几何学》(Géométrie) 法国数学家、哲学家、自然科学家笛卡儿(René Descartes, 1596—1650)著。1637年作为附录发表在笛卡儿的巨著《方法论》(Discours de la méthode)中。《几何学》以符号代数学为基础，将代数学应用于几何学，从而建立了一门新的数学分支——解析几何学，在数学史上有着不朽的地位。

作为近代理性主义哲学的创始人，笛卡儿对数学的研究只是他为达到更高目标所做的努力的一部分，他的目的是要建立一种新的可靠的知识体系，并寻求指导推导和发现科学真理的一般方法论。他认为数学提供了获得必然结果及有效地证明其结果的方法，而数学方法便是在一切领域里建立真理的可靠方法。《几何学》便是为了证明他的方法的有效性而写。笛卡儿批评了自希腊人以来几何学过于抽象且过多地依赖于图形的倾向，并对当时代数学的晦涩与教条加以指责，主张代数和几何相结合，便产生了《几何学》一书。

《几何学》一共分三部分。第一部分是全书的基础部分，主要致力于用代数解决几何问题。他首先指出：几何作图实际上要求对线段作加减乘除，对个别线段取平方根，因为这几种运算既是代数运算，因而它们可以用代数的术语表出，即使得几何线段的代数成为可能，从而奠定了新解析几何的基础。对于几何作图，他用字母来表示已知和未知线段，然后试图弄清这些线段之间的相互关系，并使得同一个量可以用两种方法表达出来，这样就得到一个方程。之后用已知线段表出未知线段，就利用该未知线段的代数方程将它画出，这种确定的几何作图问题的结果是一个唯一的长度。其后，笛卡儿考虑了不确定问题，其结果是以许多长度作为答案，这些长度的端点充满一条曲线。他对帕波斯问题的解决便隐含了现代

解析几何(坐标几何)的基本思想。所谓帕波斯问题即在平面上给定 n 条直线，求所有这样的点的位置(即轨迹)，从这点向每一已知直线以已知角作直线，使所得到的 $n/2$ 条线段的乘积与其余 $n/2$ 条的乘积成定比(当 n 为奇数时，使 $(n+1)/2$ 条线段的乘积与其余 $(n-1)/2$ 条的乘积成定比)。笛卡儿给出了 $n=4$ 时的解。假定 AB、AD、EF、GH 是已知四条直线，笛卡儿假定 C 点在所求轨迹上，使连线 CB、CD、CF、CH 满足条件。为了应用代数分析，他取线段 AB 从 A 点量取的长度为他的第一个未知数 x，BC 的长度为第二个未知数 y，如此，他将轨迹想象为由与 AB 保持成一固定角的纵轴 BC 的端点 C 所生成，其长度是 AB 之长的函数，这样就建立了平面上的点与一对实数的对应关系，这正是解析几何学的实质。当然现今所谓标准的笛卡儿坐标系并未在《几何学》一书中出现。我们可以称笛卡儿建立了一个倾斜坐标系，而且他的 x,y 值只取正值，这标志着坐标几何的开端。笛卡儿进一步发展了他的曲



线方程的思想，断言曲线的次与坐标轴的选取无关，并考虑用一坐标轴写出两个不同曲线的方程，联立解出这两个方程来找出这两条曲线的交点，这是用代数解决几何问题方面的一次飞跃。

在《几何学》第二部分中笛卡儿考虑了曲线的分类及其性质，打破了希腊人的分类传统，而用代数方程的直接可解性区分“几何曲线”与“非几何曲线”，他把复杂的高次曲线也作为“几何”曲线，而把不能用代数方程表示的曲线称为机械曲线。用现代术语，所谓几何曲线就是代数曲线而机械曲线就是超越曲线，这样笛卡儿开辟了全新的曲线领域，之后对几何曲线作了分类。《几何学》的第三部分又回到了第一部分的问题，解决了一些几何作图问题，更重要的是展开了笛卡儿关于方程的代数理论。笛卡儿的理论从将每一个方程写成 $p(x)=0$ 的形式开始，其中 $p(x)$ 是只有实系数的代数多项式，他叙述并直觉地证明了代数学基本定理，给出了判别方程根的符号的所谓笛卡儿符号法则。对于 n 次方程笛卡儿运用方程的基本对称函数消去方程中含有 x^{n-1} 的项，从而开辟了通往三次、四次方程一般解的道路，并导致了关于方程解的一般理论，推动了代数学的发展。

在《几何学》中笛卡儿充分发挥了代数学的威力，利用坐标系把代数和几何结合起来，使解析几何成为一种普遍的方法。从此，数学一改古希腊以来依赖于几何学的局面，大大地向前迈进了一步。解析几何学的诞生极大地便利了牛顿、莱布

尼茨的微积分的创立，改变了整个数学的面貌，是数学发展史上的重要里程碑。

值得一提的是，另一位法国数学家费马(Pierre de Fermat)在1629年也独立地发现了坐标几何学的基本原理，但他关于坐标几何的著作《平面与立体轨迹引论》(Ad Locos planos et solidos isagoge)直到1679年才出版，这在当时曾引起了优先权的激烈争论，但笛卡儿和费马研究坐标几何的目的和方式有着显著的不同，他们作为坐标几何的创始人的地位都已在数学史中得到确认。

《圆锥曲线论稿》(Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cone avec un plan) 法国数学家，建筑工程师德扎格(Girard Desargues, 1591—1661)著。书名直译为《试图处理圆锥与平面相交情形的文稿》。发表于1639年，据说初版只印了50本，不久就全部佚失了。直到1845年法国数学史家沙勒(Michel Chasles)偶然发现了德扎格的学生拉伊尔(P. de La Hire)的一份手抄本，便将其发表在1864年出版的德扎格著作集中。但1950年左右建筑史家莫伊西(Pierre Moisy)又在巴黎国立图书馆发现了原版本，由法国数学史家塔顿(René Taton)收入《德扎格数学全集》中。《圆锥曲线论稿》的全部英译文已发表在《德扎格的几何学著作》(J. V. Field and J. J. Gray, The Geometrical Work of Girard Desargues, Springer-Verlag, 1987)一书中。

自学成才的德扎格是十七世纪最富独创精神的数学家之一，是射影几何学的先驱。《圆锥曲线论稿》开创了射影几何学的研究。德扎格的目的是想给在当时的技术领域中起重要作用的透视图、石料截面图等以合理的基础，试图明确其几何学原理。他想用“普遍的方法”和“统一的语言”来研究和表现那些看来不同的东西，如有关圆锥曲线的定理。在本书中他以投射和截景作为他的“普遍的方法”，并由此统一处理了几种不同类型的圆锥曲线。首先是他引入了无穷远点和无穷远直线，之后叙述了一个现今称为德扎格定理的基本定理，即从一点 O 到一三角形 ABC 的顶点的连线形成一投射锥，该投射锥的一个截景就含有一三角形 $A'B'C'$，其中 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 分别对应，则两三角形的对应边(即 AB 与 $A'B'$，BC 与 $B'C'$，AC 与 $A'C'$)相交的三个交点必在一条直线上。反之，若两三角形的三对对应边相交于共线的三点，则连接对应顶点的三条连线必相交于一点。德扎格分别对于二维和三维的情形给出了该定理的两个证明。此外，德扎格得到了射影几何的另一基本结论：交比在投影之下的不变性。他在本书中处理的对合关系，至今仍然是射影几何中一个重要的概念。他从图形所在平面外一点把整个图形作一投射，并取投射锥的一个截景，得到一个重要而普遍的结论：若作一圆锥曲线的内接四边形，则任一不过顶点的直线与圆锥曲线以及完全四边形对边相交的四对点有对合关系。这就是著名的德扎格对合定理。德扎格还引入了调和点

组的概念，阐述了极点与极带的理论，证明了关于圆锥曲线的一些定理。

在《圆锥曲线论稿》中，德扎格不仅引入了诸如无穷远元素等新概念以及证明了许多新定理，最重要的是他开始以投射和截景作为一种新的证明方法。通过投射和截景统一处理了几种不同类型的圆锥曲线，从而开辟了一条通向一门新几何学的道路。《圆锥曲线论》一书用法文写成，不同于当时一惯用拉丁文著述的习惯，并尽量采用通俗语言，引入了许多形象的术语，但也因而使它异常难读。在出版的当时并未得到普遍的重视，尽管德扎格的天才备受笛卡儿、费马等人的推崇。《圆锥曲线论稿》一书一度失传的主要原因还在于当时解析几何、微积分异军突起，吸引了当时最优秀的数学家的注意，因而射影几何学这一新兴学科被忽视了。德扎格的研究在十九世纪重新被人们发现并受到重视是在法国数学家蒙日及其学生庞斯列等人复兴了综合几何学之后。德扎格的理论成为其后射影几何研究的基础。因此，《圆锥曲线论稿》在射影几何学史上仍然具有重要地位。

《圆锥曲线论》(Essay pour les coniques) 法国数学家、物理学家、思想家帕斯卡(B. Pascal, 1623—1662)著。1639—1640年写成出版。这本小册子只发行了很少份，当时极少有人知道，旋即失传，直到1779年才重新找到。这是继德扎格的《圆锥曲线论稿》之后第二篇重要的射影几何学著作。

受德扎格的敦促，帕斯卡开始研究射影几何学。他很快就掌握了德扎格的《圆锥曲线论稿》的基本思想：无穷远元素的引入；圆锥曲线定义为圆锥的平面截线；将圆锥曲线作为圆的射影进行研究；对合关系等。1639年6月，16岁的帕斯卡就做出了他的第一个伟大发现，即现今称为帕斯卡的“神秘六线形”的性质定理，用现代语言叙述即：若一六边形内接于一圆锥曲线，则每两条对边相交所得的三点在同一直线上。帕斯卡并且看到了基于此性质对圆锥曲线进行综合射影研究的可能性。其后他便写成《圆锥曲线论》，其中载录了帕斯卡自己发现的包括上述定理在内的几个典型命题。论文是作为进一步研究的提纲写出的，勾画了他刚刚构思的一篇关于圆锥曲线的重要论文的概要。因此，对上述重要的帕斯卡定理他没有给出完善的证明。他只是说由于这对于圆成立，故通过取投射和取截景，它对于所有圆锥曲线都成立。遗憾的是，帕斯卡构思的第二篇关于圆锥曲线的大作终未公开发表。看来帕斯卡于1640年12月前就已取得相当的进展，他从自己的定理中推导出了阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》中的大部分定理。但其后他只是断断续续地完善该论文。尽管德扎格和梅森分别于1642和1644年提到这篇文章，但显然直到1648年帕斯卡才得到关于帕波斯问题的纯粹几何的一般定解(帕波斯问题是1637年笛卡儿在其著作中显示其新解析几何学威力的主要例子)。帕斯卡的成功表明，在这一领域中射影几何与笛卡

儿解析方法具有同样的威力。因而帕斯卡在其论文的最后一部分“圆锥曲线构成的几何轨迹”中保留了这一问题。

1654年帕斯卡声称他的论文已近于完成，说整篇著作基于他16岁前发明的一个基本命题(即上述帕斯卡定理)。他还提到了一些特殊的几何命题，其射影方法可以有效地应用于这些问题：由三个或四个条件确定的圆或球；由五个已知元素(点或切线)确定的圆锥曲线；由直线，圆或圆锥曲线构成的几何轨迹；以及一般射影方法。看来只有莱布尼茨看过论文的手稿，我们知道的大部分有关论文的准确细节都是莱布尼茨提供的。莱布尼茨曾提到它的内容分为六部分：①圆锥曲线的射影生成；②“神秘六线形”的定义和性质——帕斯卡定理及其应用；③极点、极线及中心与直径的射影性质；④与圆锥曲线的经典定义有关的各种性质；⑤由五种已知元素确定的圆锥曲线的作法；⑥立体轨迹问题(帕波斯问题)。尽管莱布尼茨透露的这些内容不足以使我们给出帕斯卡论文的全貌，但已足能显示其内容的丰富性和帕斯卡的思想的清晰。帕斯卡充分意识到了射影方法的威力，假如这一著作能在当时得到很好的研究(假如德扎格的著作也不是很快失传)，可以想象它对射影几何学的发展将有巨大推动作用。不幸的是，直到19世纪这一科目才在庞斯列及其后继者的著作中发展起来。庞斯列是最早认识到帕斯卡对射影几何作出重要贡献的人之一。

《无穷算术》(Arithmetica infinitorum) 英国数学家沃利斯(John Wallis，1616—1703)著。1655年出版于伦敦。该书的出版确立了沃利斯做为一个数学家的声誉。他的兴趣包括破译密信、语法学。他的著述广泛包括语言学、档案学、音乐、神学等，并曾长期为政府破译密信。在二十岁左右开始学习数学，独立地得到一些发现。1649年被任命为牛津大学萨维尔几何学教授。几年后便出版了该书，它成为十七世纪数学史上的一个里程碑。

十七世纪初期无穷小问题已经得到很多研究，其中开普勒在他的《酒桶新立体几何》(1615)中，摒弃了烦琐的希腊穷竭法，例如，认为圆是由无穷多小三角形组成，其无穷小的底边在圆周上，从而开创了无穷小研究的新时代。之后卡瓦列里创立了不可分量几何学(1635)，得到著名的所谓卡瓦列里原理。在《无穷算术》的献辞中，沃利斯对先辈们的工作做了评论，他特别提到卡瓦列里的方法如何激起他对化圆为方问题的兴趣。在沃利斯之前已有一些几何学家独立求得曲线 $y=x^n$ 下的面积，当指数 n 为正整数时，他们的方法是充分的，但当 n 为负数或分数(如双曲线情形)时就出现了困难。在该书中，沃利斯首先通过扩展“连续性原则”，极其娴熟地运用归纳法(不同于今天的数学归纳法)将指数扩展到负数和分数，从而推广了许多关于面积的结果。这里沃利斯也有失误，根据他的推理，认为 $\frac{1}{0}$ 是无穷大(首创∞符号表示无穷

大)，那么比$\frac{1}{-1}$，$\frac{1}{-2}$，…应该是比无穷还要大(命题 Civ)，而没有认识到这只是纵坐标另一边的空间中面积的度量。下一步沃利斯转向应用他的方法求具有更复杂表示的曲线，如 $y=(a+x)^2$所围的面积。事实上，他求解了积分 $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$的值。不仅如此，他还研究了其推广的积分

$$I(k,n)=\int_0^1(1-x^{1/k})^n dx。$$

他先是列表求出对 k,n 为整数时 $1/I(k,n)$的值。之后列出了对 $k=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots$，时的值。当 $k=n=\frac{1}{2}$ 时，$1/I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{\pi}$ $\left(\text{他利用}\square\text{表示}\frac{4}{\pi}\right)$，这里他注意到□小于

$$\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times\times10\times10\times12\times12\times14}\times\sqrt{1\frac{1}{13}},$$

而大于

$$\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times\times10\times10\times12\times12\times14}\times\sqrt{1\frac{1}{14}}。$$

这两个结果趋于相等(命题191)，因而有结果

$$\square=\frac{4}{\pi}=\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\times9\times9\times11\times11\times\cdots}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times\times8\times10\times10\times12\times\cdots}$$

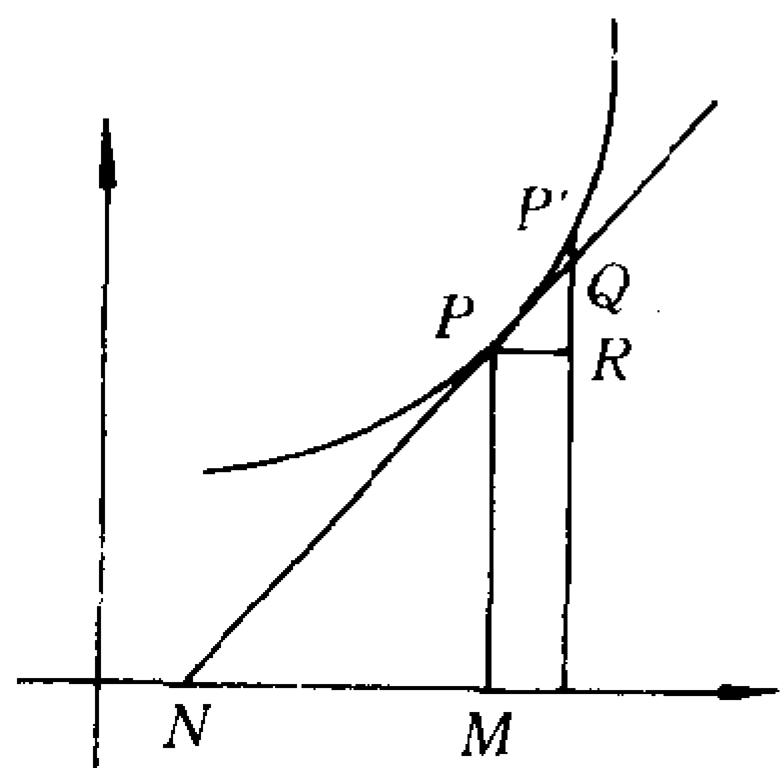
这里他将其序列扩展到了无穷，得到这一著名的无穷乘积表达式，其中巧妙地运用了插值方法，该方法基于连续性假设。这种对无穷序列、无穷连乘积的大胆使用使沃利斯成为牛顿和莱布尼茨之前在把分析方法引入微积分方面工作做得最多的人。

《无穷算术》对沃利斯的同时代人和后人产生了巨大的影响。其重要性不仅在于他处理的单个问题上，更在于他的方法。他的分析观点是反传统的几何观点的。他的列表表示函数的思想也是卓越的。《无穷算术》对牛顿的影响是独一无二的，其直接的结果是牛顿二项式定理的发现。该书成为其后几何学中的一切发展的基础。

《几何学讲义》(Lectiones geometricae) 英国数学家巴罗(Isaac Barrow，1630—1677)著，1670年出版。该书对微积分的发展起了重要作用。作为剑桥大学的首届路卡斯教授，巴罗在十七世纪六十年代中期就曾讲述过该书的内容。他的学生牛顿曾经在1664—1665年听过他的讲授，并帮助巴罗准备讲义。无疑它对牛顿创立微积分产生了影响。正是巴罗最先承认牛顿的天才，并于1669年将路卡斯教授席位让贤于牛顿。

《几何学讲义》共有13讲。在前5讲中他定义了度量一切运动的时间的流动变量。之后考虑了通过结合运动的点和直线而产生的曲线的性质。在第6—12讲讲述了他对前人工作的系统推广(其中包括笛卡儿、沃利斯、费马、惠更斯、帕斯卡等人的工作)和他自己的新发现。内容涉及求切线、面积、曲线的长等问题。第13讲中是与前面没多大关系的内容——关于方程的几何作图法。巴罗的讲义通篇采用古典的几何观点来处理切线问题和求积问题，而不是象沃利斯那样采取分析的方法。例

如他把曲线的切线定义为同曲线仅在一点切触的直线。但他给出了通过计算求切线的方法，并认为这种方法比前人的方法“更有利、更一般”(第10讲)。在此过程中，他利用了微分三角形或特征三角形(如图)。他从三角形 PRQ 出发，利用 ΔPRQ 相似于 ΔNMP 的事实，断定切线的斜率 $=QR/PR=PM/MN$，巴罗



认为，当弧 PP' 足够小时，就可以把它和 P 点切线上的一段 PQ 等同起来，从而用特征三角形 PRP' 代替三角形 PRQ。再利用曲线的方程，舍弃掉小量的高次幂，便求得曲线在 P 处切线的斜率。实际上，巴罗是把切线看作是当增量 PR 趋于零时割线的极限位置，并通过忽略“高阶无穷小”的方法来取极限。更重要的是，他在该书的第10讲中给出了表明曲线的切线问题和求积问题之间的互逆关系的一个重要定理。这是对微积分基本定理的最早认识。但可惜的是他只是在古典的几何意义下处理该问题，而没有侧重于新的计算方法和计算程序，而这才是发明微积分的关键。虽然巴罗被有些学者认为是微积分的发明者，但巴罗本人并没有认识到他的这一“基本定理”能为“以独特计算法为其特征的一门新科学”奠定基础，这被作为说明“发现”与“认识到重要意义”之间的明显区别的一个极好实例。但无论如何，他的发现为最终创立微积分做出了积极贡献。

《运用无穷多项方程的分析学》(De analysi per aequationes numero terminorum infinitas) 英国数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家牛顿(I. Newton，1642—1727)著。写于1669年，但迟至1711年才发表。

创建微积分是牛顿最卓越的数学贡献。他将前人发现的关于求曲线的切线、求极大极小值这类问题以及另一类求面积、体积等问题的一些特殊方法、技巧统一为一般的算法，并确定了微分与积分两类运算的互逆关系，因而与莱布尼茨同享创建微积分的盛誉。他关于微积分的发现始于1664年。1666年10月他写成一篇手稿记录了自己的发现。后来称为“1666年10月流数短论”(The October 1666 Tract on Fluxions)。这是关于微积分的最早的论文，但直到新近才发表。其中便包含了历史上第一次以明显形式出现的微积分基本定理。1668年梅卡托的《对数技术》出版，其中包括他关于 $\log(1+x)$ 的著名级数和牛顿几年前已经得到但未发表的一个重要结果。关于优先权的考虑促使牛顿于1669年初夏写出了《运用无穷多项方程的分析学》，虽然这本小册子直到1711年才出版，并且仅仅包括牛顿1664—1666年工作的片断，但由于在朋友中的流传，使当时的一些数学家得以了解牛顿的发

现。

该书首先通过一些未加证明的法则叙述了他(借助于微积分基本定理)计算曲线 $y=f(x)$ 下的面积的一般方法(牛顿认为:"与其严格地证明,还不如简单地解释")。

第一个法则:如果 $y=ax^{\frac{m}{n}}$,则所求面积是

$$\frac{a}{\left(\frac{m}{n}\right)+1}x^{\frac{m}{n}+1}=\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}。$$

第二个法则:"如果 y 是由具有上述形式的一些项组成的,则所求面积是由其中每一项分别产生的面积组成的。"——这说明逐项积分的合理性。

第三个法则:"如果 y 或 y 的任何一项比上述形式复杂(即不是多项式),则必须先化简,即对一般项进行运算,其方式如同算术中的乘和除法、开方,或者解假定成立的方程。"

为了通过"解假定成立的方程"计算面积,牛顿举例说明了方程的一种近似解法,即现今所谓的"牛顿法"。用这种方法解多项式方程

$$f(x)=\sum_{i=0}^{k}a_ix^i=0$$

的过程如下所述:设真正的根为 x_*,给定它的第 n 个近似值 x_n,将 $x_*=x_n+p$ 代入方程,得到

$$0=\sum_{i=0}^{k}a_ix_*^i=\sum_{i=0}^{k}a_i(x_n+p)^i$$

$$=\sum_{i=0}^{k}a_ix_n^i+p\sum_{i=0}^{k}ia_ix^{i-1}+\cdots$$

所以

$$0=f(x_n)+pf'(x_n)+\cdots$$

通过忽略 p 的高次项,得到

$$p\approx-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

因而

$$x_*\approx x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1}$$

即得到第$(n+1)$个近似值。为了解形如

$$f(x,y)=0$$

的方程,牛顿将上述方程进行了推广,作为 x 的幂级数求出 y,然后将幂级数逐项积分,计算 $f(x,y)=0$ 下的面积。通过将上述逐次近似法用于级数的反演,牛顿第一次得到了 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的幂级数。此外,牛顿还利用这些三角函数的幂级数来计算摆线和割圆曲线下的面积。

《流数法与无穷级数》(Methodus fluxionum et serierum infinitarum) 英国数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家牛顿(I. Newton,1642—1727)著。撰于1671年。这是牛顿在数学方面的代表作,其中将1666年10月的流数短论进行了扩充。其英译本于1736年出版,但原拉丁文本迟到1779年才出版。牛顿生前一直在利用这部著作,其手稿形式便由于一些数学家借阅而广为人知。

《流数法与无穷级数》对于牛顿的流数分析方法提供了比《运用无穷多项方程的分析学》更一般、更好的阐述。其前一部分包含了后一本书的扩充,并且包括用于求解代数方程和微分方程的无穷级数法(待定系数法)的详细讨论。接着,以20个正式叙述的问题为标题,相当广泛地收集了牛顿的级数法和流数法的应用实例。"流数法"反映了这一

理论的力学背景，流数被定义为可借运动描述的连续量——流量的变化率。牛顿表述流数法的基本问题为：已知流量间的关系，求它们的流数的关系，以及逆运算。在“问题3——极大值和极小值的确定”中，牛顿给出了下述原理：

当一个量取极大或极小值时，它的流数既不增加也不减少，…。所以求出它的流数，并令这个流数等于零。

这里，牛顿的意思即，使 $f'(x)=0$ 的点即是 $f(x)$ 的极值点。他列举了能用这种方法求解的 9 个几何问题，如问题 4 是作曲线的切线。在该书中，牛顿继续使用无穷小瞬作为流数计算的基础，他记时间的瞬为 0，它所引起的流量的瞬为 $\dot{x}0$，$\dot{y}0$，…，他在具体计算中指出那些含 0 的项可被看作零而略去。例如，已知方程 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$，分别以 $x+\dot{x}0$、$y+\dot{y}0$ 代替 x，y，得

$$(x+\dot{x}0)^3-a(x+\dot{x}0)^2+a(x+\dot{x}0)(y+\dot{y}0)-(y+\dot{y}0)^3=0。$$

展开左边各项并代入 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$，两边同除以 0，然后略去含 0 的项，即得流数关系

$$3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y+a\dot{y}x-3\dot{y}y^2=0。$$

在问题 8 中，牛顿正式引入了他的代换积分法，给出了蔓叶线、摆线和阿基米德螺线的巧妙的求积方法，这些求积法利用了一种强有力的积分变换法，其中总括了分部积分法和代换积分法。问题 12 是关于曲线长度的确定，牛顿利用基本的流数法计算弧长，他由特征三角形导出了弧长的关系式。在例 5 中求出了蔓叶线

$$y=\frac{(a-x)^2}{\sqrt{x(a-x)}}$$

的长度。在最后一个求弧长的例题中，牛顿应用他的级数

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

求出割圆曲线

$$y=x\ \mathrm{ctg}\ \frac{x}{a}$$

在 $[0,x]$ 区间上弧长的无穷级数展开式为

$$t=x+\frac{2}{27}\cdot\frac{x^3}{a^2}+\frac{14}{2025}\cdot\frac{x^5}{a^4}+\frac{604}{893025}\cdot\frac{x^7}{a^6}+\cdots。$$

《流数法与无穷级数》中还包括两个积分表。第一个表的标题是：“与直线图形有关的曲线一览表”，其中列出了相应的面积能够通过微分或反微分明确算出的一些曲线。第二个表是：“与圆锥曲线有关的曲线一览表”，其中列出了一些曲线，其相应的面积能够通过适当的圆锥曲线下的面积来表示。牛顿列举了一些面积的计算，以说明他的积分表的应用。

在该著作的一个附录（1969 年才首次发表）中，牛顿发展了一种曲线的“最初与最终”比的几何理论，后来部分地纳入了 1687 年版《自然哲学的数学原理》的第一编第一章及后来的《论曲线的求积》中。

《自然哲学的数学原理》(Philosophiae naturalis principia mathematica) 伟大的英国数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家牛顿(I. Newton，1642—1727)著。1687 年出版。在科学史上，甚至在整个人类文明的进程中，《原理》的

出版都是一件特别引人注目的大事件。这是一部划时代的巨著。虽然它是一部研究天体力学的著作，但它在数学史上也有着极为重要的地位。这不仅因为它是第一本公开出版的包含牛顿的微积分发明的著作，而且因为《原理》中提出的课题和研究方法极大地影响了后世的数学研究。

《原理》分为三编。第一编意在从数学观点发展一般动力学内容，是对自由空间(既无阻力的空间)中压力作用下物体运动的数学处理。第二编研究物体在阻尼介质中的运动，从而奠定了流体动力学的理论基础。第三编的标题为“论宇宙系统”，其中第一编中的重要结果在该编中的物理学和天文学问题中得到了应用。在牛顿的体系中，行星的运动、彗星的运动以及潮汐现象得到了统一的阐述。在该编中，牛顿叙述了万有引力定律。在《原理》的序言中，牛顿声称自己要“努力把自然现象放在数学的控制之下”，其目的是发现并宣告“一切事物按照测度、数量和重量安排”的准确方式，用数学摹写自然。他认为他提出的自然哲学的原理其实不是哲学的，而是数学的。因而第一编中将物体运动作了系统的数学处理，而在第二编中数学兴趣甚至大于物理兴趣。

《原理》中的陈述是建立在牛顿自己的数学发现的基础之上的，通常被认为是以希腊几何学风格写成的。从该书中，人们看到的不是微积分的解析公式，而是几何的比例公式。在试图说明其流数法的早期来源时，牛顿声称他先用他的方法推导出证明，然后将它们重新表述为综合几何的形式。但仔细的考察表明，牛顿这种方法背后的各种概念不是来自经典几何而是来自微积分。外表的欧几里得形式掩盖了牛顿著作的真正特征。从命题到命题，从引理到引理，牛顿总是通过先建立几何条件或相应的比，然后立刻引入一些经过一些仔细定义的极限过程。这种证明或发现的方式是基于一些关于极限过程的一般原理的。关于极限的论述是在第一编开始的第一部分的几个引理中给出的。在《原理》中，只要涉及微积分的基本概念，牛顿就给出了几种解释，他试图为他的最终比的说法辩护，说明最终比不是最后量的比，而是无限地减少的这些量的比所趋近的极限。而在《原理》第二编的第二部分(尤其引理 2)中，牛顿又展示了另一种分析方法，在那里牛顿介绍了“瞬”的概念和方法。他定义瞬为变量或不定量的瞬间的增量或减量。牛顿认为这一引理包含了一个一般方法的基础。所以牛顿在《原理》中事实上给出了新分析学的三种表述，即用无穷小的概念，利用最终比或极限，以及运用流数法。

《原理》于 1687 年出版后，在 1713 和 1716 年分别出了第二或第三版，其中第三版由拉丁文译成了英文。1931 年我国出版了中译本(郑太朴译《自然哲学的数学原理》，商务印书馆，1931 年 4 月初版，1957 年 5 月重印)，许多学者对之作了细致研究。

《广义算术》(Arthmetica universalis) 英国数学家、物理学

家、天文学家、自然哲学家牛顿(I. Newton，1642—1727)著。1707 年出版。系根据作者于 1673—1683 年间的讲义编写而成。书中载录了牛顿在几何问题的代数解法及方程论方面的一些重要结果。英文各版本分别于 1720、1728 和 1769 年出版于伦敦。1948 年被译成俄文出版。

牛顿使用了笛卡儿的符号，首先说明了使用数字及字母的算术演算，接着对方程及其根的一般性质进行论述。关于方程式的演算，他总结了 7 个规则。他用代数方法所解的 61 道算术问题，由于其巧妙性及多样性，经常被人引用。如问题 50："一石落井，请根据听到石头抨击井水的声音(的时间)确定井的深度"，把抽象的数学问题转化为具体的物理学问题来考虑，充分表现了作者的特点。关于代数方程的一般性质，作者用几何图解，说明了实系数方程的虚根必定成对出现，给出了求实系数多项式方程根的上界的法则，论述了根与系数的关系，决定根的近似值的规则。牛顿注意到，当方程存在虚根时，确定方程正根与负根个数的笛卡儿符号法则不能给出正确的结果，因而在书中叙述了(但未证明)确定方程正实根和负实根的最多个数的另一种方法，从而能推出复根至少能有多少个。此外，牛顿给出三、四次方程的解法，以及代数方程的图象解法。书中还载录了牛顿关于 n 次代数方程根的 m 次幂的和的著名公式。

《一种求极大、极小值与切线的新方法》(Nova methodus pro maximis et minimis，…) 德国自然科学家、数学家、哲学家莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)著。1684 年发表于《学艺》(Acta Eruditorum)杂志上。这是莱布尼茨发表的他关于微分学的第一篇论文，也是数学史上第一篇公开发表的微积分学著作，因而有着不朽的意义。莱布尼茨与牛顿共享着独立发明微积分的盛誉，他关于微积分的重要发现都发表在《学艺》上。1686 年，莱布尼茨发表了他关于积分学的第一篇文章，提出了 $\int vdx = \int ydy$(其中 v 是给定曲线的次法线)这一基本结果。就在这篇文章中，积分符号 $\int$ 第一次出现在印刷出版物上。在 1693 年的《学艺》杂志上，莱布尼茨发表了微积分基本定理及其证明。

莱布尼茨关于微积分的基本思想来源于他对序列的和与差的研究。他的许多成果，以及他的思想的发展过程都包含在他从 1673 年起写的笔记中。其中最决定性的突破是在巴黎时期(1672—1676 年，牛顿创造高潮之后的 8 至 10 年)得到的。莱布尼茨的分析的或符号的微积分的重要特征是：无穷小差分(微分)与无穷小求和(积分)的中心作用，以及二者之间的互逆关系；作为切线问题(微分)和求积问题(积分)之间的纽带的特征三角形；通过代换的积分变换。在《一种求极大、极小值与切线的新方法》中，在引入微分时没有进行许多无穷小考察(这种考察曾是微分概念产生的起因)。给定任意数 dx, dy 的定义是使得比

值$\frac{dy}{dx}$等于切线的斜率的数。这里只是没有给出切线的真正定义。莱布尼茨写道："我们只应当记住，求切线就是画一条连接曲线上距离为无穷小的两点的直线，即具有无穷多个角的多边形一边的延长线，因为我们可以用这样的多边形来代替曲线。"在这篇文章中，莱布尼茨给出了计算幂、积和商的微分的一些法则，但对其来源未作解释。此外，文中还指出：当纵坐标 v 随 x 增加而增加时，dv 是正的；当 v 减少时，dv 是负的。莱布尼茨还注意到因为"当 v 既不增加也不减少时，就不会出现这两种情况，这时 v 是平稳的"，所以极大或极小值的必要条件是 $dv=0$。同样，他还说明拐点的必要条件是 $d(dv)=0$。作为上述极大、极小方法的第一个应用，莱布尼茨解决了下述问题："设给定两点 C 和 E，以及同一平面上的一条直线 SS，试在 SS 上找一点 F，使得当把 E 和 C 分别与 F 连结时，CF 与给定的线段 h 构成的矩形（CF 与 h 之积）同 FE 与给定的线段 r 构成的矩形二者之和为最小。"他把这一结果解释为光线由密度为 r（相对于光速）的介质进入密度为 h 的介质时的折射定律，直线 SS 表示两种介质之间的界面。他还说："熟悉微积分的人能够这样魔术般地处理的一些问题，曾使其他高明学者百思不得其解。"

"这不过是一种更高超的几何学的开端，它甚至可以用来解决一些最困难的、最奇妙的应用数学问题，如果没有我们的微分学或者类似的方法，这些问题处理起来决不会这样容易。"在这章的结尾，莱布尼茨解决了笛卡儿未能解决的一个问题：求纵坐标为 ω 的曲线，使其次切距 τ 为常数：$\tau=a$，对于这样的曲线有

$$\frac{d\omega}{dx}=\frac{\omega}{\tau}=\frac{\omega}{a},$$

即

$$\omega=a\frac{d\omega}{dx}。$$

莱布尼茨考虑 x 值的一个等差数列，其公差为 $dx=b$，这时

$$d\omega=\frac{b}{a}\omega,$$

因此，对应的纵坐标 ω 的序列与其差的序列成正比。由于这是几何级数特有的性质，所以莱布尼茨断言："如果 x 值构成算术序列，则 ω 值构成几何序列。换句话说，如果 ω 是一些数，则 x 是它们的对数，因此，所求的曲线是对数曲线。"

《发微算法》(Hatubi sanpō) 日本数学家关孝和(Takakazu Seki，约 1642—1708)著。1674 年出版。关孝和是日本传统数学和算的奠基人，也是关氏学派(关流)的创始人，在日本被尊为算圣。这是他生前出版过的唯一一部算书。他的许多著作只在其学派内部传抄，有《三部书》、《七部书》等。关孝和去世后，其弟子又编纂出版了《括要算法》(1712)一书。《发微算法》刊行数年后，版模因火灾遗失。初版本现只在京都大学保存一本。由于关孝和的方法难懂，其弟子建部贤弘出版了《发微算法演段谚解》(4 卷，1685)，在其第一卷中完整地收入了这一著作，并对之作了阐释，从而使人们得

以了解关氏的工作。

中算家朱世杰的《算学启蒙》对关孝和的数学研究产生了很大影响。1670年第一位掌握了天元术的日本数学家泽口一之(Kazuyuki Sawaguchi,1670)利用天元术解决了许多数学问题,编成一本七卷本的数学问题集《古今算法记》,在卷末附有15个问题。他认为这些问题是不能用天元术解答的。关孝和首创使用笔算(中国传统数学使用筹算,因而不能方便地处理代数表达式),解决了这些问题,撰成《发微算法》一书。关孝和引进傍书法和代数符号利用笔算列出几个方程式、然后通过消去未知数得到一个高次方程,再用天元术解之。但在《发微算法》中,得到这一高次方程的中间阶段(即使用笔算的部分)全部省略了,只记录了解高次方程的步骤和答案。建部贤弘的著作便利了人们对这部书的理解。《发微算法》中没有包括关孝和发现的一些重要定理,这些在当时是保密的。除了创立演段术,他还使用了行列式,得到数字系数高次方程的近似解法,开创了"圆理"的研究等。在他的著作中,关孝和对自己得到的定理作了系统地处理以方便他的弟子们钻研。《发微算法》和由其弟子们整理的《括要算法》、《七部书》等,对了解关孝和的数学成就以及和算的发展有重要意义。

《机会论》(The Doctrine of Chances) 法国—英国数学家棣莫弗(Abraham de Moivre,1667—1754)著。其拉丁文本首次发表于英国《皇家学会哲学会刊》(1711)。其后扩充的英文版本的第一、二、三版分别出版于1718、1738及1756年。这是早期概率论的重要著作。

棣莫弗的概率论研究早期受到惠更斯和蒙莫尔的影响。惠更斯的《论赌博中的计算》(1657)以及蒙莫尔的著作是1711年以前唯一系统的概率论著作。由于这些著作的激发,棣莫弗陆续获得一些发现。这些重要结果随时收入《机会论》的各版本中。他逐渐得到了二项概率分布的近似,它作为正态或高斯分布,成为其后两个世纪概率论和统计中有效的发现工具。棣莫弗的发现在当时极大地澄清了概率的概念。至少从15世纪以来,人们已经认识到随机事件中稳定频率的存在,但没有人能给出"机会"和稳定频率如何相关的清晰的数学表达。伯努利在其《猜度术》的第四部分中给出了第一个回答。他证明了现今所谓弱大数定律。棣莫弗对二项分布的逼近被认为是试图推进伯努利的结果。

在某些试验中,设有利"机会"与不利"机会"的比是 p。在 n 次重复试验中,令 m 是成功的次数。考虑由两界限界定的 p 的一个范围,伯努利证明了 m/n 位于这些界限中的概率随 n 的增大而增大,且当 n 趋于无穷时趋近于1。尽管他能建立收敛的事实,但伯努利无法确定在何种程度上概率收敛。棣莫弗对这一问题的回答载于《机会论》最后一版中。其中,在 n 次试验中准确地得到 m 次成功的概率由 $(a+b)^n$ 的展开式中第 m 项表出,即 $\binom{n}{m}a^m b^{n-m}$,其中 a 是已知机会之比,$b=1-a$。

因而上述问题即是逼近展成级数的二项式$(a+b)^n$的项的和。通过$(1+1)^n$的二项展开的研究，棣莫弗得到了运用所谓斯特灵公式对$n!$的近似，即$cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$。他知道常数C是一无穷级数的极限和，斯特灵发现$C=\sqrt{2\pi}$。因而，其实是棣莫弗发现了斯特灵公式。运用$n!$的近似，棣莫弗得到了相当于现在的正态近似的结果。实际上，这是正态概率积分的首次出现。棣莫弗的近似是概率论中的一个定理，它表明已知关于机会的分布的初始规律，能够得到观察频率介于任意两给定界限中的概率的近似。他没意识到他的结果能够解决逆概率问题。但知道他的定理对统计学有影响。虽然在《机会论》中，他没有实际展开这一问题，但其思想具有极大的价值。棣莫弗还得到了泊松逼近的一个特例。在《机会论》中，还讨论了有关游戏持续时间的问题。给出了关于机会的组合问题的一个更清楚的表述。还论述了差分方程的应用。棣莫弗关于正态逼近的工作中实际上使用了母函数，这在后来的概率论发展中发挥了巨大作用。

《猜度术》(Ars conjectandi) 瑞士数学家、力学家、天文学家雅各布·伯努利(Jakob Bernoulli，1654—1703)著。作者是数学史上著名的数学世家伯努利家族的成员。他对微积分、变分法等多有贡献。所谓“伯努利双纽线”、“伯努利方程”均以他的名字命名。对于对数螺线的欣赏，使他遗言要在自己的墓碑上刻上这条曲线，并附以颂词：“纵使变化，依然故我。”他著述甚丰，但最富有创造性、最重要的著作是《猜度术》。

《猜度术》是历史上概率论方面的早期重要著作之一，但内容不够完整。在作者死后于1713年出版。书中载录了作者1679—1685年间在概率论方面的研究成果，并作为附录包含了作者在1689—1704年间完成的五篇关于级数的文章。正文分为四部分，第一部分基本上是关于惠更斯的著作《论赌博中的计算》的一个精彩评注。惠更斯的著作是概率论中最早的著作，1657年作为斯霍滕的书《数学练习》的附录出版。伯努利对它做了深入的研究。在第二部分中，伯努利基于斯霍滕(1657)、莱布尼茨(1666)、沃利斯(1685)等人的有关工作讨论了组合论问题。主要结果是运用所谓伯努利数通过完全归纳法证明了n为正整数时的二项式定理。在第三部分中，伯努利把排列与组合的理论运用到概率论中，给出24个有关在各种赌博情形中利益预测的例子。第四部分含有作者对概率论的哲学思考：概率作为确定性的度量，必然性与偶然性，把握与数学期望、预前与期后概率以及根据赌博者的智慧情况决胜的预测等。在这部分中给出了著名的伯努利大数定律：若P是事件发生一次的概率，q是该事件不发生的概率，则在n次试验中该事件至少出现m次的概率等于$(p+q)^n$的展开式中从p^n项到包括$p^m q^{n-m}$为止的各项之和。这是当时最重要的概率论结果。

伯努利的概率论思想对这门学科其后的发展产生了深远的影响。《猜度术》一书是概率论史上的重要

经典著作之一。

《正的和反的增量方法》（**Methodus incrementorum directa et inversa**）　英国数学家泰勒（Brook Taylor，1685—1731）著，出版于 1715 年，其中载录了作者于 1712 年发现的把函数展开成级数的著名的泰勒公式。该著作表明泰勒是有限差分演算的奠基者之一，并最先将其用于插值和级数求和。

泰勒的数学成就远不止于泰勒定理的发现，但它是泰勒最著名的结果。在《正的和反的增量方法》的定理Ⅲ命题Ⅶ的讨论中，有如下表述：如果 z 变为 $z+n\underset{\cdot}{z}$，则 x 等于

$$x+\frac{n}{1}\underset{\cdot}{x}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\underset{\cdot\cdot}{x}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\underset{\vdots}{x}+\cdots$$

泰勒用 $\underset{\cdot}{x}$ 等表示增量或有限差，用 $\dot{x}$ 等表示牛顿的流数。上述表述对牛顿的《自然哲学的数学原理》第三卷引理 5 的插值等式在符号上作了改进，泰勒是从 x 的差分表中归纳得到这一公式的。其后泰勒令：$v=n\underset{\cdot}{z}$　$\underset{\cdot}{v}=v-\underset{\cdot}{z}=(n-1)\underset{\cdot}{z}$　$\underset{\cdot\cdot}{v}=\underset{\cdot}{v}-\underset{\cdot}{z}$，…得到如下表述："当 z 增加为 $z+v$，x 便增为

$$x+\underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\cdot\underset{\cdot}{z}}+\underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\cdot\underset{\cdot}{v}}{1\cdot 2\cdot\underset{\cdot}{z}^2}+\underset{\vdots}{x}\frac{v\underset{\cdot}{v}\underset{\cdot\cdot}{v}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\underset{\cdot}{z}^3}+\cdots"。$$

泰勒定理的原始表述用现代符号即写成下面的形式　$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+\cdots$

这是在定理Ⅱ的系理Ⅰ中给出的，其叙述如下："对瞬时增量写出与其成比例的流数并使所有的 $\dot{v}$，$\ddot{v}$，v，$\underset{\cdot}{v}$，$\underset{\cdot\cdot}{v}$ 相等，则当时间均匀变化时，z 变为 $z+v$，因而 x 就变为

$$x+\dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}}+\ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot 2\cdot\dot{z}^2}+\dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dot{z}^3}+\cdots"。$$

一旦认识到当"时间均匀变化"时 $\dot{z}$ 是常数，而 $\frac{\dot{x}}{\dot{z}}=\frac{dx}{dz}$，且 v 是独立变量的增量，上式便成为泰勒级数的现代形式。泰勒没有给出该定理的严格证明。他利用此公式将函数展成级数并用来解微分方程，但没有认真考虑级数的收敛性。泰勒在该书的第二版（1717）中曾经提到其特殊情形即马克劳林公式。

在该书中泰勒还讨论了微积分在一系列物理问题中的应用，他得到了微分方程的奇解公式，研究了弦振动问题，他通过求解方程

$$a^2\ddot{x}=\dot{s}\dot{y}\dot{y}\quad(s=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2})$$

导出了基本频率公式，开弦振动问题研究之先河。

《流数通论》（**Treatise of Fluxions**）　英国数学家马克劳林（C. Maclaurin，1698—1746）著。共 2 卷，于 1742 年出版。该书被认为是最早为牛顿的流数方法作逻辑、系统的阐述的著作，其目的是维护牛顿的学说，企图为微积分注入严密性。在 1821 年柯西的《分析教程》出版以前，它一直是严格性的典范。

牛顿的"初末比"方法当时曾遭

到很多反对，其中最强烈的谴责来自贝克莱主教。贝克莱于1734年出版了一本小册子名为《分析学家——致一位不信教的数学家的一封信》，对牛顿的学说进行了攻击（“不信教的数学家”指牛顿的朋友哈雷）。贝克莱认为两个消失的量之间的一个有限比是不可想象的，“这些流数是什么？”他问道，“这些消失的增量的速度是什么？它们既不是有限量也不是无穷小量，但又不是无。我们不可以称它们为消失的量的鬼魂吗？”作为牛顿的热心的学生，马克劳林以《流数通论》回击贝克莱。在其前言中，马克劳林声明了他的动机，他认为以贝克莱的能力都误解了流数法，因而建立起完善的基础是必要的。为捍卫牛顿的方法他进行了不遗余力地努力。他写道：“在卷 I 中我们仿效牛顿对流数概念的阐释，认为只要有运动，构想速度是没有困难的，…我有意避免尽管方便但有时有争议的几种表述，…”“有些人不喜欢在几何学中太多使用无穷和无穷小，特别是牛顿。在证明流数法的基础中他避开了它们，而以一种与几何学的严格性更一致的方式建立它。”马克劳林效仿牛顿，摒弃了变量是由无穷小元素组成的观点，采用运动学的方法思考问题。他的本领是整体地使用几何。因而他企图根据希腊几何学和阿基米德的穷竭法建立流数学说，他希望因此避开极限概念，自然，马克劳林的努力未能成功。

《流数通论》解决了几何学、静力学以及引力论中的大量问题。他对最速降线和各种等周问题作出了卓越的研究，对无穷级数作了细致的探讨，包括对级数收敛的检验。他认为，收敛级数的项必须持续下降，并小于任意给定的小量。“在这时，级数开头几项就几乎等于它整个的值了。”他给出了无穷级数收敛的积分判别法：$\sum_{n}\Phi(n)$ 收敛当且仅当 $\int_{a}^{\infty}\Phi(x)dx$ 有穷，其中 $\Phi(x)$ 是在 $a\leqslant x<\infty$ 上有穷并且是同号的。马克劳林用几何形式给出了这一判别法。《流数通论》中描述了函数的马克劳林展开，即

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots$$

这是泰勒展开的特殊情形。马克劳林用待定系数法给出了证明。此外，他令

$$f(Z)=A+BZ+CZ^2+DZ^3+\cdots$$

则

$$f'(Z)=B+2CZ+3DZ^2+\cdots$$

$$f''(Z)=2C+6DZ+\cdots$$

……

在每个等式中令 $Z=0$，就定出 A，B，C，…。这里他没有为收敛问题担心，而直接应用结果。

《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》(Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes)

瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler，1707—1783)著。1744年出版于洛桑—日内瓦。欧拉是十八世纪最伟大的数学家，也是历史上堪与阿基米德、牛顿、高斯并列的最伟大的数学家之一。他精通力学、天文学与物

理学。其著作数量超过历史上任何一位数学家，生前即有大约560种书与文章发表。《欧拉全集》自1911年开始出版，计划分三辑共72卷。其中第一辑数学共29卷已全部出齐。

《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书，是变分学史上的里程碑，它的出版标志着变分法作为一个新的数学分支的诞生。在这本书中，欧拉给出了历史上变分法的主要问题的第一个清楚的表述，并创造了变分问题解的一般方法。是自牛顿以来有关变分法问题发展的一个高峰。1696年约翰·伯努利(John Bernoulli)提出了著名的最速降线问题：寻求从一定点到不是在它垂直下方的另一点的一条曲线，使得一质点沿该曲线从已知定点下滑所用的时间最短。牛顿、莱布尼茨及伯努利兄弟都给出了正确的解答。这一问题归结为寻求函数$y(x)$使

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx$$

达到极大或极小值。1734年，欧拉推广了最速降线问题，然后着手寻找这种问题的更一般方法。他用有限和代替问题中的积分，用差商代替被积函数中的导数，然后变动坐标，并计算积分中的变差。他成功地证明了使J取极值的函数必须满足常微分方程

$$f_y-\frac{d}{dx}(f_{y'})=0$$

这一方程迄今仍然是变分法的基本微分方程。该结果发表在1744年的《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书中，并给出了许多应用，包括悬链曲面和可展螺旋面是极小曲面。从1736年至1744年，欧拉改进了他自己的方法，解决了大量问题，这些成果都包含于上书中。该书的题目表明，欧拉广泛地使用了函数作为平面曲线的几何表述，他引入了函数和变分的概念，并区分了绝对极值和相对极值问题，他介绍了后者如何可以化归为前者。欧拉表明变分法问题总可以化归为微分方程的积分。一个半世纪后情况发生了变化。欧拉用来只是获得他的微分方程的直接方法在寻找变分问题及相应的微分方程的精确或近似解中获得了独立的价值。

几何地论证使本书变得很烦琐，但其中欧拉处理了大量的例子来证明他的方法的方便和一般性。十八世纪五十年代中期，欧拉改变了他对变分问题的表述。1766年他提出了变分法这一名称，该名称一直沿用至今。《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》的出版立即给欧拉带来了声誉，他被认为是当时最伟大的数学家。

《代数学入门》(Vollständige Anleitung zur Algebra) 瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler，1707—1783)著，德文本出版于1770年，最先以俄文形式发表于圣彼得堡(第一卷1768，第二卷1769)。1766年欧拉接受沙皇叶卡捷琳娜二世的邀请第二次到俄国首都圣彼得堡，不久便因眼疾双目失明(由于工作劳累1735年欧拉便右目失明)，之后他着手写这部书，是由他口述，仆人笔录而成的。本书出版后很快被译成英文，荷兰文、意大利文、法文等多种文字出版，对19世纪以至20

世纪的代数学教科书以极大影响。

本书由两部分组成。第一部分内容属于定量分析，其中含四节。第一节是关于简单量的各种计算方法，首先欧拉定义了量："能够增加或减少的东西就称为量。"他举例认为"钱数是量，因为它既可以增加又可以减少，同样重量也是量。"之后欧拉从解释加号"+"与减号"-"入手，给出了简单量的加减乘除四则运算以及开方、幂、对数等运算，给出了用分数指数表示无理数的方法等。第二节介绍了计算复合量的多种方法，同样先给出复合量的加、减、乘、除四则运算，之后介绍了将分数表为无穷级数的方法，给出了无理量的计算方法，并将求根术用于复合量，对指数分别为无理数和负数的情形分别作了讨论。第三节论述了比和比例，分别讨论了算术比，算术比例、几何比以及几何比例的运算；论述了算术级数和几何级数问题，并用之于利息的计算，这里欧拉对于级数的论述是不很严格的，他没有认真对待级数的收敛问题，出现了将等比级数 $1+2+4+8+\cdots$ 的和作为 -1 的情况。第四节有关代数方法及其解法，欧拉先介绍了简单方程即一次方程的解法；然后对各类二次、三次及四次方程分别探讨了它们的代数解法，对于五次以及五次以上的方程他写道："在这之前的各种尝试全部失败。"这一问题引起了欧拉的充分注意。值得一提的是，就在1770年拉格朗日深入探讨了代数方程根式求解问题，考虑了有理函数当变量发生置换时所取值的个数，成为置换群论的先导。第二部分是关于不定分析的，包含了欧拉关于丢番图分析的一些发现。此前欧拉曾经用连分数给出了方程 $x^2-dy^2=1$（d 是正的非平方整数）的最小整数解的计算方法。1753年欧拉证明了 $x^3+y^3=z^3$（其中 x、y、z 均为整数）解的不可能性，他的证明基于无穷递降法，利用了形为 $a+b\sqrt{-3}$ 的复数，这在《代数学入门》中做了详尽的描述。

《无穷分析引论》(Introductio in analysin infinitorum) 瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler，1707—1783)著。1748年出版于洛桑。

欧拉的《无穷分析引论》、《微分学原理》(Institutiones calculi differentialis，1755)及《积分学原理》(Institutiones calculi integralis，1768—1770)组成著名的分析学三部曲，是分析学发展中的里程碑。它们是十八世纪分析学的缩影，不仅做为标准的分析教科书，而且由于它们包含了自牛顿、莱布尼茨以来分析学中大量新的创造成果，直到1821年柯西的《分析教程》出版以前，在很长时间里一直是分析学的最权威的著作。《无穷分析引论》分两卷，在这本书中欧拉第一次突出强调函数概念，并试图把它作为整个内容的基础，是第一本沟通微积分与初等分析的介绍。第一卷共18章，主要致力于初等函数论。第一章开头(§4)欧拉便给出了一般函数的定义：由一个变量与一些常量通过任何方式组成的解析表达式。在欧拉之前一些特殊的初等函数已得

到了很好的研究。约翰·伯努利曾经将函数概念公式化。欧拉在此明确地将函数定义为量的解析表达式，并表明数学分析是函数的科学，他写道：函数间的原则区别在于组成这些函数的变量与常量的组合法之不同。他定义了多元函数，区分了代数函数与超越函数，显函数与隐函数等。虽然，在弦振动问题的研究中发生了关于函数概念的争论，这促使欧拉去扩展自己的函数概念，但十八世纪占统治地位的函数概念仍然是函数是由一个解析表达式给出的。欧拉的函数定义反映了十八世纪的状况。第二章(§28)中隐含了代数学基本定理：z 的一个整函数(指有理系数多项式)其最高次项指数为 n，则它含有 n 个单项式。第四章讨论用无穷级数表达函数，他认为(§59)每一个 z 的函数都可展开成级数 $A+BZ+CZ^2+DZ^3+\cdots$。第五章论述含有两个或更多个变量的函数。第七章讨论指数与对数函数的级数表示，这里欧拉只考虑了正自变量的对数函数，给出了著名的表达式：$e^z=\lim\limits_{i\to\infty}\left(1+\frac{z}{i}\right)^i$(这里 i 表示无穷大的数，后来欧拉用 i 表示$\sqrt{-1}$)。第八章研究圆函数，第一次描述了三角函数的解析理论，并给出了棣莫弗公式 $e^{\pm zi}=\cos z\pm i\sin z$ 的一个推导，尽管不很严格。第九章的突出点是正弦函数的无穷乘积表示，即 $\sin z=z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$。第十章中处理了大量无穷级数和。第十一章给出正弦函数的另一个无穷表达式。第十三章讨论循环级数。第十六章是这本书的一个高潮，其中载录了欧拉在1740—1744年间关于分拆函数与母函数的发现，其后成为数论研究的有效工具。第十八章研究了连分数，收入了欧拉在1737和1739年的两篇文章给出的连分数的一个系统理论。第二卷属于解析几何内容，论述了高次平面曲线理论，介绍了平面和空间图形的微分几何，他超越他们同时代人给出了二阶曲线理论的代数发展，并用类比研究了三次曲线理论，但其主要贡献是第一次彻底研究了二阶曲面的一般方程。

欧拉一反牛顿以来的传统，拒绝把几何学作为微积分的基础，并纯粹形式地研究函数，即从它们的分析表达式来论证，从而将微积分从几何中解放出来，将它建立在算术和代数的基础上，这为分析学的严格化开辟了正确的道路。他拒绝使用无穷小概念，虽然他使用的级数推理在今天看来并不严格。此外在《微分学原理》和《积分学原理》中，载录了欧拉关于常微分方程和偏微分方程的大量新发现。他的分析学三部曲对其后分析学的发展产生了巨大的影响。

《数学史》(Histoire des mathématiques) 法国数学家、数学史家蒙蒂克拉(J. E. Montucla，1725—1799)著。两卷本初版于1758年。后蒙蒂克拉进行了修订充实，1799—1802年扩充为四卷出版。但前两卷出版之后，蒙蒂克拉就去世了。后两卷由他的朋友拉朗德

(J. de Lalande)主持完成。这是近代西方数学史研究的第一部重要经典著作。

人们研究数学史的历史很早。在西方,古希腊的欧德莫斯(Eudemus,公元前4世纪、亚里士多德学派成员)就写过一本算术史、一本几何学史、一本天文学史。但除了后世作者引述过的片断材料之外,这些著作都失传了。公元5世纪时,另一位希腊数学家普洛克洛斯(Proclus)对欧几里得《几何原本》第一卷的评注是重要的希腊数学史文献,流传至今。中世纪阿拉伯国家的一些传记作品和数学著作中曾讲述一些数学家的生平及有关数学史材料。在蒙蒂克拉之前,曾有两本著作致力于数学史,一本是沃西斯(G. I. Vossius)的(1650),一本是海布伦纳(J. C. Heilbronner)的(1742)。但这些早期的工作仅仅是个开头,含有许多错误和传说,不成其为正史。后两种著作,只是人名、日期、著作名的堆砌。蒙蒂克拉熟悉所有这些材料,他认为需要有一部关于数学思想发展的综合的历史,正如培根等人曾呼吁过的那样。受他们的激发,蒙蒂克拉担当起这一极为困难、工作量浩繁的任务。他的丰富的专业知识和对原始著作的把握能力使他取得了成功。

蒙蒂克拉曾于1754年发表《圆面积研究的历史》,这是最早系统地研究圆周率历史的著作,为他赢得了声誉。《数学史》一书对各个世纪的数学发展做了精确的描述。此外,也包括可以应用数学的领域,如天文、力学、光学、音乐等。他认为前者是由"纯粹的抽象的东西组成",后者则是"混合物","更通常地叫做物理—数学的那些东西"。纯粹数学的内容只占三分之一篇幅。1758年两卷本中的第一卷概括了数学的起源、希腊数学(包括拜占廷时期),以及直到17世纪初的西方数学;第二卷全部致力于17世纪。蒙蒂克拉原想在第三卷中直写至18世纪中叶,但未果,主要因为材料太浩繁。在第二版中,内容括至整个18世纪。第三卷包括纯粹数学、光学和力学;第四卷为天文学、数学地理学、航海学。

在康托尔的《数学史讲义》出版之前,蒙蒂克拉的《数学史》是西方唯一一部权威的数学史著作,后者对前者产生了很大影响。《数学史》直至今日仍有参考价值,特别是它对17世纪数学的阐述。

《分析力学》(Mécanique analytique) 法国数学家、力学家、天文学家拉格朗日(Joseph Louis Lagrange,1736—1813)著。是作者留居柏林期间所作,于1788年出版。该著作出现于牛顿的《自然哲学的数学原理》之后一百年,是此间最重要的经典力学著作,其中成功地运用了变分原理和分析的方法,建立起完整和谐的力学体系,显示了分析学的巨大威力。

《分析力学》分为两大部分,第一部分为静力学,第二部分为动力学。在每部分中都分别处理了流体和刚体的情形。在每一节的开头都有一段历史综述。第一部分共有八章。如第1章中介绍了静力学的各种原理,第5章便是静力学各种问

题的解。第二部分共含六章，其中第1章给出了静力学的各种原理。第4章介绍了动力学问题的微分方程解法。拉格朗日的目的是将力学理论和力学中解决问题的艺术化归为一般的公式，其简单推导将产生解决每一个问题所需要的方程。拉格朗日在该书的前言中写道："本书的计划是完全新的，…在这项工作中找不到图形，我在其中所阐明的方法，既不要求作图，也不要求几何的或力学的推理，而只是一些遵照一致而正规的程序的代数(分析)运算。喜欢分析的人将高兴地看到力学变为它的一个新的分支，并将感激我扩大了他的领域。"这表明了作者的意图，其中牛顿的几何方法被彻底摒弃，分析方法取得了极大的成功。拉格朗日大量应用了由欧拉、达朗贝尔以及十八世纪数学家发展的分析技巧，尤其是拉格朗日本人所发展的变分法得到广泛应用。拉格朗日从一个统一的观点出发综合了各种不同的力学原理，证明了它们的联系与相互依赖性，致使对它们的有效性与范围的判断成为可能。

《分析力学》出版后，拉格朗日认为必须再出第二版，以便加进新近的某些发展。第二版的第一卷出版于1811年，正当进行第二卷的工作时，拉格朗日去世了，第二卷迟至1816年出版(这两卷1965年又出了重印本)。在第二版中加入了拉格朗日对天体力学的卓越贡献。

《分析力学》是拉格朗日最重要的著作。作为一部经典科学著作，它对物理学和数学的很多分支(如常微分方程)的发展产生了深远的影响，甚至在今天仍具有现实意义。它标志着拉格朗日是第一个真正的分析学者。

《解析函数论》(Théorie des fonctions analytiques) 法国数学家、力学家、天文学家拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736—1813)著。1797年出版，是第一本完整的试图重建微积分基础的著作，在分析严格化运动中起了极为重要的作用。

自从牛顿和莱布尼茨创立微积分以来，微积分的不严格的基础便屡遭攻击，其中最为著名的是英国贝克莱主教。他的《分析学家》在十八世纪数学家中产生了很大的反响。加之教学工作的需要，拉格朗日认识到，无穷小、极限，最初最终比作为分析学的基础是不充分的。在巴黎综合工科学校教授分析学，使他有可能写出《解析函数论》，其中他做了最早的雄心勃勃的尝试。本书的副标题反映了作者的观点："远离无穷小或消失的量或极限或流数的任何考虑，而归结为有限量的代数分析。"这表明作者的计划注定不能彻底实现，也提示了后来柯西将分析学化归为代数分析这一企图的来源。

拉格朗日以对此前所有的分析基础的鲜明的批判开始他的《解析函数论》。这一批判后来成为分析学标准文献的一部分，受到柯西、波尔查诺等人的重视。按照拉格朗日的观点，无穷小是不严格的，无穷小分析是通过错误补偿获得正确结果的，因此不能作为分析学的基础。牛顿的流数论也无法接受，因为其中

的数学量似乎是由运动产生的，显然数学不应该以这种从物理学中借来的“外来思想”做为基础。此外，拉格朗日认为牛顿的方法“有很大的不便，当它们(指所考虑的量)一旦同时都变为无时，它们的比在我们的头脑里就不再有清楚而确切的想法了”。至于当时存在的极限概念，拉格朗日认为它太模糊、太狭隘，是几何的而非代数的，因而不可靠。拉格朗日的目的是将微积分归结为代数，从而给微积分提供古人论证的全部严密性。他所指的代数乃是无穷级数的代数。他希望利用这一事实：任何一个函数$f(x)$都能表成

$$f(x+h)=f(x)+ph+qh^2+rh^3+sh^4+\cdots$$

的形式。他用一个纯形式的论据判定：正如能从$f(x)$得到p一样，我们可以从p得到$2q$，而对上式中的其它系数$r,s,\cdots$，也可以得到类似的结论，因此如用$f'(x)$表示p，以$f''(x)$表示从$f'(x)$导出的函数，则

$$p=f'(x),\quad q=\frac{1}{2!}f''(x),$$

$$r=\frac{1}{3!}f'''(x),\cdots,$$

因此，

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

实际上，拉格朗日没有认真考虑导数的存在性，而级数的收敛问题也被忽视了。因此他的计划未能实现，但是他对待分析基础的观点直接影响了柯西和波尔查诺。波尔查诺在他的《纯粹分析的证明》中赞扬了拉格朗日将分析学脱离几何和运动的概念，而归结为代数的努力。而当柯西1810年离开巴黎去履行他的工程职务时，所带的四本书中就有《解析函数论》。柯西和波尔查诺从拉格朗日的著作中学到的不只是技巧，更重要的是迥异于前人的对分析基础的态度，从而对分析严格化运动乃至对整个数学的发展做出重要贡献。拉格朗日通过他的著作和在巴黎综合工科学校的教学影响了一大批数学家。他用幂级数表示函数的处理方法对分析学的发展产生了影响，成为实变函数论的起点。

《几何学基础》(Éléments de géométrie) 法国数学家勒让德(A. —M. Legendre，1752—1833)著。1794年初版于巴黎。1823年出到第12版，内容与初版大致相同。1845年由布兰歇(A. Blanchet)修订新版。至1876年出了第21版。1819年在美国坎布里奇首次出版英译本，至1890年有多种英译本问世。1822年德文译本出版于柏林。1837年布加勒斯特出版了罗马尼亚文译本。该书出版后，在几乎一个世纪的时间里被作为权威的初等几何学教科书，统治了欧洲这一科目在19世纪的教学。

本书内容的表述效仿欧几里得。其附录丰富了它的内容，至今仍有意义。书中没有包括当时蒙日及其学生在综合几何学方面的各种贡献。勒让德在二十多年的时间里搞过平行公设问题，《几何学基础》的各次版本反映了他对这一问题的努力过程，也显示了人们在寻求非欧几何学的过程中所遇到的各种各样的典型困难。勒让德首先认识到，著

名的欧几里得第五公设实际上和"三角形内角和等于两直角"是等价的。因此,他为了"证明"欧几里得第五公设,试图不用欧氏公设来证明"三角形的内角和等于两直角"这一事实。他得到如下两个结论:第一:"直边三角形的三个角之和不能大于两直角",这个结论的证明利用了《几何原本》平行公设之前的所有公设、公理和定理;其次,"如果存在一个三角形,其内角之和等于两直角,则任一三角形的内角之和都等于两直角。"然而,这些漂亮的定理对于证明平行公设是无济于事的,因为勒让德未能证明:一个三角形的内角之和不能小于两直角。象牛顿的所有信徒一样,勒让德确信绝对空间和直边三角形的"绝对度量"。他曾经利用"同性度量原则"试图建立三角形内角和定理,自然只能得到一些谬论。例如,设一三角形的一边 a 及其两夹角 B、C 已知,则此三角形确定。因而,第三角 A 是已知量的函数:$A=\Phi(B,C,a)$。但 A、B、C 是纯粹数,a 是一个长度,现在将 a 视作未知数解方程 $A=\Phi(A,B,a)$,得方程 $a=f(A、B、C)$。如此,a 是一个不确定的纯粹的数,矛盾。根据同性量度原则,要求这一长度在起初的公式中消失,因而 $A=\Phi(B,C)$。通过考虑一直角三角形及其高线,容易发现 $A+B+C=\pi$。

此外,《几何学基础》还包含了三角学的初步知识,证明了圆周率 π 和 π^2 是无理数。勒让德还写道:"很有可能,数 π 不能包含在代数的无理数中,亦即它不能是其系数全部为有理数的有限项的代数方程的根。"这表明他已意识到 π 为超越数这一事实。

《画法几何学》(Géométrie descriptive) 法国数学家蒙日(Gaspard Monge,1746—1818)著,1798—1799年出版。作者对微分几何及解析几何学有重大贡献,同时是新兴的画法几何学的创始人。本书是画法几何的第一本专著,它的出版标志着画法几何成为几何学的一个专门分支。它不仅在科学上有重大意义,而且在实际事务中有广泛的应用。对一切技术工作者来说,它是一种"语言"。蒙日把那些经过长期探索得到的成规以及经过反复实践取得的简练的方法,汇合在一起形成这部逻辑上无懈可击的理论体系。根据这些简单而严密的规律,人们就能以准确的方式表示出物体的形状。反过来,在图形一旦画出之后,人们就能按照这些准确的图形识别出物体的形状。除此之外,此书还几乎包含了日后充实到这一数学新分支的所有内容的萌芽。这一著作的高度的独创性和独辟的新途径,重新引起人们对综合几何学研究的兴趣。另外,此书用以阐述新理论的方法,非常简单明晰,堪称典范。

蒙日对画法几何学的构想,大约始于1775年前后。由于它在军事技术方面的应用,其内容在当时的法国是保密的,直至1798年禁令解除,此后才得以公开出版。本书是蒙日于1795年在巴黎高等师范学校授课讲义的基础上整理出版的。其后传至其它许多国家。法文原著于1798年公开出版后,至1847年共

有七个版本。原书共五章,自1820年第四版起,增添了由他的学生布里松根据蒙日讲稿整理出的关于阴影和透视的理论。目前该著作已有德文、英文、意大利文、西班牙文及俄文译本。中文译本出版于1984年,名为《蒙日画法几何学》(廖先庚译,湖南科学技术出版社)。

本书法文原著无章节标题,中文译本增添了标题,共分五章。第一章为"画法几何学的目的与方法及基本问题",开篇阐明了画法几何学的两个目的:"第一个目的是在只有长、宽两种尺度(即维)的纸上,为表达一切具有长、宽、高三种尺度的自然物体提供方法";"第二个目的是为根据准确的图形来了解物体的形状提供方式方法,并从图形推导出物体的形状和相互位置的真相。"之后介绍了投影法。第二章论述曲面的切平面和法线,给出了根据各种条件作出切平面的方法。第三章论述曲面的交线,阐述了作曲面相贯线投影的一般方法及某些特殊情形。第四章为曲面相贯线作图方法在解题中的应用。第五章讨论了双曲率曲线的曲率和曲面的曲率。

蒙日将画法几何视为纯粹几何和无穷小几何各分支中发现和证明的有力工具。自从坐标几何取得巨大成功以来,纯粹几何的研究与应用部分地被摒弃了,是蒙日恢复了对它的兴趣。他的工作极大地影响了他的学生庞斯列等人的研究,开辟了通向现代几何学的道路。

《天体力学》(Traité de mécanique céleste) 法国数学家、天文学家拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace, 1749—1827)著。1799—1825年间出版。全书是五卷本的巨著。该著作使拉普拉斯赢得了"法国的牛顿"的称号。在这部著作中,拉普拉斯给出了太阳系力学问题的"完全的"分析解。把牛顿以来,达朗贝尔、克莱罗、欧拉、拉格朗日以及拉普拉斯本人取得的成果统一成了一个系统的整体。它成为迄至拉普拉斯为止天文学工作发展的顶峰。事实上,它如此完美,以致使他较接近的后继者无法再添加新的东西。

《天体力学》具有多方面的功用,既具有教科书的性质,又是研究论文的汇编,又可作为参考书、年鉴。它既包含理论科学,也包含应用科学。前两卷形成一个很大的理论体系,从方法论上看,其目的是将天文学化归为力学中的问题,其中行星运动的要素变成了任意量;从现象学上看,其目的是从引力定律得到一切观测数据。第一部分是有关静力学和动力学定律的数学阐述,其中有两点属于拉普拉斯本人的创新,其一关于力学的一般原理的第5章中,在面积守恒的讨论中引入了他的不变平面的概念;其二是第6章中关于已知力与速度的关系的任意数学上可能的假设的物体组的运动规律的讨论。第二部分给出了理论天文学所需要的分析知识。第三部分讨论行星图象。其中最主要的创新乃是椭球体引力理论与子午线的大地测量结果的比较。他发展了测地线的解析几何,导出了适合于地球情形的表达式。第四部分论述海与大气的运动现象。第五部分

结束了第二卷，是关于天体旋转的论述。拉普拉斯拟将前两卷作为一个整体（第一编），其余为第二编。在第三卷的序中，他写道："在这本著作的第一编（指第一、二卷）中，我们给出了物体平衡与运动的一般原理。这些原理对天体运动的应用，通过几何的（分析的）论证，不必作任何假定，就可导出万有引力定律，而重力的作用与抛射体运动则是这个定律的特例。然后我们考虑了服从于这个伟大的自然定律的体系，用奇妙的分析，得到了它们的运动和图形的一般表达式，以及覆盖在它们表面上的流体振动的一般表达式。从这些表达式我们推断出大家知道的潮汐现象；纬度的变化与地球表面的引力；岁差；月球引力作用以及土星环的形状与转动……，我们还推导出行星运动的主要方程"。他说第二编的主要目的是改进天文表的精度。第三卷全部被第六部分中的行星理论和第七部分中的月球理论占据。第四卷主要论述行星的卫星，其中第八部分几乎全部致力于木星的卫星；在第九部分中，拉普拉斯发展了从第二部分中提出的一般运动方程计算彗星摄动的公式；第十部分的小标题为"有关世界体系的各种论点"，包含了大量新材料，反映了拉普拉斯兴趣的转移。在结束第四卷的时候，他的兴趣转向牵涉物理的问题。前四卷是《天体力学》的主体。

《天体力学》应用了大量深奥的数学知识，只是拉普拉斯从不耐心地解释他是如何得出其结果的，而要填补这些空白却须花相当的功夫。围绕《天体力学》有许多有趣的轶事，据说拿破仑一世曾问拉普拉斯，在这部巨著中为什么没有提到上帝。拉普拉斯回答说："陛下，我不需要这个假设！"。英国数学家哈密顿因发现《天体力学》中的一个错误而开始他的数学生涯；格林由阅读该书而发展了他的关于电磁的数学理论的思想。这些都表明《天体力学》对当时及后世产生了很大影响。美国数学家、天文学家鲍迪奇曾将五卷中的前四卷译成英文出版。

《概率的分析理论》（Théorie analytique des probabilités） 法国数学家、天文学家拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace，1749—1827）著。1812 年出版，1814 年出第二版。其序言是一篇题为《关于概率的哲学》的论文，表明了拉普拉斯关于概率的哲学观。他认为世界的未来完全是由它的过去决定的，而且只要掌握了世界在任一给定时刻的状态的数学信息，就能预知未来。本书集古典概率论之大成，同时为概率论的近代发展开辟了道路并提供了方法，为十九世纪概率论的巨大发展奠定了基础。

本书是在拉普拉斯于 1810 年、1811 年写的几篇论文的基础上写成的。1812 年出版于巴黎。其中的两篇分析论文最独创的部分是得到了中心极限定理。全书由两部分组成。第一部分的小标题为"母函数的计算"，致力于母函数计算的数学方法及其一般数学理论，试图以母函数理论作为概率论的基础。第二部分小标题为"概率的一般理论"，这里拉普拉斯从分析转向概率论本

身，提供了具体概率问题的解答。他把由许多数学家和他自己发展的机遇理论中的各种类型的问题作了统一处理。第1章以概率论作为人类智力局限所需要的一个知识分支这一著名特征开始，给出了概率论的一般原理。在叙述了概率本身的定义及独立事件的乘法规则之后，拉普拉斯给出了关于原因的概率的定理作为第三个基本原理。之后，他以不对称钱币为例考虑了被错误地认为相等的概率的影响。较后他区分了数学期望与心理期望。第2章考察了由已知概率的简单事件构成的复合事件的概率，如抽彩中奖的概率问题，从袋中摸球问题等。第3章处理极限，虽然不如他1810年得到中心极限定理的论文叙述清晰，但给出了各种各样的例子。从普通二项式问题开始讨论，显示了拉普拉斯对随机过程有所认识。第4章处理误差的概率，先是说明大量误差的误差和界于已知界限中，之后确定出误差和的概率的界限，考虑了正负误差不相等的概率的情形，得到其分布。最后处理了误差的统计预测。第5章讨论概率在现象本身及其原因的研究中的应用。第6章题为"关于原因与未来事件的概率——从观测事件中得来"，实质属于统计推断问题。第7章包括对某些旧材料的新处理。第8、9、10三章均很简短，研究了寿命预测、年金率、保险、心理期望等问题。第11章是第二版时加进去的，讨论了证据的概率。拉普拉斯对他的模型的研究利用了贝叶斯分析。1820年，拉普拉斯又将该书整理补充出了第三版，其内容基本固定下来，现收在拉普拉斯全集第七卷中。

《算术研究》(Disquistiones arithmeticae) 德国数学家、物理学家、天文学家高斯(Carl Friedrich Gauss 1777—1855)著。1801年出版。这部伟大著作为作者二十岁时所作，开创了数论研究的新纪元。其中，高斯把记号标准化了，系统处理并推广了现存的定理，把要研究的问题和解决问题的方法进行了分类，并引进了新的方法，它不仅是现代数论研究的开端，而且决定了直到目前为止有关这一课题研究的方向。《算术研究》用拉丁文写成，内容深奥，异常难读。1863年狄利克雷撰写了《数论讲义》(Vorlesungen über Zahlentheorie)一书，对之作了明晰的阐释，使高斯的思想得到广泛传播。《算术研究》作为数学史上的伟大经典名著，至今仍具有现实意义。有法文(1807)、德文(1889初版，1965重版)俄文(1959)及英文(1966)等多种译本。

直到高斯在数论(高等算术)方面做出决定性的贡献之前，这门学科还只有一些孤立的结果，虽然这些结果常常是光辉的。《算术研究》共七节。高斯一开始便试图统一这门学科。在序言中他写到："我偶然发现了整数论中的真理。我不仅认为那真理本身优美而且因为其它漂亮的诸性质皆可与其相关联地来考虑，所以我就想法探究其原理，努力给出严格的证明。"他在第一节中引进了同余的记号，并在此后系统地应用了它。虽然欧拉、拉格朗日及勒让德等人已经引进同余的概念，但

高斯第一个对之作了系统的处理。接着在第二节中研究了一次同余式理论，给出了拉格朗日建立的多项式同余式的基本定理的证明。即一个 n 次同余式

$$AX^n+BX^{n-1}+\cdots+MX+N=0 \bmod P$$

不能有多于 n 个互不同余的根(其中 P 为素数，P 不能整除 A)。在第三节中高斯处理了幂的同余式。他用同余式理论给出了费马小定理的一个证明。第四节研究二次剩余，在证明了一些关于二次同余式的定理之后，高斯还用二次剩余的概念给出了二次互反律的第一个严格证明。二次互反律是十八世纪数论中最富独创性的发现之一，欧拉和勒让德都曾试图给出证明但都不完全。二次互反律是同余式论中的一个基本结果，高斯把它誉为算术中的宝石。后来高斯又给出了这一定律的好几个证明。除此之外，高斯还讨论了多项式的同余式。第五节致力于型的理论，其中高斯系统化并扩展了型的理论，他从拉格朗日的著作中抽象出了型的等价概念。在给出型的等价定义之后，证明了一系列关于型的等价的定理，接着研究了型的复合，其后转向三元二次型的处理。型的理论后来成为十九世纪数论的主要课题。第六节是上述内容的种种应用。第七节中讨论了分圆方程 $X^P-1=0$(P 是素数)。高斯证明了这个方程的根可用一个方程序列 $Z_1=0, Z_2=0\cdots\cdots$ 的根有限表出，这些方程的系数分别是该序列中前面的方程的根的有理函数，他的结果对代数求解一般的 n 次方程问题具有重要意义，对正 P 边形的几何作图问题也具有重要性。《算术研究》的出版几乎立刻使高斯被公认为"数学王子"。

《关于曲面的一般研究》(Disquisitiones generales circa superficies curvas) 德国数学家、物理学家、天文学家高斯(Carl Friedrich Gauss，1777—1855)著。1828 年发表于格丁根。该著作开创了曲面内蕴几何学，是微分几何发展史上的里程碑。其思想后来被黎曼等人所发展，对几何学发展产生了深远的影响。《关于曲面的一般研究》用拉丁文写成，后有法文(1852、1859)、德文(1884、1889)、俄文(1895)、匈牙利文(1897)及英文(1902)等多种译本。

高斯对微分几何的研究始于他在大地测量方面的工作，早在 1796 年他就研究过测量问题，从 1816 年开始的大量实际物理测量和理论思考导致了《关于曲面的一般研究》。1822 年高斯曾以关于曲面保形变换的一般解的论文获哥本哈根科学院奖，进而他试图"展开其它一些新观点并发展一些新定理"。在《关于曲面的一般研究》中，高斯沿用欧拉的方法用两个参数 u 和 v 将曲面方程表示为

$$x=x(u,v), y=y(u,v),$$
$$z=z(u,v),$$

并以此展开对曲面的系统研究，这样产生的表达式中将含有 15 个元素，即 x、y、z 关于 u，v 的一阶、二阶偏微分系数，但这便利了向另一种表达式转换。如果用这种方法表达曲面的性质，则任意曲面上的基本

量弧长元素(在(x,y,z)坐标中是$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$)便可写成$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$,其中E、F、G为u,v的函数。曲面上两条曲线的夹角是另一个基本量。设θ是两个方向(一个由$du:dv$决定,另一个由$du':dv'$决定)之间的夹角,高斯证明了如下事实

$$\cos\theta=\frac{Edudu'+F(dudv'+du'dv)+Gdvdv'}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{Edu'^2+2Fdu'dv'+Gdv'^2}}$$

接着高斯研究了曲面的曲率。他得到了曲面(总)曲率K的表达式为

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

并证明它就是欧拉早提出过的在(x,y,z)处的两个主曲率之乘积。之后高斯作出一个重要的断定,即曲面的几何性质仅由ds^2的表达式中的E、F、G决定。u和v的这些函数便是事情的全部。为此高斯得到了所谓高斯特征方程,证明曲面的曲率k是依赖于E、F和G。曲面的性质仅仅依赖于E、F和G这一事实有许多含意,例如,如果一张曲面无伸缩地弯曲,则曲面的所有性质也将保持不变。进一步,如果两张曲面能够彼此建立一一对应,则这两张曲面称为等距的,它们必然具有相同的几何。特别地,高斯指出,它们在对应点一定有相同的总曲率。这是一个极其漂亮的定理。自然,若一曲面在一平面上可展,则其上曲率处处为零。

在《关于曲面的一般研究》中,高斯还研究了另一个极其重要的课题,即寻找曲面上的测地线(高斯使用了"最短线"的名称,测地线这一名词是刘维尔1850年引进的,取自大地测量学),他证明了约翰·伯努利提出的一个定理:测地线的主法线垂直于曲面。此外高斯证明了一条关于曲率的著名定理。设k是一个曲面的可变曲率,$\iint_A kdA$是该曲率在面积A上的积分,则对于一个由测地线构成的三角形来说$\iint_A kdA$(即三角形的总曲率)等于三角形的三个角之和与两直角的差。

高斯关于微分几何的工作意义深远,他证明了曲面的几何可以集中在曲面本身上进行研究。这是曲面论研究的一个重要突破,开创了内蕴几何。它表明曲面本身可以看成是一个空间,因为它的性质由ds^2确定。这是具有决定意义的结论,因为这意味着至少在曲面上有非欧几何。更甚,同一张曲面又可以有不同的几何。高斯工作中蕴含的这些重要思想后来由卓越的几何大师黎曼继承和发展。

《纯粹分析的证明》(Rein analytischer Beweis...)　捷克数学家、哲学家波尔查诺(Bernard Bolzano,1781—1848)著。1817年出版于布拉格。该书是分析严格化过程中的一个里程碑。书中波尔查诺首次给出了对分析基础的正确处理方法。

十九世纪初的欧洲数学家关心两个主要问题,即欧几里得平行公理的地位和给数学分析提供严密坚实的基础问题。波尔查诺对此均有

建树。当然，他并不是唯一的一个也不是第一个关心数学中严格证明问题的人，但在分析的基础问题上超过了他以前的所有数学家，尽管他们比波尔查诺有更成熟的技巧。事实上，自牛顿和莱布尼茨于十七世纪创立微积分以来，他们所引入的无穷小概念便一直遭到哲学家和数学家的强烈反对。对无穷小的热烈探讨贯彻了整个十八世纪，其中贝克莱主教在《分析学家》(1734)中的攻击是很著名的。尽管莱布尼茨本人并不认为无穷小量的存在性已很好地确立了，并认为可避免使用它们，但他认为可以作为理想的量象处理普通的量一样进行计算。但由此引起了极大的混乱。为克服无穷小带来的困难，数学家们提出了许多方案。拉格朗日提出可以在函数的泰勒级数展开之基础上处理分析学，这一方法曾被广为采纳。达朗贝尔则认为可将微积分建立在极限概念的基础上。但他们都未取得成功。第一个成功的处理是由波尔查诺在该书中首次给出的。

在《纯粹分析的证明》中，波尔查诺致力于如下重要定理的证明：对两个连续函数 f 和 Φ，如果 $f(\alpha)<\Phi(\alpha)$，且 $f(\beta)>\Phi(\beta)$，则在 α 与 β 之间存在一 x，使 $f(x)=\Phi(x)$。他首先注意到以前的证明都或多或少地依赖于几何直观，这是波尔查诺极力想摆脱的。这一点表明他在分析基础严格化方面采取了正确的道路。波尔查诺认为该定理的严格证明需要预先给出连续函数的可靠定义。的确在文中给出了第一个不牵涉无穷小的关于函数连续性的定义，因而极为重要，该定义至今仍被采用。他在以后的著作《函数论》第一卷中把该定义更精确地表述如下：若取 Δx 足够小时，如果 $F(x+\Delta x)-F(x)$ 的绝对值小于任一给定的分数 $1/N$，且当 Δx 取更小的值时，仍保持如此，则函数 $F(x)$ 称为是(在 x 处)连续的。波尔查诺还区分了左右连续。在定理的证明中，利用了一个引理，即建立了有界实数集的最小上界的存在，如果某一性质 M 不能适用于一变量 x 的所有值，但小于某一量 u 的所有 x 都具有性质 M，则存在一量 U，它是所有这样的量 u 的最大值。这在后来被证明是实数理论的基石。波尔查诺对这个引理证明的实质是，把有界区间分成两部分，而选取包含集合的无穷多个元素的那一部分，然后重复这一手续，直到他得到给定实数集的最小上界为止。外尔斯特拉斯在十九世纪六十年代应用波尔查诺的方法证明了外尔斯特拉斯—波尔查诺定理。

尽管上述两定理已经显示了《纯粹分析的证明》的丰富的内容，它还包含有另一同等重要的定理，被称为柯西收敛条件。波尔查诺证明了：如果 n 充分大时，序列 $F_1(x)$，$F_2(x)$，$\cdots F_n(x)$，$\cdots F_{n+r}(x)$，$\cdots$的第 n 项 $F_n(x)$ 与其后很远的一项 $F_{n+r}(x)$ 之差小于任一已知量，则存在唯一的定值，该序列逼近于它——要多逼近有多逼近。该定理的证明是不完善的，而且也只能如此，因为其完善证明需要实数的准确定义，这在当时是不具备的。完善的实数理论直到十九世纪下半叶才建立起来。

《纯粹分析的证明》是朝向分析严格化的极为重要的一步，但可惜的是这一工作被忽视达半个世纪之久，直到十九世纪下半叶人们才充分认识到它的重要性。

《分析教程》(Cours d'analyse de l'école royale palytechnique) 法国数学家柯西(Augustin-Louis Cauchy,1789—1857)著。1821年出版于巴黎。是作者为巴黎综合工科学校所写，这是严格微积分的奠基之作。该书与作者的其它几种分析基础方面的著作《无穷小分析教程概论》(1823)、《微积分讲义》(1829)等对分析学以至整个现代数学产生了深远的影响，它导致了分析严格化运动，引起分析学中的一场革命。

自从牛顿和莱布尼茨创立微积分以来，分析学便一直没有一个严格的基础。由他们引入的无穷小等概念在分析学中产生了广泛的争议。为了克服无穷小带来的混乱，数学家们提出了许多方案。拉格朗日提出可以在函数的泰勒级数展开的基础上处理分析学，这一方法曾被广为采纳。达朗贝尔则认为可将微积分建立在极限概念的基础上。他们都未能取得成功。第一个成功的处理是由捷克数学家波尔查诺在《纯粹分析的证明》(1817)中给出的，但他的著作被忽视达几十年之久。在当时流行的观点仍然是：对实数为真的命题对复数也真；对有限量为真的对无穷小也真；对收敛级数为真的对发散级数也真。柯西拒绝这种所谓"代数通则"，开始认真对待分析学中的每一个基本概念。他运用代数工具将先前所有依赖于几何学直观的概念定义在严格的基础上，从而为整个分析学的严格化开辟了一条正确的通路。

《分析教程》共分12章，书后有9个附注。第1章介绍实函数；第2章讲述无穷小量及函数的连续性；第3章介绍对称函数、交错函数及齐次函数；第4、5章整函数与连续函数的确定；第6章收敛与发散级数；第7章虚数的表示；第8章变量与复函数；第9章收敛与发散的复数级数；第11章有理分数的分解；第12章循环级数。附注内容有关正、负量的理论(附注1)；方程的数值解(附注3)；形数(附注6)；二重级数(附注7)；无穷乘积(附注9)等。在本书的导言中柯西表明了他试图给分析学以严密性的意图。之后便从定义变量、函数开始论述。"人们把依次取许多互不相同的值的量叫做变量"。"当变量之间这样联系起来的时候，即给定了这些变量中的一个值，就可以决定所有其它变量的值的时候，人们通常想象这些量是用其中的一个来表达的，这时这个量就取名为自变量，而自变量表示的其它量就叫做自变量的函数"。由此给出了极限和连续的概念，"当同一个变量依次所取的值无限地趋近于一个定值，最终使它们与该定值之差要多小就多小，这个定值就称为所有其它值的极限"。"$f(x)$是变量x的一个函数，x界于给定的两限之间，若对于两限之间x的每一个值，差$f(x+a)-f(x)$的(绝对)值依a无限地变小，则称$f(x)$是连续函数。换句话说，函数$f(x)$对界于给定界限之间的x是连

续的，如果变量的无穷小增量总导致函数自身的一个无穷小增量"。这里柯西将无穷小量定义为以零为极限的变量，从而澄清了自莱布尼茨以来对无穷小量的模糊认识。同样，柯西将导数定义为一个比值的极限，并强调把积分定义为和的极限来代替把积分看作是微分法的逆，这是历史上第一个关于定积分的恰当定义。此外，柯西在《分析教程》中对级数的收敛性作了深刻的研究，这是关于级数收敛性的第一个具有广泛意义的论述。他写道："令 $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$ 是级数前 n 项的和，n 表示自然数，若对于不断增加的 n 的值，和 S_n 无限趋近于某一极限 S，则级数称为收敛的，这个极限值叫做该级数的和。反之，如果 n 无限增加时 S_n 不趋于一个固定的极限，该级数就称为发散的，且级数没有和"。之后，他给出了柯西收敛判别准则，即序列 $\{S_n\}$ 收敛于一个极限 S，当且仅当 $S_{n+r}-S_n$ 的绝对值对于一切 r 和充分大的 n 都小于任何给定的量。

当然，柯西的著作若用现代标准来衡量，严密性是不够的。例如他使用的"无限趋近"、"要多小有多小"等术语并未完全脱离直观。柯西认为，如果 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，级数是收敛的，若 $u_n(x)$ 都连续，则 $F(x)$ 也连续，他忽视了一致连续的要求。此外，当时实数理论还没有完善，但柯西的著作鼓舞了许多人在分析严格化方面的努力。阿贝尔在柯西工作的基础上提出了一致收敛的概念，并在信中高度赞扬了柯西的工作，称柯西为"当今懂得应该怎样对待数学的人"。阿贝尔极为欣赏《分析教程》，认为"每一个在数学研究中喜欢严密性的人都应该读这本杰出的著作"。

《分析教程》是十九世纪数学严格化的典范，1828 年被译成德文出版。

《关于定积分理论的报告》（Mémoire sur la théorie des intégrales définies） 法国数学家柯西（A. －L. Cauchy，1789—1857）著。1814 年在巴黎科学院宣读，1825 年送去发表，1827 年出版。出版时柯西增加了两个注解，加进了这期间该理论的新发展。该文开创了复变函数论的研究，在复变函数论的历史上具有重大意义。

柯西对复变函数论的研究是他最重要的工作之一，在这方面发表了一系列论文，取得卓越成就，今天该领域的基本定理是与他的名字紧密联系在一起的。尽管如此，他没有写出他本该写的这方面的综合著作。该报告是他在复函数论方面的第一篇重要论文。1825 年，柯西写了另一篇重要论文"关于积分限为虚数的定积分的报告"（1874 年发表）。这被认为是他最重要的工作，但是柯西本人一直没有认识到它的重要价值。直到 1851 年他还从未提到过它。而是多次又回到 1814 年的《报告》，在柯西自己的心目中是极为赏识 1814 年的这篇报告的。

在柯西之前，对特殊的复函数欧拉就曾经研究过。达朗贝尔也发展了所谓柯西－黎曼积分方程。但即使在 19 世纪初复数也未获一致

认可。直到当时在复函数方面最鼓舞人心的冒险行动是欧拉和拉普拉斯关于将积分路径从实数域扩展到复数域,从而得到定积分新公式的粗略的设想。尽管高斯看来已知道大部分关于复函数的基本事实,但当时他没有发表任何东西。

柯西在1814年《报告》的序言中说,他的工作是由于受到欧拉和拉普拉斯的影响所致。在该文中他处理了在流体力学研究中出现的二重积分的积分换序问题,他把复函数表示为两个变量的实函数对。由于勒让德的批评,在1825年送去发表时柯西在脚注中恢复了复观点,尽管他还未承认复积分路径。柯西在《报告》中实际上处理的问题在今天看来似乎有些奇怪。他考虑了复变量 $Z=x+iy$ 的可微函数 $f=u+iv$,利用柯西—黎曼积分方程之一,得到矩形 $x_0\leqslant x\leqslant x_1, y_0\leqslant y\leqslant y_1$ 上的二重积分

$$\iint u_x d_x d_y = \iint v_y d_x d_y。$$

通过该积分的演算,他得到如下基本等式

$$\int_{y_0}^{y_1}(u(x_1,y)-u(x_0,y))dy = \int_{x_0}^{x_1}(v(x,y_1)-v(x,y_0))dx。$$

利用另一个柯西—黎曼方程,他得到第二个等式,结合二者,他得出

$$i\int_{y_0}^{y_1}(f(x_1,y)-f(x_0,y))dy = \int_{x_0}^{x_1}(f(x,y_1)-f(x,y_0))dx,$$

即沿矩形回路的柯西积分定理。证明中假定了函数的正则性。当然在以后柯西发展了他的理论,但即使在1814年的报告中,柯西积分定理也被证明是强有力的工具。许多新旧定积分可以用此方法得到验证。今天使用二重积分的方法看起来有点奇怪,但在当时必定是极自然的。事实上,高斯在他的关于代数基本定理的第三个证明(1816)中也同样使用二重积分。

的确,1814年《报告》中没有明显指出复函数理论怎样被包括在内,但1825年的《报告》中,他朝现今所谓柯西积分定理前进了一大步。他定义了复域中任意路径上的定积分,并通过变分指出在 $f(Z)$ 的正则区域中这样的积分只依赖于路径的端点。后来他定义了留数概念,得到一些重要定理,并发展了他的复函数的观点。所有这些研究都始源于1814年的《报告》。从1821年后,差不多25年中,柯西单独一人发展了复函数理论。他的一系列工作奠定了这门学科的基础。

《热的分析理论》(Théorie analytique de la chaleur) 法国数学家、物理学家傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier,1768—1830)著,1822年出版。本书中作者用数学公式将基本物理原理表述得极为清晰和详尽,开创了数学物理研究的新篇章。是数学应用于物理学的一个里程碑,对数学和理论物理学的发展都有着深远的影响。

该书的主要部分是作者在1807年底向巴黎科学院递交的一篇关于热传导问题的论文,其中傅里叶研究了热在均匀各向同性的介质中的传导问题,解决了特殊热传

导问题。他从探讨固体内部的温度变化规律入手，首先推导出热传导方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=k\frac{\partial v}{\partial t}。\quad ①$$

为解上述方程，傅里叶发现解析函数可以表示为三角级数，因而他认为任意周期函数 $f(x)$ 都可表示为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{v=1}^{\infty}(a_v\cos vx-bv\cdot\sin vx)\quad(-\pi<x<\pi)$$

但他从未给出严格证明。在科学院的论文审查委员会的成员中，拉普拉斯、蒙日等都很欣赏傅里叶的工作，但拉格朗日却强烈反对，因为傅里叶为表述某些物体中的初始温度分布使用了傅里叶级数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\left[\cos rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos rt dt+\sin rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin rt\, dt\right]。\quad ②$$

而拉格朗日在十八世纪五十年代研究弦振动问题时对三角级数是持贬低态度的。但科学院为鼓励傅里叶发展自己的思想，于1810年确定将热传导问题作为悬赏课题。次年傅里叶向科学院呈递了重新修改过的论文，其中包括对在无穷介质中热传导的新分析，在这些情形中，傅里叶级数的周期性不适合表达初始条件，因而傅里叶以傅里叶积分定理取代之，他将它写成

$$\pi f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\int_0^{\infty}\cos q(x-t)dq$$

的形式。该论文获得此项奖金，但因缺乏“严格性与一般性”受到批评。此后于1822年他首次将该论文编入《热的分析理论》发表。傅里叶的工作超出了牛顿的《自然哲学的数学原理》所限定的力学范围，第一次将物理问题表述为线性偏微分方程中的边值问题。此外，他发明的解方程的强有力的数学工具（如用积分解各种微分方程的方法）导致了一系列后续工作，有力地推动了十九世纪偏微分方程的发展。此外，他的工作还使人们不得不重新认识函数、连续等基本数学概念。今天，数学中所谓傅里叶级数，傅里叶积分等内容就是从他的著作中发展而来的，这些名称也正标志着他的重要贡献，他的理论成为傅里叶分析的起源。尽管他的工作曾受到压制，但幸运的是他后来屡次重述他的工作，直到其理论被广为接受。今天，《热的分析理论》已成为数学史上的经典名著。1878年出版了《热的分析理论》的英译本，法文第二版收入1888年《傅里叶全集》的第一卷中。

《论图形的射影性质》(Traité des propriétés projectives des figures) 法国数学家、力学家庞斯列(Jean Victor Poncelet，1788—1867)著。1822年发表。这是第一本完全致力于射影几何学的著作，它标志着现代射影几何学的开始。庞斯列第一个充分认识到射影几何学是具有独特方法和目标的新的数学分支，从而在该著作中对这门学科作了系统处理，对十九世纪数学发展产生了重大影响。

庞斯列曾是法国大数学家蒙日

和卡诺(L. N. M. Carnot)的学生,在巴黎综合工科学校时听过他们的几何学讲座,是蒙日和卡诺引导了综合几何学研究的复兴。1812年庞斯列跟随拿破仑的军队远征俄国,不久便被俘囚于萨拉托夫的监狱中。在狱中,他不借助于任何参考材料,着手回忆并重新推导了从蒙日等人那里学来的纯粹与解析几何知识,之后便开始创造出新的结果。这些发现奠定了他关于射影几何学工作的基础。1814年回国后,他继续了他的研究。1820年他向巴黎科学院递交了题为"论圆锥曲线的射影性质"(Essai sur les propriétés projectives des sections coniques)的论文,其中包含了他的新几何学思想。庞斯列想以圆锥曲线为例表明几何学的语言和概念可以通过系统地使用无穷远元素和虚元素而得到推广。该论文成为1822年出版的《论图形的射影性质》一书中的一部分。

在《论图形的射影性质》中,庞斯列研究了几何图形在投影与截影下保持不变的性质,即图形的射影性质,取得了丰富的成果,奠定了现代射影几何学的基础。他通过系统地引入无穷远元素和虚元,构成了复射影几何所用的空间。他象德扎格、帕斯卡等人一样采用了中心投影,即从一个点投影,并把它提高成为研究几何问题的一种方法。在他的工作中,有三个观念是主导性的。第一个是透射的图形,两个图形是透射的,如果一个能够从另一个经过一次投射与截影或一串投射与截影得出。第二个主导观念就是连续性原理。在该书中他写道:"如果一个图形从另一个图形经过连续的变化得出,而且后者与前者同样地一般,那么马上可以断定,第一个图形的任何性质第二个图形也具有。"对此他在本书中作了大胆的应用,证明了许多定理,并用它来讨论虚图形。至于这一原理的真实性,庞斯列承认能够从代数上证明这原理,但他坚持认为它并不依赖于这样一个证明。他的第三个核心观念是关于圆锥曲线的极点和极线的概念,他给出了从极点到极线和从极线到极点的一般表述,并用之作为建立许多定理的方法。至于对偶原理这一射影几何学的重要原理,庞斯列在研究圆锥曲线的配极的过程中已经充分确定,并且认为配极关系是这一原理成立的重要原因。此外,庞斯列不仅使用了中心射影,也广泛地利用了其它类型的变换(如双有理变换等),取得许多结果。庞斯列的功绩以往是被低估了,他的著作所显示的射影几何和度量几何的区别预示了现代结构概念的出现。他的几何工作是迈向现代几何的重要的一步。

《论图形的射影性质》于1865—1866年由庞斯列本人出版了第二版,含两卷。其中第一卷是该书第一版的重印,但添加了注释。第二卷收集了庞斯列1822年后的几何学论文。

《高于四次的一般方程的代数求解之不可能性的证明》(Beweis der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichungen, welche den vierten Grad

Übersteigen） 挪威数学家阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802—1829）著。发表于著名的《克列尔杂志》（即《纯粹与应用数学杂志》）创刊号上（1826年）。

求解多项式方程一直是一个得到不懈研究的古老课题。用代数方法求解一般的三次和四次方程由塔尔塔利亚、卡当、费拉里等人解决后，人们便致力于用代数方法求解四次以上的方程。对此许多大数学家做出了努力，其中包括莱布尼茨、欧拉、拉格朗日等人。拉格朗日的工作尤为深入和彻底，他的方法对求解一般的二次、三次和四次方程都卓有成效。但他试图用这种方法去解五次方程时，便发现工作是如此艰难，最终不得不放弃了。后来拉格朗日得出结论说，用代数运算求解高于四次的一般方程看来是不可能的。他判断说，或者是这个问题超越了人的智力范围，或者是根的表达式的性质必定不同于当时所知道的一切。高斯对二项方程 $x^n-1=0$ 的研究对代数地求解一般的 n 次方程的问题也具有重要意义。阿贝尔早在中学时代就对此问题产生了浓厚的兴趣，他读了拉格朗日和高斯的著作，并试图按照高斯对二项方程的处理方法研究高次方程的可解性。开始，他认为自己已经解决了用根式解一般的五次方程的问题，但构造例子时，他认识到了自己方法的错误。几年之后，他重新拾起这一问题，这次采取了相反的观点，成功地解决了悬了几个世纪之久的问题，证明了一般的五次或更高次方程的解是不能用根式表示的。阿贝尔认识到该结果的重要性，决定自费将其印刷出版。为节省开支，1824年他将其结果压缩成只有六页的短文印刷出来，此即《论代数方程，其中证明了一般五次方程的不可解性》。为扩大影响，该文用法文写成，但遗憾的是并未在外国数学家（其中包括高斯）中产生什么影响，其艰涩难懂影响了人们的迅速理解。

1826年，当时在柏林的阿贝尔协助克列尔创建了著名的《纯粹与应用数学杂志》，首卷中刊载了阿贝尔的七篇论文，其中包括《高于四次的一般方程的代数求解之不可能性的证明》一文，这是1824年文章的扩充。这里阿贝尔给出了必备的代数背景，包括代数域扩张的讨论。全文共分四节，第一节讨论了代数函数的一般形式；第二节讨论了已知方程满足的代数函数的特征；第三节中对置换做了探讨；第四节中给出了五次方程的一般解的不可能性的证明。从而立即得出高于五次的一般方程的代数求解之不可能。证明中他利用了著名的定理：可用根式求解的方程的根能以这样的形式给出，出现在根的表达式中的每个根式都可表成方程的根和某些单位根的有理函数。这一结果现在通常称为阿贝尔——鲁非尼定理，但当时他并不知道鲁非尼的结果。

阿贝尔的这一著名工作结束了人们用代数求解一般的高次方程的徒劳的努力，也引导出了新的问题，因为某些特殊的方程还是可以用根式求解，因而阿贝尔又着手探讨可用根式求解的方程的根本特性。由于阿贝尔过早的去世，这一任务便

由伽罗瓦承担并出色地完成了。这是十九世纪数学史上最出色的工作之一。此外,阿贝尔还是椭圆函数论的奠基人之一。他的工作对十九世纪数学的发展产生了巨大影响。

《数学分析在电磁理论中的应用》(An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism) 英国数学家格林(George Green,1793—1841)著。位势论的经典文献之一。1828年通过格林的朋友们的赞助在诺丁汉私人出版。由于格林自学成才,基本上处于与学术界隔绝的环境中,这一重要著作没有立即引起重视。第一次只印刷了不足100本,很快便很难找到了。1841年汤姆森(W. Thomson,即 kelvin 勋爵,1824—1907)在一篇文章的参考文献中见到作者引用格林的这一著作,但直到1845年他才得到它。汤姆森开始认识到它的巨大价值,于1850—1854年在克列尔的《纯粹与应用数学杂志》上将它重新发表,并加了导言,从而产生了很大的影响。通过汤姆森,麦克斯韦及其它人,由格林发展的位势的一般数学理论导致了支承二十世纪工业的电的数学理论。位势论已发展为数学的一个独立分支。1928年爱因斯坦曾致电诺丁汉市视贺《数学分析在电磁理论中的应用》发表100周年。爱因斯坦赞扬格林的工作走在其它数学家(包括高斯)的前头。

格林的工作基本上是处于隔绝状态下独立进行的,他在该文的前言中为他的资料来源有限而抱撼。的确,他只引用了泊松、拉普拉斯、傅里叶、柯西等少数几位作者的工作。文中一开始便强调了位势函数的中心地位。拉普拉斯和泊松等人已经用到过位势函数,但"位势"这一名称是格林首先引入的。之后他发展了位势函数的一般性质并将它应用于电磁学。格林从位势方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0(简记为\ \Delta v=0)$$

开始,证明了位势论中极为重要的下述定理:设 U 与 V 是 x、y、z 的任意两个连续函数,它们的导数在一任意物体的任何点上有限,则(用现代记号)

$$\iiint U\Delta V dv+\iint U\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma=\iiint V\Delta U dv+\iint V\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma,$$

其中 n 是物体表面指向内部的法向,$d\sigma$ 是曲面元。之后他引入了后来所谓的格林函数的概念,如今格林函数已成为偏微分方程的一个基本概念,并被日益广泛地应用于现代物理的许多领域,格林用"位势函数"的术语称呼这个特殊函数,他求得位势方程解的方法与用特殊函数的级数的方法相反,称为奇异点方法。

格林的工作孕育了以汤姆森、麦克斯韦等为代表的剑桥数学物理学派,他是分析引入英国后第一个沿大陆上的工作方向前进的英国大数学家。

《数学分析在电磁理论中的应用》后来有两种摹真复制重印本(柏林,1889;哥德堡,1958)。德文译本曾于1895年作为《奥斯特瓦尔德精

密科学经典》(Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig)第61号出版。

《椭圆函数论新基础》(Fundamenda nova theoriae functionum ellipticarum) 德国数学家雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi,1804—1851)著。1829年出版。雅可比与阿贝尔共享发现椭圆函数的盛誉。该著作是雅可比研究工作的总结,是椭圆函数论的重要经典著作。

椭圆函数论是十九世纪数学家兴趣的中心点。在雅可比和阿贝尔之前,高斯、欧拉、拉格朗日、勒让德等人曾经取得椭圆函数论中的许多关键性结果,但他们只考虑椭圆积分。雅可比和阿贝尔差不多同时有了从椭圆积分的反函数入手进行研究这一重要思想,从而开辟了通往今天椭圆函数论的道路。雅可比的思想的发展主要体现在该著作中。本书由两部分组成,第一部分主要处理椭圆函数的变换。雅可比以第一类一般椭圆积分为起点,通过结合两种变换,得到了第一类椭圆积分的乘积这一漂亮结果。之后,雅可比将反函数 $\varphi=amu$ 引入椭圆积分

$$u(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}$$

中。这样 $x=\sin\varphi=\sin amu$。进一步引入 $\cos amu=am(k-u)\left(k=u[\frac{\pi}{2},k]\right)$,$\triangle amu=\sqrt{1-k^2\sin^2 amu}$(这些在今天分别被表示为 snu、cnu 和 dnu),建立了这些函数间的关系。此外,雅可比将虚数引入椭圆函数论,利用代换 $\sin\varphi=i\tan\psi$,建立了关系 $\sin am(iu,k)=i\tan am(u,k')$,模 k,k' 满足 $k^2+k'^2=1$,这样他得到了椭圆函数的双周期性、零值、无穷值及在半周期上值的变化等结果。在第一部分的最后,雅可比发展了被所有变换模满足的三阶微分方程。《椭圆函数论新基础》的第二部分处理椭圆函数的表示,致力于将椭圆函数展开成各种无穷乘积和级数。他给出的椭圆函数 $\sin amu$,$\cos amu$,$\triangle amu$ 的第一个表示是以无穷乘积商的形式。引入函数

$$Z(u)=\frac{F^1E(\varphi)-E^1F(\varphi)}{F^1}\qquad(\varphi=amu)$$

之后,他处理第二类积分。第三类积分被化为第一类和第二类积分。函数

$$H(u)=H(0)\cdot exp\left(\int_0^u Z(u)du\right)$$

在他的椭圆函数中起了重要作用。第二部分另外的内容是将 $H(u)$ 这样的函数表示为无穷乘积和傅里叶级数,从而得到一些卓越的公式。最后,雅可比以椭圆函数论在数论中的应用的讨论结束全书。

此书出版后的多年中,雅可比继续了他在椭圆函数论方面的工作。他讲授椭圆函数论多年,以致他对这一课题的探讨成为函数论本身发展所遵循的模式。

《代数通论》(Treatise on Algebra) 英国数学家皮科克(George Peacock,1791—1858)著。1830年初版。1842—1845年出版了两卷本的修订版。在该书中,皮科克试图给负数和复数以坚实的逻辑基础,首创以演绎方式建立代数学,对于抽象代数概念的演进起了重要的

推动作用。

1800年左右，数学家们自由地使用各类实数以至复数，但是并没有这些数的精确定义，也没有关于数的运算的合理性的任何逻辑检验。因而对于利用文字或符号表达式进行运算的正确性便不能建立。皮科克最先考虑了这一问题。为了说明用文字表达式进行运算的正确性，这些表达式要能代表负数、无理数和复数，从而给出负数和复数的坚实的逻辑基础，他将代数领域划分为算术代数和符号代数。前者符号表示正整数，所以有坚实的基础，这里仅有导致正整数的运算才被允许。符号代数采用算术代数的规则，但取消限于正整数的限制。在算术代数中推出的全部结果与符号代数中结果都一样。但算术代数中的表达式在形式上是普遍的，在值上是特殊的。而符号代数中的表达式在值上和形式上都是普遍的。例如在算术代数中，$a^m a^n = a^{m+n}$当 m 和 n 是正整数时成立，因而在符号代数中它对所有的 m 和 n 都成立。皮科克的论证被称为型的永恒性原理。关于符号代数，皮科克认为：①符号在值和表示上都是无限的；②无论是什么符号，在它们上作运算，对所有情况都能进行；③符号组合的法则属于这样一类法则，即当符号是算术量时，且当它受到的运算用算术代数中同样的名字来称呼时，它与算术代数的法则普遍符合。从这些原理出发，他相信能推出等价的型的永恒性原理："无论什么代数的型，当符号在形式上是普遍的，而在值（正整数）上是特殊的时候是等价的，则当符号在值上和形式上都是普遍的时候同样是等价的。"皮科克试图利用该原理证明复数运算是合理的，其结论是武断的。在《代数通论》的第二版中，皮科克肯定了这个原理。在这里他引进了正式的代数科学。他认为代数和几何一样，是演绎的科学。代数的步骤必须根据法则条文的一个完全的陈述，这些法则条文支配着步骤中用到的运算。至少对于代数这门演绎科学而言，运算的符号除了法则给予它的意义而外，没有其它意义。

皮科克的型的永恒性原理是从所采用的公理推出来的。因而尽管皮科克的观点有局限性（例如按照他的原则，非交换代数就成为不可能的），但他的这种处理方式为代数中更抽象的思想的发展铺平了道路，尤其影响了布尔关于逻辑代数的思想，是朝抽象代数迈出的重要的一步。

《论方程的根式可解性条件》（Abhandlung uber die Bedingungen der Auflösbarkeit der Gleichungen durch Wurzelgrössen） 法国数学家伽罗瓦（Evariste Galois，1811—1832）著。在他死后由刘维尔修订整理发表于《纯粹与应用数学杂志》(1846)上。伽罗瓦这位转瞬即逝的明星是数学史上罕见的天才。他以二十多的韶华死于非命。身后只留下了不足100页的著作，但其内容却是惊人的丰富。他继续阿贝尔的工作，借助于群的理论对代数方程的可解性问题给出了明确的解答，解决了这一从18世纪以来就吸引了众多数

学家注意的重要课题,从而为近世代数奠定了基础。他的其它致力于椭圆函数论及阿贝尔积分的著作以及对数学哲学和方法论的观点,表明他对现代数学有着不可思议的远见卓识。伽罗瓦对现代数学的发展产生了巨大的影响。但伽罗瓦同时代的人没有一个理解他,因而这篇文章的遭遇极为坎坷。他的思想极其深刻且早熟。早在中学时代便着手方程理论的研究,开始他曾认为自己解决了一般的五次方程,但认识到错误后,开始重新研究,终于借助于群论彻底解决了这一问题。1829 年 5 月他写了关于代数方程的解的论文,经由柯西呈交给法国科学院,但柯西未能遵照科学院的委托及时审议该论文。1830 年 2 月末,伽罗瓦又呈送了该文的修改稿,希望得到科学院的数学大奖,但论文的审稿人傅里叶不久便去世了,文章也被遗失。伽罗瓦的几度失望影响了他的世界观。1831 年 1 月 27 日应泊松的要求,伽罗瓦对前面文章再作修改草成此文,再次提交科学院,但未得到泊松的公正评价。一个重要原因是泊松未能深刻理解此文。不久,伽罗瓦便决斗而死。在他死的前夜,预感到自己的命运,不得不匆匆写下了一份关于他的研究的简单说明,托付给他的朋友谢瓦利埃。这份遗书实际上是写给高斯和雅可比的。伽罗瓦死后,谢瓦利埃将此信发表。这可以说是数学史上最富悲剧性的作品。

《论方程的根式可解性条件》是伽罗瓦最重要的著作,在他的遗书中被放在首要的位置。在该文中,伽罗瓦继续了拉格朗日、高斯、阿贝尔等先辈们的工作,但同时做出了完全独到的工作。其中不但彻底解决了根式求解代数方程的问题,而且发展了一整套关于群和域的理论。在现代数学中,他的思想被称之为伽罗瓦理论。他认为每个方程对应于一个代数数域,这些代数数介于由该方程的根产生的域和该方程的系数决定的域中间,而且不同的域对应于不同的群。方程的全部根产生的域后来被称为伽罗瓦域,这个域对应一个群,即由方程根的置换构成的群,称为伽罗瓦群。伽罗瓦域的子域和伽罗瓦群的子群之间是一一对应的。伽罗瓦指出,一个不可约的代数方程是根式可解的,当且仅当它的群是可解的,即含有具有某些性质的一组正规子群的合成序列。尽管这一一般原则事实上并没有使一个方程的实际求解更简单,但它确实提供了发现关于低于五次的一般方程、二项方程以及某些其它特殊类型的方程的可解性的所有已知结果的手段,而且籍此几乎便可立即证明高于四次的一般方程用根式是不可解的,因为它的群是不可解的。伽罗瓦意识到这一研究已经超出了代数方程的根式可解性问题,认为可用来解决更一般的无理数的分类问题。他虽然没有抽象的群与域的名词,但确实使用了群和域的概念,因而伽罗瓦被认为是近世代数的创始人。

伽罗瓦的深刻思想是在几十年后才为人们所彻底理解。从十九世纪后半叶开始,他的工作在科学的各个领域产生了广泛的影响。

《绝对空间的科学》(Scientiam spatii absolute…) 匈牙利数学家J.波尔约(János Bolyai,1802—1860)著。作为他父亲F.波尔约的一本书的一个附录首次发表于1832年。这篇仅有26页的文章是非欧几何学史上的经典著作,它确立了波尔约作为非欧几何的独立发现者在数学史上的地位。

J.波尔约的父亲是一位数学家,曾致力于证明欧几里得第五公设多年。早熟的J.波尔约从父亲那里继承了对平行线问题的兴趣,但1820年他父亲就劝告他不要试图去证明"过直线外一点,只能作一条该直线的平行线"这一公设。在给儿子的信中,F·波尔约写道:

> "你不要误入平行线这一歧途,它会剥夺你的一切闲暇,你的健康,你心灵的宁静以及你的全部幸福——这个无底洞会淹没一千个象牛顿这样的巨人"。

但同年J.波尔约已开始沿着最终导致他发现非欧几何的方向思考了。1823年经过证明欧氏公设的徒劳之后,他假设几何学可以没有平行公设而构造出来,并取得成功。此时他便发现了公式 $\mathrm{tg}\,\frac{\pi(x)}{2}=e^{-\frac{x}{k}}$ (k为常数)。在1823年11月3日给父亲的信中他兴高采烈地写道:"从无之中,我创造了一个全新的世界"。1825年2月,他给父亲看了一份手稿,内含关于绝对空间的理论,即在这样的空间中,在一平面上经过一点P和不过P的直线l,存在一束过P但不与l相交的直线,当线束减为一条直线时,空间满足欧氏公理。F.波尔约不能接受这样的几何学,因为他不理解为什么要有一个常数,但还是决定把手稿送给老朋友高斯审阅。第一封信(1831.6.20)没有回音,但高斯回答了第二封信(1832.1.16)。在这封著名的信中,高斯写道:

> "现在谈谈你儿子的著作,当我说'我不能夸奖它'时,你可能会惊讶,但我别无可说,因为夸奖它就等于夸耀我自己。这篇文章的整个内容,你儿子采取的方式,所得到的结果,几乎处处与我的思考相同。这种冥思断断续续用了我30到35年的时间。事实上,我极为震惊…"。

这封信给J.波尔约以极大打击,他感到受了欺骗,但高斯的话是真实的,因为高斯本人确实也独立地发现了非欧几何。无论如何,J.波尔约还是同意让父亲发表他的手稿,这就是《绝对空间的科学》一文。该文共有43小节,其中给出了J.波尔约得到的关于非欧几何的最重要的结果,可简述如下:

(1)平行线的定义及其独立于欧氏公设的性质。

(2)关于无穷半径的圆与球。无穷半径的球上的几何与通常的平面几何是一致的。

(3)球面三角独立于欧氏公设。公式的直接证明。

(4)非欧几何中的平面三角学。应用于计算面积和体积。

(5)可用初等方法解决的问题,化圆为方,关于第五公设是错误的

假设。

众所周知,罗巴切夫斯基独立地发现了非欧几何,但他和 J. 波尔约的工作也有区别。罗氏给出了虚几何学特别是在其分析方面的一个完善的发展,而波尔约更深入地探讨了几何定理对于欧氏公设的独立性或依赖性问题,并且罗氏主要是在欧氏公设的否命题的基础上构造一个几何学体系,而波尔约则提示了独立于它的通常几何学中的命题和作图法。波尔约直接表明他的命题是绝对正确的。

J. 波尔约的著作当时并未引起大的反响,事实上它在很长时间里是被忘记了,后来直到贝尔特拉米和克莱因的工作之后才得到公认。该文 1867 年被译为法文,1868 年译成意大利文,英译本在 1896 年出版。

《几何图形相互依赖性的系统发展》(Systematische Entwicklung der Abhägigkeit geometrischen Gestalten von einander) 德国数学家施泰纳(Jakob Steiner,1796—1863)著。出版于 1832 年。作者生于瑞士,做过佩斯塔罗齐(Pestalozzi,著名教育家)的学校的教师,受到其教学原则的强烈影响,他的数学研究的目的是要发现一切数学内容的有机的统一性。他特别力图在其综合几何的研究中实现这一目标。施泰纳是 19 世纪中期纯粹几何学派的代表人物之一,以改革几何学为己任,偏爱综合方法以至嫌恶分析学。他的几何研究是为了发现简单原理,从而使许多表面上看来互不相关的定理就可以自然地导出。

本书是施泰纳的重要著作,其目的是运用射影概念从简单的几何结构(如点、线、线束、面、面束)出发建造出更复杂的结构,其结果并不特别新颖,但方法是新的。在前言中他写道:"本书试图发现(几何学的)有机组织(Organismus)通过它,最不相同的空间现象就可以相互联系起来,一些有限的非常简单的基本关系合起来就构成一个框架,运用此框架,余下的定理就可以毫不费力地逻辑地发展起来。通过适当采纳少量基本关系,人们就成为整个领域的大师…,这里主要的事情既非综合方法也不是分析方法,而是图形的相互依赖性以及它们的性质由简单到复杂的过渡的方式的发现。这种关联与过渡是几何学中余下的一切单个命题的真正来源。"《几何图形相互依赖性的系统发展》原拟包括五部分,但 1832 年只出版了第一部分,余下的其它一些内容发表在施泰纳的遗著《综合几何学讲义》(Vorlesungen über synthetische Geometrie,1867)中。

施泰纳运用射影方法定义了圆锥曲线,这种方法现已成为标准的方法。他将圆锥曲线定义为两个射影相关的线束的所有各对对应线的交点的集合。这里所谓两线束的射影相关是指它们都与第三个线束是透视相关的。如此施泰纳用较简单的形、线束构造出了圆锥曲线或二次曲线。施泰纳充分认识到他的方法的重要性,虽然牛顿等人已知道这一基本定义的度量表述,但施泰纳首先将其作为射影几何中的一个

基本命题。他使之成为圆锥曲线论的射影处理的基础。利用射影对应做为他的定义的基础，施泰纳用类似的方式构造出了直纹二次曲面，单叶双曲面和双曲抛物面。在证明中他采用交比作为基本工具，然而他不采用虚元素，也不使用带负号的量。施坦纳一开始就使用了对偶原理，在平面对称几何学的定理中，他把点和直线相互对换，定理仍然成立。在立体射影几何学的定理中，把点和平面相互对换，而直线不变，定理也成立。施泰纳把圆锥曲线的定义对偶化，得到一种新结构，称为线曲线，他把作为点的轨迹的通常的曲线称为点曲线，点曲线的诸切线是一个线曲线，在圆锥曲线的情形就构成对偶曲线。利用他的点圆锥曲线的对偶概念，可以把许多定理对偶化，虽然施泰纳没有建立对偶原理的逻辑基础，但他通过把图形分类和注重对偶命题而系统地发展了射影几何学。此外他还系统地研究了二次曲线和二次曲面。

《具有完善的平行线理论的新几何学原理》（новые начала геометрин с полной теорией иараллелъных）　俄国数学家罗巴切夫斯基（Николай Иванович Лобачевский，1792—1856）著。1835—1838年间发表于喀山大学的科学文集中。

罗巴切夫斯基是具有革命性的新几何学——非欧几何学的三位创始人之一。他独立地得到了新几何学的基本原理，并最早发表了出来。在该书发表之前，早在1823年他就写过一本《几何学》，但直到1909年才第一次发表。《几何学》中的有些部分融于该书中。1826年2月23日他在喀山大学物理数学系的学术会议上宣读了题为“几何原理简述”的论文。这是他的新几何学的首次披露。他关于新几何学公开发表的第一篇文章是“论几何原理”，发表于1829—1830年的喀山大学杂志上（中译文见《数学史译文集续集》，上海科技出版社，1985）。之后他多次表述了新几何学。1835年发表“虚几何学”，并自己译成法文在克列尔杂志上发表。1840年他在柏林出版德文著作《平行线理论的几何研究》。这是他新几何学的最好表述，曾受到高斯的赞扬（“作者本着真正几何学家的精神以大师之手处理了这一问题”——高斯语）。他最后的著作是《泛几何学》，1855—1856年间在喀山出版。

罗巴切夫斯基创立的新理论称为罗氏几何。这起源于对欧几里得《几何原本》中第五公设（或平行公设》的研究。人们试图努力消除对这一公设的怀疑，或者想用其它更为自明的公理来代替平行公理，或者想从其它几个公理推导出平行公理来。这种努力持续了两千年之久，这导致了非欧几何的诞生。罗巴切夫斯基独立地认识到了这种努力的徒劳，认识到了平行公理的独立性，认为有可能采取一个与此矛盾的命题，并从一组新公理推导出结论，这就是新几何学的出发点。在《具有完善的平行线理论的新几何学原理》的绪论中，他表述了这一观点，根据这一立场，他把欧氏几何学规定为一个假说的综合的体系，从而展开

新几何学:在前六章中,致力于基本概念的定义和基本定理的证明。他先定义了什么是直线;证明两直线相交只有一个交点;同一直线的两垂线不相交等。在第七章中他毅然放弃了欧几里得的平行公理,规定已给一直线 l 和 l 外一点 p,通过 p 的所有直线关于 l 分成两类,一类与 l 相交,另一类则不相交。这两类之间的边界线是平行于 l 的直线,"通过 p 有一条以上与 l 平行的直线"作为公设(第 93 节),据此公设以及《几何原本》中的平行公设以外的命题,逐渐得出了他的新理论。他定义过 p 的平行于 l 的直线和由 p 向 l 引的垂线之夹角为"平行角"。设由 p 引向 l 的垂线长为 x,平行角为 $\pi(x)$,他证明了 $\operatorname{tg}\frac{\pi(x)}{2}=a^{-x}$($a>1$,常数)(117 节)。之后,作为半径无限大的圆,定义了"界线",并定义了"界面"。由此展开了三角法,导出了他的几何中平面三角形边与角的公式,并说明当三角形的边很小时,就可以得出普通的三角学公式。这意味着欧氏几何是新几何学的极限情形。

客观地讲,本书有它的局限性,比如对作为理论的根基的公理的分析还是不很明确的。但新几何学的影响是巨大的。罗巴切夫斯基为他的理论得到承认作了不懈的努力。与其同时,高斯和 J. 波尔约也得到了新几何学的基本原理。直到非欧几何的创始人死后,非欧几何才得到承认。1866 年意大利数学家贝尔特拉米的论著《非欧几何解释的尝试》一文表明非欧几何的相容性与欧氏几何的相容性事实一样清晰。克莱因 1871 年建立了非欧几何的整体模型,使非欧几何的相容性归结为欧氏几何的相容性问题,从而使非欧几何获得普遍承认。

非欧几何的创立从根本上改变了人们的几何学观念,导致了对几何基础的深入研究,并深刻地影响了人们的数学真理观,是一次数学思想的革命,并且对物理学观念的改革发生了重大影响,后来成为广义相对论的数学工具,并被作为宇宙的几何模型。非欧几何的创立是数学史最重大的事件之一。

《新几何学原理》一书,1897 年被译成英文,1899 年译为德文。

《线性扩张论》(Die lineale Ausdehnungslehre) 德国数学家、语言学家格拉斯曼(H. G. Grassmann, 1809—1877)著。1844 年出版第一卷。早在 1832 年格拉斯曼开始研究一种新的几何分析,用它可以简化拉普拉斯的《天体力学》中的数学表述。尽管当时只是为了解决有关的潮汐问题他才使用了新方法,但他认识到了自己的创造的重要意义。1843 年秋他完成了这本重要著作的第一卷手稿,名为《线性扩张论》。1844 年以《扩张量的科学或扩张论》为题出版。可惜由于叙述的抽象及夹杂有神秘的教义,其重要性未被同时代人所理解。《线性扩张论》一书一直被专家们所忽视。格拉斯曼原打算续写第二卷,但后来改为重写该书。1862 年他出版了该书的修订本,题为《扩张论》。不幸的是,新版本并不比原书好。尽管有高度的独创,但并未立刻赢得赞赏。不

满于自己的不成功，格拉斯曼经常离开数学研究，而钻研语言，并成为著名的梵语学家。1877 年，他整理了该书 1844 年版的新版本准备发表，于次年他去世后出版。

线性扩张理论是格拉斯曼最重要的创造，它介于解析几何与综合几何之间，是关于几何分析的课题。第一个构想几何分析的人是莱布尼茨，但只有等到解析几何和综合几何在 19 世纪都有了相当程度的发展之后，几何分析体系才能建立。它的基本原理之一就是有向线段的加法。麦比乌斯曾经发展了一种几何分析，此外，由 1843—1853 年间发展的哈密顿的四元数理论中产生了一种推广复数的企图，但这一推广只有牺牲乘法交换律才能奏效。与此同一时期，格拉斯曼发展了他的扩张论，其代数实体是扩张的量，其实是一种有 n 个分量的超复数。用现代术语来表述，它们组成 R 上的一个 n 维向量空间，其基向量为 e_1，e_2，…，e_n，在要发现一个合适的基本域 S^1_n 中两个量的乘积的企图中，格拉斯曼和哈密顿沿着不同的方向，他不要求 S^1_n 成为一个环，而是在 S^1_n 上添加一个 $\binom{n}{2}$ 维的向量空间，具有基 e_{ij}($1\leq i<j\leq n$)。他引入了两类乘法，即内积和外积。对外积（用括号来表示），有

$$[e_ie_j]=-[e_je_i]=e_{ij} \quad (1\leq i<j\leq n),$$

$$[e_ie_i]=0 \quad (1\leq i\leq n),$$

因而对任意 r($1\leq r\leq n$)，格拉斯曼建立了具有基 e_{i1}，e_{i2}，…，e_{ir}($1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n$)的秩为 r 的量的域 $S^r_{\binom{n}{r}}$。通过运用公式

$$\begin{aligned}[e_{j1}\cdots e_{jr}] &= +e_{i_1\cdots i_r} \quad 或\\ &= -e_{i_1\cdots i_r} \quad 或\\ &= 0\end{aligned}$$

〔根据 ($j_1\cdots j_r$) 是 ($i_1\cdots i_r$) 的偶置换，奇置换或 j_v 不全相异〕S^1_n 的基量的外积可以表为 $S^r_{\binom{n}{r}}$ 的一个量。如此，人们立刻可以计算 S^r_n 的任意量的外积。通过化为基本单位和运用结合律和乘法分配律，并添加任意秩的量，就得到（用现代术语）S^1_n 上的所谓格拉斯曼代数。对于内积，他假定 $e_i|e_i=1$，$e_i|e_j=0$ ($i\neq j$)。除此之外，他还发展了一种乘法，他称之为“代数乘法”，它遵守 $e_ie_j=e_je_i$ ($i=1$，…，n) 这一法则，它导致今天所谓的多项式环。这里格拉斯曼主要是从几何中，特别是 n 维几何（当时 n 维几何仍然处于萌芽状态）中得到他的扩张论的思想的。

格拉斯曼的扩张论极其一般和综合，其意义远远超出了其时代。当时在几何学中，数学家们仍习惯于所谓“真实”的三维空间思维。并未看到在虚构的 n 维空间中考虑“扩张的量”的必要。因为在当时关于超复数的有用的例子最多只包含四个分量。但格拉斯曼不仅考虑了任意维数的流形，而且也引入了看来是人为的乘积和各种元素。他当时还未能预见在其一般的代数方面扩张论的结果意义远为深远。格拉斯曼的思想有助于引导数学家们进入张量理论，是现代线性代数、矩量、向量等等诸领域的先驱工作。格拉斯曼的重要工作导致三个重要方向的发展，首先，空间的几何概念的扩展；第二，影响了向量分析的

诞生；第三，预示近世代数的发展。

格拉斯曼去世后，扩张论产生了广泛的影响，意大利皮亚诺1888年的著作《几何分析》（Calcolo geometrico）中发展了他的思想。后在德国本土和法国也受到欣赏。美国数学家吉布斯（J. W. Gibbs）很早就欣赏格拉斯曼的新理论，并由此发展出向量代数。该书出版后一个世纪，福德（H. G. Forder）的《张量分析》（Calculus of Extension，1941）表明了扩张论在英语世界的数学家中的持续不断的魅力。

《位置的几何学》（Geometrie der Lage） 德国数学家施陶特（Karl Georg Christian von Staudt，1798—1867）著。出版于1847年。施陶特的"位置的几何学"即射影几何。在该书中，施陶特不依赖度量概念建立起射影几何学体系，指出射影几何学比欧氏几何更为基本，从而使射影几何学奠定在更严格的基础之上。

19世纪初的几十年中射影几何研究得到复兴并蓬勃发展。法国数学家庞斯列和热尔岗等人对之做出了重要的贡献。他们发现，通过利用射影，圆、正方形及其它图形可以变换为任意的圆锥曲线和多边形，而关于圆的度量定理可以变换为圆锥曲线的度量定理。庞斯列和热尔岗的主要贡献是配极理论和对偶原理。其后德国数学家施泰纳推进了射影几何的综合发展。法国数学家沙勒也发现了一些射影几何的基本结果。但是从射影几何的最早研究者德扎格到沙勒，都在射影几何里使用了距离的概念，如交比的概念便是用距离定义的，谁也未能严格地坚持射影几何的观点。因为距离并非射影概念，它在射影变换下不是不变量。施陶特的著作第一个采取了完全严格的方法。在《位置的几何学》的前言中他明确表示了脱离度量概念而建立"位置的几何学"的愿望。他的方案称为"投的代数"（the algebra of throws），实质上是在射影的基础上引进一种类似距离的概念。他在直线上任选三个点，给它指定符号0，1，∞。然后用一种几何作图法—"投"，给直线上的任意一点配上一个符号。从而给01∞线上的点配上"有理坐标"。要把无理数配给线上的点，必须引进连续性公理，施陶特未能很好地处理，给这些点指定坐标施陶特并未用距离。他的坐标虽然是通常的数记号，却只是充当点的有系统性的识别符号。所以对这种"数"的运算不能使用普通算术法则，而必须用几何作图来定义。此后，施陶特定义了四个点的交比概念。如果这四个点的坐标为x_1，x_2，x_3，x_4，则交比定义为

$$\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}\Big/\frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}$$

因而，施陶特不依靠距离和迭合的概念就得到了建立射影几何的基本工具。自然，施陶特的著作并未将射影几何学建立在现代意义上的完善的公理系统之上。他从欧氏几何体系中采用了与距离、角度等无关的一些东西，利用了平行公设，因而必须引入无穷远点，这是施陶特建立的射影几何体系的一个缺点，因为平行性不是射影不变的。

施陶特在调和集（交比为－1的四个点叫调和集）的基础上，给出了基本定义：两点束是射影相关的，如果在一一对应下调和集对应于调和集。四条共点的线构成一个调和集，若它们与任一斜截线的交点是一个调和点集。于是两个线束的射影对应也能定义。利用这些概念施陶特定义了平面到自身的直射变换为点到点、线到线的一一变换，并证明它把调和集变成调和集。

《位置的几何学》出版后，施陶特继续发展了他的思想，在其后发表的《位置的几何学论集》(Beitiäge zur Geometrie der Lage，1856—1860）中，施陶特利用实几何学的概念，引入了一维、二维和三维复射影空间，从而对综合几何学做出了重要贡献。

《形式逻辑》(Formal Logic) 英国数学家德·摩根（Auqustus De Morgan，1806—1871）著。1847年发表。这是在改造亚里士多德逻辑方面迈出的富有成效的一步。德·摩根从而被认为是逻辑代数的创始人之一。他极为多产，其中逻辑学是他最富创造性的领域。他对十九世纪的数学产生了一定的影响。

亚里士多德的逻辑二千年来一直是理性思维最重要的工具，但其不完备也是明显的，当涉及到定量时便尤其显得不充分。德·摩根举了这样一个例子：

“在一群人中，
大部分人有外套，
大部分人有背心，
所以，有些人既有外套也有背心”。

他断言，用任何通常采用的亚氏符号体系都不能证明这一真言判断。其实，在德·摩根之前，已经有一些学者试图发展亚里士多德的逻辑，笛卡儿和莱布尼茨就曾经试图设计一种一般的或抽象的推理科学，使之适用于一切领域中的推理。笛卡儿已经谨慎地开始去构造逻辑的一种代数，而莱布尼茨则有一个宏伟的方案。1666年他写成《论组合的艺术》，发表了他的计划，认为他的普遍的符号逻辑将包容代数做为它的一小部分，将其称为“代数逻辑的综合”。但可惜这一计划未能取得多少实质的进展。德·摩根在《形式逻辑》一书中采取一种较为有效的办法，目的是修正改进亚里士多德的逻辑体系。他把上述例子的关系以定量的形式给出，如果有 m 个 M，而有 a 个 M 是 A，并有 b 个 M 是 B，那么至少有 $(a+b-m)$ 个 A 是 B。他的思想的要点，即词项可以是定量的，从而可以引进更多正确的三段论式。他发明了一套符号来表示简单命题，具有某些性质的东西用大写字母 X、Y、Z 来表示，而用小写字母 x、y、z 来表示不具有这些性质的东西，如

A. 每一个 X 是 Y，表为 $X)\ Y$
E. 没有 X 是 Y，表为 $X\cdot Y$
I. 某些 X 是 Y，表为 XY
O. 某些 X 不是 Y，表为 $X:Y$

其中符号 A. E. I. O 有它们通常的亚氏意义。其后他设计出法则来建立实用逻辑推理，这些结果写成形式：

$$X)\ Y+Y)\ Z=X)\ Z$$
$$Y:X+Y\supset Z=Z:X$$

$X) \ Y+Z) \ Y=xz$

这些符号后来被布尔的更代数化的符号所取代，但它帮助德·摩根建立一些运用通常的法则得不到的推理。用布尔代数的符号，以下两个等式

$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$
$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

现今仍称为德·摩根律。德·摩根的工作对布尔的工作是有影响的，在与《形式逻辑》一书同年出版的布尔的著作《逻辑的数学分析》一书中，布尔声明，他曾受到德·摩根工作的启发。德·摩根还第一个发展了关系逻辑，他的工作，对数理逻辑的发展产生了影响。

《单复变函数的一般理论基础》（Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktion einer veränderlichen komplexen Grösse） 德国数学家黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826—1866）写于1851年的博士论文，是复变函数论的经典著作。其中给出了单值解析函数的黎曼定义，创立了黎曼面的概念，使之成为处理多值函数的有力方法，受到高斯的高度评价，为十九世纪后期复变函数论的发展开辟了道路。

1850年左右，复分析方面的发展告一段落。迅速发展起来的椭圆函数的双周期性还未得到很好的理解，超椭圆积分产生了很多麻烦，一般代数函数的积分仍然是个谜，尽管有阿贝尔定理。在黎曼之前，柯西于十九世纪前半叶为复变函数理论奠定了基础，他定义了复变函数的积分，证明了柯西积分定理，得到一系列重要结论，但有一点他并未触及，就是黎曼面概念。黎曼以他深邃的洞察力，在1851年对复变函数的理解达到了一个新的高度。在对多值函数的探讨中，他提出了关键的黎曼面概念。例如函数$W^2=Z$是多值的。事实上对于Z的每一个值，有W的两个值对应。为了研究这个函数并保持两个值集$\sqrt{Z}$和$-\sqrt{Z}$分开，即把分支分开来，黎曼给每一分支引进一个Z值平面，他还附带在每一平面上引进一个点对应于$Z=\infty$。这两个平面被看作是一个位于另一个的上方，并且在两个分支给出相同的W值的那些Z处连接起来。这样$W^2=Z$的这两叶就在$Z=0$和$Z=\infty$处连接起来。这些Z值平面就称为黎曼面。显然，如果Z在黎曼面上变动，W就变为Z的一个单值函数，从而利用黎曼面完成了多值函数的单值化。对于复杂的多值函数，黎曼面更为复杂。一个n值函数需要一个n叶黎曼面，可能有有限多支点，必须引进连结每两个支点的分支切割，在三维空间里是无法准确表示黎曼面的。黎曼面对多值函数的单值化，使得关于单值函数的定理可以推广到多值函数。黎曼明确地将黎曼面上的复变函数理解为该曲面的一个保角映射，为了理解这种映射的整体多价性，他拓扑地分析了黎曼面：一曲面T称为“单连通”的，如果每一横剖都将其分为部分；它是$(m+1)$次连通的，如果通过m次横剖它成单连通曲面T'。根据黎曼的定义，横剖线是连接一个边

界点到另一边界点的曲线，他没有包括闭切割，或者他原未在曲面上包括无穷远点。借助格林定理，黎曼证明了单连通曲面上连续可微的复变函数的积分是单叶的。

黎曼论文的分析工具是狄利克雷原理。该原理表明：在定义于域 T 上具有相同边值的连续函数 u 中，使曲面积分 $\iint|\mathrm{grad}\ u|^2 dT$ 极小化的 u 满足位势方程 $\triangle u=0$。利用狄利克雷原理，黎曼证明了他的映射定理：每一个单连通域 T（有边界），可以通过一复可微函数（保角映射）一对一地映射到一个圆内。当时狄利克雷原理的基础并不牢固，黎曼的证明也不严格。这个定理现称黎曼映射定理，它是复变函数几何理论的基础，根据此定理，对于单连通区域内的解析函数常可归化到单位圆内去研究。

黎曼的著作蕴含的丰富思想成为后世数学家许多创造工作的源泉。今天，关于黎曼面的研究是单复变函数论的基本问题之一，而且与众多的现代数学分支，如多复变函数论，复流形、代数几何、代数数论、自守函数等有着紧密的联系。该文已收入《黎曼数学全集·补遗》（Gesammelte mathematische Werke. Nachträge, 1902）中。

《关于用三角级数表示函数的可能性》（Uber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe） 德国数学家黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826—1866）著。这是1854年黎曼为取得格丁根大学讲师资格而写的论文，发表于1868年。该文对傅立叶级数的研究做出了重要贡献。

傅立叶在其著作《热的分析理论》中的工作表明，很广一类函数可以用三角级数来表示，但未解决找出函数具有收敛的傅立叶级数的确切条件的问题。狄利克雷在一篇基本论文《关于三角级数的收敛性》(1829) 中，给出了表示一个已知函数 $f(x)$ 的傅立叶级数是收敛的并且收敛到 $f(x)$ 的第一组充分条件如下：

(1) $f(x)$ 是单值、有界的；

(2) $f(x)$ 是分段连续的，即在（闭）周期内只有有限多个间断点；

(3) $f(x)$ 是分段单调的，即在一个周期内只有有限多个最大值和最小值。

黎曼的论文的目的是要找出函数 $f(x)$ 必须满足的充要条件，使在区间〔$-\pi$, π〕中的一点 x 处 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛到 $f(x)$。他曾经证明了一个基本定理：如果 $f(x)$ 在〔$-\pi$, π〕上有界且可积，则傅立叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

当 n 趋于无穷时趋于零。定理还表明，有界可积的 $f(x)$ 的傅立叶级数在〔$-\pi$, π〕中的一点 x_0 处的收敛性只依赖于 $f(x)$ 在该点邻域中的特性，但是 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛到它自身的必要而又充分的条件仍未找到。为此，黎曼开辟了一条新的研究路线，研究三角级数，但

不需要根据上述公式来确定傅立叶系数。他从级数

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \sin nx + \frac{b_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} b_n \cos nx$$

出发并定义

$A_0 = \frac{1}{2} b_0$，$A_n(x) = a_n \sin nx + b_n \cos nx$

于是上述级数等于

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)。$$

当然 $f(x)$ 只对使级数收敛的 x 值有意义。我们用 Ω 来表示级数本身，Ω 的项对一切 x 或某个 x 可以趋于零，黎曼分别讨论了这两种情形。如果 a_n 和 b_n 趋于零，则 Ω 的项对一切 x 趋于零。令 $F(x)$ 是函数

$$F(x) = c + c^1 x + A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \cdots - \frac{A_n}{n^2} \cdots,$$

它是接连对 Ω 逐项积分两次得到的。黎曼证明了 $F(x)$ 对一切 x 收敛而且关于 x 连续。他证明了关于 $F(x)$ 的一系列定理，这些定理转而导致使一个形如

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \sin nx + \frac{b_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} b_n \cos nx$$

的级数收敛到一个周期为 2π 的给定函数的必要充分条件，然后给出了上述三角级数在 x 的一个特殊值处收敛的充要条件。其次他考虑了另一种情形，即 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 依赖于 x 的情形，并给出了在 x 的特定值处级数 Ω 收敛的条件和判别法则。

此外，黎曼还在此文中最先示例表明了函数的连续性与可微性的区别。

《关于几何基础的假设》（Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen） 德国数学家黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826—1866）著。作者于 1854 年 6 月 10 日在格丁根大学为取得讲师资格所做的演说，题目是由高斯指定的。这次演说是数学史上最精采的场面之一。事后，高斯对黎曼的深刻思想做了高度评价。该文于 1868 年发表，如今已成为伟大的数学经典文献，它奠定了黎曼几何学的基础，是十九世纪最重要的数学创造之一。黎曼的方法是如此先进，即使当代数学家都可以不借助任何历史评论去研读它。

高斯在他 1827 年的重要著作《关于曲面的一般研究》中，开创了曲面内蕴几何学的研究。他的兴趣影响了黎曼。黎曼被称为几何哲学家，他的几何学研究追随了高斯。但黎曼提出的空间的几何并不只是高斯的微分几何的推广。他重新考虑了研究空间的整个途径。在哲学上他受到心理学家赫尔巴特的影响，认为一个先验的空间（如果存在的话）应该是拓扑的而不是度量的。他对任一空间发展了一种内蕴几何，认为拓扑抽象的 n 维空间是 n 维流形。在局部微分中，即当两点的对应坐标相差无穷小时，他假定距离的平方是正定二次型

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$$

其中 g_{ij} 是坐标 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 的函数，$g_{ij} = g_{ji}$，这是欧氏距离公式

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$$

的推广。如此，他提出了黎曼度量的概念。这样得到的结构如今称为

黎曼空间。它具有最短线，称为测地线。黎曼认识到距离只是加到流形上的一个结构，因此在同一流形上可以有众多的黎曼度量，从而摆脱了经典微分几何曲面论中局限于诱导度量的束缚。这是一个杰出的贡献。在该就职演说中，他提出的另一个重要的概念就是流形的曲率的概念。注意从欧氏空间中 ds^2 展示的高次诱导就可以定义 n 维黎曼空间曲率。这一曲率张量的定义是该就职演说的要旨，而消逝的曲率张量就局部地刻划了欧氏空间。欧氏空间是在每一点、每一平面方向有相同曲率的空间的特殊情形，其曲率常数可以是正的（如在球面上），也可以是负的（如在罗巴切夫斯基和波尔约的非欧几何中）。黎曼关于流形的曲率的概念是高斯关于曲面总曲率概念的推广，对于流形就是一个曲面的情形，黎曼的曲率恰是高斯的总曲率。

黎曼在完成了 n 维几何的一般研究，并说明如何引进曲率之后，进而考虑了特定的流形，对常曲率空间进行了研究。他还区分了空间的无界性和无限性。在文章的结尾指出，物理空间是一种特殊的流形，关于它的几何不能只从流形的一般概念推出来，把物理空间同其它三维流形区别开来的那些性质，只能从经验得到。特别地，欧氏几何的公理可能只是物理空间的近似写照。他相信天文学将判定哪种几何适合于物理空间。

黎曼的演说几乎不包含公式，人们对他的思想的接受是缓慢的。后来，黎曼空间成为张量分析的重要来源，许多人都扩展了这一思想。在十九世纪，黎曼空间被认为是抽象的数学理论，当时作为空间的哲学没有产生什么影响，但在演说中有更深刻的智慧，广义相对论漂亮地证实了他的工作。在黎曼的论文所发展的数学工具中，爱因斯坦发现了嵌入他的物理思想的框架。从那以来，黎曼几何学得到了蓬勃发展。今天，对于它的研究已经从局部发展到整体，产生了许多深刻的结果，在其它数学分支和现代物理学中起着重要的作用。

《四元数讲义》（Lectures on Quaternions） 英国数学家、物理学家哈密顿（William Rowan Hamilton，1805—1865）著。1853 年出版。哈密顿是四元数的发现者，他在这方面的工作主要总结在该书及他死后出版的《四元数基础》(Elements of Quaternions，1866）中。

关于四元数的发现，哈密顿自己有段描述，“1843 年 10 月 16 日，当我和哈密顿夫人步行去都柏林途中经过勃洛翰桥的时候，它们来到了人间，或者说降生了，发育成熟了。这就是说，此时此地我感到思想的电路接通了，而从中落下的火花就是 i, j, k 之间的基本方程。”这看似偶然其实是作者长期思考的结果。至少在此 15 年前哈密顿就开始研究这一问题了。早在 1828 年，哈密顿就抱怨代数基础的不稳定。当时有人提出了复数的平面表示法，如此，平面上的点就跟复数建立了一一对应关系。这促使哈密顿思考如下的问题：是否可能发现超复数与三维空间有关。如果能发现这样

的超复数，它将是空间的自然代数表示。为此他进行了不懈地努力。他写出了三维复数 $x+iy+jz$ ($i^2=j^2=-1$)，称之为三元组，其模为 $x^2+y^2+z^2$。复数的模是该复数与它的共轭复数的乘积，而模法则表明两复数模的乘积等于乘积的模。虽然对上述三元组来说，两个这种模的乘积可以表示为平方和的形式，但它是四个平方数的和，而不是三个平方数的和。这一事实可能给哈密顿以启发，转去研究四数组。他试验了 $a+ib+jc+kd$ 形式的超复数，看是否满足模法则，结果是满意的，只是需要牺牲交换律。于是立刻就有四元数的乘法律：

$$ij=k=-ji,\ jk=i=-kj,$$
$$ki=j=-ik,\ i^2=j^2=k^2=ijk=-1。$$

在哈密顿看来，四元数比空间的任何坐标表示都更基本，因为四元数运算独立于任何坐标系。但四元数并没有象哈密顿希望的那样在物理学中取得广泛的应用，物理学家们继续使用方便的笛卡儿坐标系。但对于代数来说这无疑是一个革命性的发现，它促使了代数观念的转变。一旦数学家们体会到可以构造一个有意义的，有用的"数"系，它可以不具有实数和复数的交换性，那他们就觉得可以较为自由地考虑甚至更偏离实数和复数的通常性质的构造。因而四元数成为其它非交换代数成长的温床，甚至对矩阵和向量分析的发展都有相当的影响。

哈密顿的著作篇幅冗长，创造了许多新名词，更有大段的哲学议论，异常难读。关于四元数的第一本可读性强的著作是泰特（P. G. Tait，1831—1901）的《四元数基本论文》（Elementary Treatise on Quaternions，1867）一书。

《思维规律的研究》（An Investigation of the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities）英国数学家、逻辑学家布尔（George Boole，1815—1864）著。1854年出版。布尔是符号逻辑代数的创始人之一。该书是他在逻辑学方面的重要著作。1847年布尔出版了《逻辑的数学分析》（Mathematical Analysis of Logic）一书。该书来源于当时英国数学家德摩根（A. De Morgan）和苏格兰哲学家哈密顿（Sir William Hamilton，不要与四元数的发现者、爱尔兰数学家 Sir William Rowan Hamilton 混淆）之间的一场关于数学和逻辑的关系的论争。哈密顿鄙弃数学，认为数学研究既无用且危险，没有数学家能够对逻辑学做出任何重要贡献。受此激发，布尔对逻辑进行了研究。他在《逻辑的数学分析》的前言中声明，如果按照哈密顿本人的原则，逻辑就不属于哲学。他断言，逻辑与形而上学无关，而应与数学联姻。他试图用此著作将逻辑学象几何学一样建造在可接受的公理基础之上。他坚信符号化会有利于逻辑学的严密，因而他在书中试图把概念和命题符号化，将演绎推理翻译成代数运算。这标志着现代意义上的符号逻辑的开始，迈出了从莱布尼茨和德摩根以来试图将逻

辑代数化方向上的关键的一步。

《逻辑的数学分析》行文仓促，多有疏误。几年后出版的《思维规律的研究》不仅是上一著作的扩展，而且开始将他的符号逻辑应用于概率论。他的方法是着重于类的逻辑的分析。他认识到自己创造了一个新的数学分支，一种类似于实代数但并不与之一致的代数。对这种代数的逻辑运算来说选择符号的函数的概念是基本的。如果 $f(x)$ 是含 x 的代数符号，则它必表示论域的子集。因而必须由来自 x 和 $\bar{x}$ 的元素构成。这样 $f(x)=Ax+B\bar{x}$。此处系数 A 和 B 由 x 的值取 0 和 1 确定。于是

$$f(x)=f(1)x+f(0)(1-x)。$$

这一方法用于含有二个选择符号的 $f(x, y)$ 表示，即

$$f(x, y)=f(1, 1)xy+f(1, 0)x(1-y)+f(0, 1)(1-x)y+f(0, 0)(1-x)(1-y)。$$

更一般地也可写出来。这样可用选择符号表示的逻辑问题就可化为便于解决的标准形式。在本书的 2—15 章，布尔试图把符号代数用于逻辑运算，用布尔自己的话说，本书的设计是要研究推理赖以进行的人类心智的运演的基本规律，用符号语言将其表示出来，在此基础上建立起逻辑科学并构造出它的方法，并使该方法本身成为概率的数学理论应用的一般方法的基础。

在十九世纪前叶，英国数学受到拉普拉斯的解析表示法、孔多塞（M. de Condorcet）的概率、统计的数学处理等新方法的刺激，开始注重数学的形式化和以此为基础的解释的多样性。在本书的第 16—21 章中布尔开始将其符号代数应用于概率计算。如果 $p(X)=x$ 是一事件 X 的概率，而事件 X 和 Y 相互独立，则 $P(X 和 Y)=xy$；如果 X 和 Y 互斥，则 $P(X 或 Y)=x+y$；布尔的清晰准确的符号使他能够纠正早期概率论工作中的某些失误。

“布尔代数”这一名称标志着布尔的卓越贡献。所谓类的布尔代数主要来源于《思维规律的研究》这一经典著作，它对所有数学分支的影响正日益扩大。今天，布尔代数的推广在拓扑学、射影几何学、抽象代数的结构理论、泛函分析及一般遍历理论中都有着重要的地位。罗素曾认为从此书中“发现了纯粹数学”。布尔的理论在信息的储存与加工方面也有广泛应用，对计算机科学的发展产生了深远的影响。

《数论讲义》（Vorlesungen über Zahlentheorie） 德国数学家狄利克雷（G. P. L. Dirichlet, 1805—1859）著。作者是高斯在格廷根大学的继任者，在他死后 1863 年由他的学生和朋友戴德金出版。这是继高斯的《算术研究》(1801) 之后数论史上的又一伟大经典著作。

《数论讲义》一书是研究高斯的《算术研究》的结果。高斯的《算术研究》开创了数论的新纪元，它不仅是现代数论的开端，而且完全确定了后来这一课题的发展方向。但它极为深奥难解，以致在出版后的 25 年时间里还没有人能真正读懂它。《算术研究》一书伴随着狄利克雷的一生，他一直都在研读它。库

默尔说该书不是在狄利克雷的书架上，而是经常摆在他的书桌上。狄利克雷是第一个彻底理解并阐释它的人。更重要的是他超过了高斯，得到更深刻的结果。

《数论讲义》不仅第一次给出了高斯《算术研究》的明晰的阐释，从而使高斯的思想得到广为传播，而且给出了狄利克雷自己的卓越贡献。狄利克雷是解析数论的创始人。1837 年他证明了每个算术序列 $\{a+nb\}$ (a, b 互素)，含有无穷多个素数，其中使用了现今所谓狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$ (a_n，z 为复数)。这是解析数论的第一篇重要论文，标志着解析数论的正式诞生。虽然此前欧拉自己在数论中使用了分析，雅可比用椭圆函数得到了同余论和型理论中的一些结果，但欧拉只使用了很少一点分析，而雅可比的数论结果则是他的分析研究的偶然的副产品。1839—1840 年狄利克雷又得到确定二次型类数的公式。1842 年他继续研究有理系数的二次型，试图给出当因子分解唯一时的代数数的系统理论，其中含有所谓狄利克雷抽屉原理。很明显他注意到了一般代数数域中唯一因子分解的不成立，并通过二次型的推广处理该问题。但他没能得到其后由库默尔、戴德金发展的理想的概念或克罗内克的型理论。《数论讲义》包含了狄利克雷自己的创见。全书分成五部分，共 110 小节。第一部分处理了数的可除性。第二部分研究数的同余问题。第三部分是关于二次剩余问题。第四部分中给出了二次型理论。最后研究了类数的确定问题。

《数论讲义》一书出版后多次再版，对其后数论的发展产生了深远的影响。在以后的版本中，戴德金加入了一些附录，其中包含了他自己的代数数论研究的结果，这些附录被认为是理想论产生的最重要的源泉，而理想论已成为今天代数数论的核心内容。

《置换与代数方程》(Traité des substitutions et des équations algébriques) 法国数学家若尔当(Camille Jordan，1838—1922) 著。1870 年出版于巴黎。作者是十九世纪著名数学家。在分析学中他对严格证明的要求比大多数同时代数学家都远为精确。其《分析教程》(1887)是十九世纪后期分析学的标准读本，产生了广泛影响。他在代数方面的成就更为引人注目，他是第一个为伽罗瓦理论增色的人，是当时无可争辩的群论大师。《置换与代数方程》出版后 30 年间一直被认为是群论的权威著作。他的工作吸引了克莱因和李成为他的学生。

当若尔当开始数学生涯的时候，伽罗瓦的深刻思想与结果仍很少为人理解。1860 年前克罗内克差不多是唯一一个认识到其巨大威力并成功地将该思想用于其代数研究中去的第一流数学家。若尔当是第一个沿着伽罗瓦的方向系统发展有限群论及其应用的人。在其最先的成果中主要的有合成列的概念及著名的若尔当—赫尔德定理的第一部分。他证明了任意合成列中相继群的指数组的不变性。他也是第一个研究一般线性群及有限素域上经典

群的人。他努力将其结果应用于大量问题。特别，他能确定以某些著名几何构形的参数为根的方程的伽罗瓦群的结构。此外，还研究了有限可解群。关于有限可解群的彻底分类是极为困难的，大概若尔当认识到了这点。他总是满足于制定一种算法以自动产生出给定阶数 n 的可解群。若尔当的思想产生了很多重要的新概念，例如最小正规子群等概念。1870 年若尔当将所有这些结果集中于他的《置换与代数方程》一书中。其中他第一次将置换群与伽罗瓦的方程论联系起来。所谓置换群是指置换的这样一个集合，该集合中对乘积运算是封闭的。在这本书中，若尔当建立了同构和同态的概念。《置换与代数方程》出版后，若尔当继续群论研究，其中最重要的成果当属群论中的一系列有限性定理。

《置换与代数方程》在十九世纪后期代数学的发展中产生了重要作用，而且至今仍具有现实意义。1957 年出版了该书的重印本。

《连续性与无理数》（Stetigkeit und irrationale Zahlen） 德国数学家戴德金(Richard Dedekind，1831—1916)著。1872 年发表。该论文的发表，使戴德金与康托尔、外尔斯特拉斯一起成为当时分析基础研究的领头的代表人物，他们的工作是柯西、高斯等人在这方面工作的继续。该文中的所谓“戴德金分割”成为今天分析基础中处理无理数的基本方法之一。

早在 1858 年，戴德金在苏黎世的微积分基础的讲课中就注意到算术缺少真正严格科学的基础。同年 10 月 24 日他成功地得到了一个关于连续的纯算术定义，并得到无理数概念的一种精确表述。十四年后他发表了当时思考的结果，即是《连续性与无理数》一文。该文由序言及七小节组成。他通过序理论，运用“分割”产生无理数，从而将实数追溯到了有理数。第 4 小节是文章的核心，其中他把有理数全体分为 A、A' 两组，把使 A 中各数小于 A' 中的每一数的分组称为一个分割 (A, A')，分割的交界处有时是有理数（则称为有理数产生的分割），有时就不是有理数。这样有理数全体就是有空隙的、非连续的。但如果把直线分成两部分时就不会出现这种情形，因为直线上的分割总是以直线上的一点为交界点。戴德金是把直线的这一性质作为直线的连续性公理而确认的，换句话说他把实数看成是有序的连续统，因此，他重新定义了无理数。他写道：“现在，当有一分割 (A, A') 不是由有理数产生时，每一种这样的情形，我们就产生了一个新的无理数 α，我们认为 α 是完全由这一分割决定的。我们将说该数 α 对应于这一分割，或它产生了这一分割。”如此就把由有理数作成的分割 (A, A') 所得到的每一个数叫做实数。之后，他证明了这样得到的实数是有和直线相同的连续性，并且给出了四则运算法则。最后据此提出了构筑微分、积分学基础的几个方向。

戴德金的方法已成为处理实数系统的一种经典方法。有时他也被

称为是“现代的欧多克索斯”，因为欧多克索斯曾提出一种比例论来处理无理数，但戴德金关于所有分割以及产生它们的实数存在的公设是不能在欧几里得或欧多克索斯那里发现的。因而戴德金说，仅仅欧几里得原理是不能建立一个完善的作为量的比例的实数的理论的。但另一方面，通过他的无理数理论就能产生连续域的完善模型。

《对于近来几何学研究的比较考察》（Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen） 德国数学家克莱因（F. KLein，1849—1925）于 1872 年就任埃朗根大学教授时，在埃朗根大学评议会及哲学院开学典礼上所作的就职演说。后来这次演说中陈述的重要观点以“埃朗根纲领”（Erlanger Programm）之称闻名于世。

作为那个时代领头的数学家之一，克莱因对许多数学分支做出了卓越的贡献，包括应用数学和数学物理。他在几何学中最重要的成就在于奠定非欧几何的射影基础和提出埃朗根纲领。在这篇文章中，克莱因认为“几何学尽管本质上是一个整体，可是，由于最近期间所取得的飞速发展，却被分割成为许多几乎是不相干的分科。其中每一个分科几乎都是独立地继续发展着。”于是“公开发表旨在建立几何学的这样一种内在联系的各种考虑就显得更加必要了。”因而克莱因对几何学提出了一种新的综合观点。他认为，目前所知的每一种几何都是基于某种群，都由某变换群所刻划，而每一种几何的任务乃是在于建立变换群的不变量。这样，通过扩张或限制群，我们就从一种几何过渡到另一种几何。例如，欧氏几何即是度量群的不变量的研究，而射影几何则是研究射影群的不变量的。如此，变换群的分类就给出了相应的几何学的分类。全文共分十节，在第一、二两节中叙述了基本思想，第三节以下则具体地叙述了射影变换群、点变换群、接触变换群等。克莱因区分了射影群、仿射群、等仿射群或主群。在某些情形，后一个群是前面一个的子群。带有它们不变量的射影几何、仿射几何、等仿射几何属于这些群。克莱因还设想对一一对应连续变换下具有连续逆变换的不变量进行研究，在这类变换下不变量的研究是拓扑学的课题，而拓扑学是已知的具有最一般群的几何。无疑地这在当时是一种大胆的设想。

埃朗根纲领的思想方法，支配了其后 50 年间的几何学研究。它把几何学化为统一的形式，深化了人们对几何学的认识。但是早在此纲领提出之前就已经存在着的黎曼几何学和黎曼空间的扩张等诸多空间都不包含在其中。E. 嘉当的联络几何也显示了埃朗根纲领的局限性。无论如何，埃朗根纲领的提出具有深远的历史意义。

中译文载于《数学史译文集》（上海科技出版社，1981）中。

《概念语言》（Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens） 德国数学家、

逻辑学家弗雷格（Friedrich Ludwig Gottlob Frege；1848—1925）著。1879年出版于哈雷（1964年第二版）。英译文收入《从弗雷格到哥德尔》（1967）一书中。作者弗雷格是逻辑主义的创始人之一，其工作备受罗素推崇。弗雷格终生致力于用逻辑为算术奠定严格的基础，代表作尚有《算术基础》（1884）和《算术基本规律》（1893—1903）。

弗雷格试图给出数的一个满意的定义，并给算术以严格的基础。为此，他发现普通语言无能为力，为了克服这一困难，写出了《概念语言》一书，试图提供一种完善、充足地分析与表述数学证明的有效工具。这一工具逐步发展为现代数理逻辑。而弗雷格则成为数理逻辑的创始人。所谓“概念语言”是一种表意语言，用它进行推理最易于发现隐含的前提和有漏洞的步骤。弗雷格认为算术定理可由纯逻辑规律出发证得。为了保证推理过程的绝对严格性，他特地创设了这种符号语言。意欲作为纯粹思维的公式语言。弗雷格的分析与布尔或皮亚诺的分析有着本质的不同。他们的工作并未将数学证明形式化，而只是使之更易于表达概念的逻辑结构。

弗雷格在《概念语言》中创造了许多特殊符号，其中 ├─ 为断定符号，├─ A 表示“A是一个事实”；┬└ 为条件符号，┬└ $\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}$ 表示“B蕴含A”；├┬└ $\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}$ 表示下列情形之一：（1）A、B同真；（2）A真而B假；（3）A、B同假。弗雷格用小竖杠表示否定，表明其它命题联结词“和”与“或”可用否定与蕴含表示。事实上，他是在一些公理的基础上发展了命题逻辑，其中一些公理在现代逻辑表示中保留了下来，进而依靠他引入的函数的一般概念建立了量词理论。用Φ（A）表示函数（论项多于一个时用Ψ（A、B））。普遍性表为 ├─◡a─ ，意为不管论项如何选择，Φ（a）是一个事实；存在性表为├┬─◡a─┬─Λ（a）。这样就构造了一种基本自足的逻辑演算即一阶谓词演算。应该看到，弗雷格并没有把表述纯粹思维的体系构造为一个形式体系，因而他没有提出完备性与相容性问题。弗雷格将概念语言应用于一般序列理论，在《概念语言》第Ⅲ部分中定义了先承关系，并将数学归纳法建立于其上。这一关系后来被戴德金非正式地引入数学，罗素和怀特海在《数学原理》中正式地引入了这一关系。

《概念语言》基本上构成了弗雷格在《算术基础》中给出的数的定义的基础。在《算术基础》中他批评了现有的数的理论，并首创从逻辑出发定义数。他的理论在后来的《算术基本规律》中得到扩展，他从逻辑规律出发推导出一系列算术定理。虽然没有全面开展从逻辑推出数学的研究，但明确提出了数学可

以化归为逻辑的思想。弗雷格的思想不仅对数理逻辑的发展，而且对数学哲学(如维特根斯坦的哲学)的发展产生了很大影响。

《关于由微分方程确定的曲线》（Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle） 法国数学家、数学物理学家、天体力学家庞加莱(Jules Henri Poincaré, 1854—1912) 著。发表于 1881 至 1886 年间，是同一标题下的四篇论文。它开创了庞加莱称之为微分方程定性理论的研究，这种全新的理论出于创造者之手并在创造者本人手中几乎立刻臻于完善，这是数学中少有的例子之一。

庞加莱的目的是通过考察微分方程本身而对微分方程的稳定性问题作出解答。他要寻求回答的问题，用他自己的话说是:“(由微分方程的不同解所确定的) 动点，是否描出一条闭曲线? 它是否永远逗留在平面某一部分的内部?换句话说,并且用天文学的话来说，我们要问轨道是稳定的还是不稳定的?”庞加莱从一般的方程 $dx/X=dy/Y$ 出发，其中 X、Y 是 x、y 的任意多项式，其系数是实数。他要对方程的所有解作出定性描述，这一问题与解析几何中根据曲线的方程探讨其一般形状类似,但其困难性则无法比拟。为了把握积分曲线的无穷多分支，他将 (x, y) 平面从一球心投射到球面上，如此首次在紧流形上处理一向量域的积分曲线。其出发点是考察满足条件 $X=Y=0$ 的方程的奇点，他将这些点分为“结点”“鞍点”“焦点”“中心”四类。为了考察积分曲线的形状，庞加莱引入了“横截”弧的基本概念，函数 $F(x, y)$ ($F(x, y)=c$ 对某些 c 值是横截的) 也起了重要作用。经典微分方程的例子使人们相信“一般”积分曲线将由一个方程 $\Phi(x, y)=c$ (其中 Φ 是解析的,常数 c 可取任意值) 给出。庞加莱表明这种情形只是“例外”,即当奇点中无结点和焦点时，一般情况下没有中心，只有有限的结点、鞍点或焦点。有这样一些闭积分曲线，其它的或者与这些闭曲线两奇点切触，或者是渐近的。最后他表明他的方法如何可在明显情形中用来确定将球剖分成不包含闭积分曲线的区域。前两篇论文内容是全新的。在许多新结果中庞加莱提出了无切触环和极限环这样的闭曲线。在该系列的第三篇论文中，庞加莱研究了高次方程和具有形状 $F(x, y, y')=0$ (其中 F 是 x、y、y' 的多项式) 的一阶方程的更一般情形。通过考虑曲面 $F(x, y, z)=0$,他表明该问题是在一紧代数曲面 S 上确定的向量域的积分曲线的特例。这使他立刻引入 S 的亏格作为问题的基本不变量。他发现了关系 $N+F-C=2-2P$，其中 N、F 和 C 分别是结点、焦点和鞍点数目。接着表明他从前关于球的结果可以部分地推广到一般情形。然后对 S 是环面 ($P=1$) 的情形作了细致地、漂亮地研究，它们可能无奇点；这样便出现了积分曲线的“遍历假设”,他未能证明该假设在一般情形下成立，后人证明了这点。在第四篇论文中庞加莱开创了高阶方程的定性理论，或者说开创了二维

以上流形上的积分曲线的研究。随着维数的增大，奇点的类型增多。但庞加莱看到通过引入奇点的克罗内克指标，他关于二维情形下的奇点关系式可以推广。但要获得准确的一般描述是极为困难的，庞加莱只对近于一闭积分曲线的曲线进行了研究。得到了某些类似于一阶方程所具有的结果。

《关于由微分方程确定的曲线》四篇文章均收入《庞加莱全集》(Oeuvres de Henri Poincaré, Paris, 1916—1954) 第1卷中。

《天体力学新方法》(Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste) 法国数学家、数学物理学家、天体力学家庞加莱 (Jules Henri Poincaré, 1854—1912) 著。三卷本巨著，第一卷出版于1892年，第二卷出版于1894年，最后一卷出版于1899年。这是庞加莱最著名的著作。其中载录了作者在天体力学方面的无数新结果，给出了著名的天文学中三体问题的更普遍的理论和新的研究方法。它不仅是自拉格朗日以来天体力学工作的顶峰之作，而且成为后世天体力学家和数学家工作的丰富的源泉，对数学与天文学的发展都产生了巨大的影响。

在这里要历数这本巨著中的新结果是不可能的。1885年以后，庞加莱在微分方程方面的论文大部分都有关天体力学，特别是三体问题。在近百篇论文中，他得到了无数的新结果和新技巧，所有这些都融进了《天体力学新方法》和《天文学讲义》中。1885年瑞典国王奥斯卡二世对数学家提出 n 体问题作为大奖题目，庞加莱以《论三体问题和动力学方程》(1890) 的长篇论文获奖。其中他考虑了微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \mu),$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

他用小参数 μ 的幂展开 X_i，并假定这方程组对 $\mu=0$ 有一个已知的以 T 为周期的周期解

$$x_i=\Phi_i\ (t),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

他企图寻找方程组的当 $\mu=0$ 时归化为 $\Phi_i\ (t)$ 的周期解。他首先推广了柯西关于常微分方程组的解的较早的工作，然后，庞加莱证明了他所要寻找的周期解的存在性，并寻找当其中两个物体的质量相对于第三个的质量很小（太阳系中即如此情形）时三体问题的周期解。经过假定两小质量物体围绕太阳在同一平面上的两个同心圆上运动后，便得到这样的解。如果假定 $\mu=0$ 时的轨道是椭圆，并且它们的周期是可公度的，便可以得到其它的解。利用这些解，并利用他对方程组所建立的理论，庞加莱便得到其它的周期解。他证明了有无穷多个初始位置和初始速度使得三星体相互间的距离是时间的周期函数。庞加莱对足够小的 μ 还证明了殆周期解的存在性。他发现了周期解的渐近解共有两类。在第一类中，当 t 趋于 $-\infty$ 或 $+\infty$ 时这解渐近地趋于周期解，第二类解由二重渐近解组成，也就是当 t 趋于 $-\infty$ 和 $+\infty$ 时，这种解趋于一周期解。这种二重渐近解有无穷多个。为了获得这些结果，庞加莱第一个发明了必需的一般工

具：变分方程、特征指数以及积分不变量。所有这些都总结在《天体力学新方法》中，通过他的工作，对天体力学进行了严格处理，开创了动力系统稳定性的研究，证明了著名的"庞加莱回归定理"，极大地推进了天体力学的发展。

《天体力学新方法》第一卷共七章，主要处理周期解（第三章）、一致积分的不存在（第五章）及渐近解（第七章）。第二卷共十九章，讨论了纽康姆等人的方法，批判了摄动论，指出摄动论超出某种范围就不收敛了。第三卷共十二章，详细讨论了积分不变量、二阶方程的周期解及二重渐近解等问题。

《位置分析》（Analysis situs） 法国数学家、数学物理学家、天体力学家庞加莱（Jules Henri Poincaré，1854—1912）著。是由六篇文章组成的一个系列。第一篇基本论文发表于1895年，接着是一直到1904年发表在几种期刊上的五篇长的补充。这是庞加莱在组合拓扑方面最重要的工作，其中创立了用剖分研究流形的方法，为组合拓扑学奠定了基础。直到1933年高同伦群发现之前，代数拓扑的发展完全基于庞加莱在这些著作发展的思想和技巧。

"位置分析"这一名称来自莱布尼茨。欧拉关于凸多面体的顶点数、棱数和面数关系公式以及对哥尼斯堡七桥问题的解决都涉及到了图形的组合性质。其后麦比乌斯及贝蒂等人对这一领域都作出了贡献。到十九世纪末，组合拓扑中发展得颇为完善的唯一领域是闭曲面理论。最先系统地、一般地探讨几何图形的组合理论的人是庞加莱，是他奠定了组合拓扑学的基础。连续性是庞加莱的数学工作的主旋律。每当他遇到分析中的问题时，他几乎立刻便研究当条件连续地变化时所发生的情形。1901年他写道："我遇到的每一个问题都把我引向位置分析。"他对微分方程定性理论的贡献基本上是拓扑工作。他对组合拓扑的贡献是由下述问题激发出来的：当x、y、z都是复数时，确定代表函数$f(x, y, z)=0$的四维"曲面"的结构。在1895年的基本论文中，他试图通过n维图形的解析表示来建立n维图形的理论。其后转向流形的，即黎曼曲面的推广的纯几何理论。庞加莱最后所采用的办法出现在他的第一个补充（1899）中。他研究流形所使用的是弯曲的胞腔或图形小块。我们今天所谓的单纯同调的方法完全是庞加莱的创造：流形的三角剖分概念、单纯复形概念、重心重分概念、对偶复形、复形的关联系数矩阵以及从它对贝蒂数的计算等。借助于这些工具，庞加莱发现了多面体的欧拉定理的推广（现称为欧拉—庞加莱公式）以及著名的关于流形的同调的对偶定理。在1899年的第一篇补充里庞加莱引进了挠系数的概念。在1895年的论文中，他定义了流形的基本群（也称为庞加莱群或第一同伦群，它在今天的拓扑学中起着相当重要的作用），并且给出了它与第一贝蒂数的关系。在最后一篇补充中，他给出了一个例子：两个流形具有相同的同调但有不同的基本群。此外他

给出了一个颇加限制的猜测，即每一个单连通的、闭的、能定向的三维流形同胚于三维球。这个著名的猜测曾经被推广成：每一个单连通的、闭的 n 维流形，如果具有 n 维球的贝蒂数和挠系数，它就同胚于 n 维球。这些猜测都还没有得到完全证明。另一个著名猜测叫庞加莱的主猜想。这个猜想说，如果 T_1 和 T_2 是同一个三维流形的单纯（不必是平直的）剖分，则 T_1 和 T_2 有同构的重分。这一猜想对低于三维的有限的单纯复形是成立的，但对于不低于五维的流形是错误的。其它情形尚未解决。庞加莱不仅提出并解决了许多重要问题，创造了许多新概念和新方法，而且留下了许多未解决的问题，它们至今仍然有力地影响着这门学科的发展。

《位置分析》这一系列论文都已收入《庞加莱全集》（Qeuvres de Henri Poincaré, llvols, Paris, 1916—1954）第6卷中。

《函数论论文集》（Abhandlungen aus der Funktionenlehre） 德国数学家外尔斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815—1897）著，出版于1886年。这是作者从已公开发表的论文中选出7篇而成的“自选集”，这些论文对当时的数学发展都产生过重要影响，是数学史上的重要文献。

第1篇为“一阶解析函数论”，首次发表于《柏林皇家科学院文集》(1876) 中。该文研究了解析函数的“正则区域”，其中对函数的失去正则性的点即“奇点”的研究占有重要地位。外尔斯特拉斯把函数的奇点分为“真性奇点”和“非真性奇点”，分别探讨了它们的特性。他给出的“外尔斯特拉斯定理”具有重要意义，后来经过法国数学家皮卡（E. Picard）的严格化，形成20世纪函数论的一个分支，现在虽然形式不同，但属于此范畴的研究仍在继续发展着。在第2篇中外尔斯特拉斯将米塔—列夫勒（M. G. Mittag—Leffler）所建立的一个定理修改为容易应用的形式，今天教科书中的所谓“米塔—列夫勒定理”便是由外尔斯特拉斯改写过的形式。第3篇和第4篇是“关于函数论”，它们分别发表于1880和1881年，其中导入了“一致收敛”的概念，研究了能够表为幂级数的函数在收敛圆内部、外部以及圆周上的性状。此外，在论文的末尾，他提出了关于函数的连续性与可微性的重要原则，给出了在某一区间上连续但处处不可微的函数的例子：$\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi x)$，其中 $0<a<1$，$ab>1+\frac{3}{2}\pi$，b 是奇数。这给当时的数学界以极大的震动。第5篇和第6篇是关于多元函数的研究，第5篇是首次以论文的形式发表，它是阿贝尔积分研究的基础，其中的所谓“预备定理”至关重要。第6篇发表于1876年，研究了多元周期函数。最后第7篇研究了作为无穷乘积的函数。外尔斯特拉斯的函数论研究，他的严格批判精神是数学中的重要遗产。他使函数论获得了长足的进步，对现代数学产生了深远的影响。20

世纪重要数学家外尔（H. Weyl）将外尔斯特拉斯的函数论和黎曼的函数论进行了综合，开辟了新的函数论研究的道路。

《算术原理》（Arithmetices principia, nova methodo exposita） 意大利数学家、逻辑学家皮亚诺（Giuseppe Peano，1858—1932）著。1889年出版。其中给出了自然数公理体系，使用了许多符号，对符号逻辑和数学基础研究产生了重要影响。

19世纪后期人们对数学的逻辑基础的普遍关心最终促使人们采取步骤来构造整数的基础并确立整数的性质。虽然在从事整数理论工作的人们中有少数人（如克罗内克）认为象自然数这样基本的东西，已不可能再加以逻辑分析了。戴德金在其著作《数的性质与意义》中最先给出了一个整数理论，但他的处理过于复杂，不够清晰，因而未能引起足够重视。对于整数的处理，最能适合19世纪后期的公理化倾向的，是用一组公理来引进整数的方法。皮亚诺在其《算术原理》中首先完成了这个工作。皮亚诺的创造独立于戴德金的工作，他的第一篇逻辑方面的文章是关于演绎逻辑演算的，刊于1888年的《基于格拉斯曼线性扩张论的几何演算》（Calcolo geometrico secondo l'Ausdehung-slehre di H. Grassmann）一书中，其中综合与改进了布尔等人的工作。在1889年的《算术原理》中，他不仅改进了他自己的逻辑符号体系，而且利用他的新方法去获得数学中的重要新结果。皮亚诺的新符号使得推理简明清晰，如$\in$表示属于，$\supset$表示包含，N表示自然数类，a+表示后继于a的下一个自然数。这些符号如今已被广为采用，成为标准的逻辑语言。

皮亚诺从不经定义的“类”、“后继者”、“属于”等概念出发，给出了自然数的一组公理如下：

(1) 1是自然数；

(2) 每一个自然数都有一个后继者（自然数）；

(3) a、b是自然数，若a、b的后继者相等，则a与b相等；

(4) 1不是任何自然数的后继者；

(5) 若自然数组成的类S含有1，又若当S含有任一数时，它一定含有其后继者，则S就含有全部自然数。

皮亚诺采用了关于相等的自反、对称和传递公理。他用如下的叙述来定义加法：对于每一对自然数a与b，有唯一的和$a+b$存在，使

$$a+1=a+,$$
$$a+(b+)=(a+b)+。$$

其乘法定义如下：对于每一对自然数a与b，有唯一的积$a\cdot b$存在，使

$$a\cdot 1=a$$
$$a\cdot(b+)=(a\cdot b)+a。$$

之后他便建立了人们熟知的自然数的所有性质。从自然数出发，人们不难定义整数、有理数以至实数、复数，于是数学的严格的逻辑基础便建立了起来。在这一历史发展进程中，皮亚诺的工作起了重要的作用。

1895—1908年皮亚诺出版了一部公式集，运用他创立的符号叙

述并证明了4200多条数学公式和定理。但其工作的目的并非要将数学建立在逻辑基础上。对于他来说，逻辑只是数学的仆人，虽然皮亚诺的工作给罗素以很大的影响。但他的理想与逻辑主义或形式主义都不相干。

《连分式研究》(Recherches sur les fractions continues) 荷兰数学家斯蒂尔杰斯(Thomas Jan Stieltjes, 1856—1894)著，发表于1894—1895年。该著作第一次将连分式作为复解析函数论的一部分做了一般处理，是连分式解析理论的开端，沿此方向导致了希尔伯特空间理论。斯蒂尔杰斯在这篇文章中研究了收敛性问题以及定积分与发散级数的关系，对不连续函数和发散级数给予了重视。就在这篇文章中第一次出现了后来以他的名字命名的斯蒂尔杰斯积分。

斯蒂尔杰斯研究了连分式

$$\frac{1}{a_1z+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3z+}\ \frac{1}{a_4+}\ \frac{1}{a_5z+}\cdots\frac{1}{a_{2n}+}\ \frac{1}{a_{2n+1}z+}\cdots \qquad ①$$

其中a_i是正实数而z是复变量。连分式①的收敛与发散根据逼近序列$P_n(z)/Q_n(z)$的敛散性定义。其中每一逼近是只考虑①的前n项得到的有理函数。斯蒂尔杰斯证明了

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{C_{k-1}}{Z^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\alpha_{n,k-1}}{Z^k}, \qquad ②$$

其中$\{C_k: k=1,2,\cdots n\}$只依赖于①式与n无关，公式②导致了依z的降幂将①展开的定义

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{C_{k-1}}{Z^k}, \qquad ③$$

这里C_k是正实数且

$$\frac{C_{n+1}}{C_n}<\frac{C_{n+2}}{C_{n+1}}。 \qquad ④$$

当上述比的序列无界时，③对一切Z发散，若④有界，则存在一$\lambda>0$，使③对一切满足$|Z|>\lambda$的Z收敛。之后斯蒂尔杰斯证明了后一种情况下如果多项式$Q_n(-Z)$的根依据大小排序，若最大的是$X_{n,k}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}X_{n,k}=\lambda$。他表明对一切有正实部的$Z$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{2n+1}(Z)}{Q_{2n+1}(Z)}=F_1(Z), \qquad ⑤$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{2n}(Z)}{Q_{2n}(Z)}=F(Z)。 \qquad ⑥$$

对于Z为实数($=x$)，$F(x)$和$F_1(x)$是实数，且$F_1(x)\geqslant F(x)$，等式在右半平面(包括正实轴)成立当且仅当级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$发散。$F(z)$和$F_1(z)$在右半平面是解析的。总之，斯蒂尔杰斯证明①是收敛的当且仅当$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$是发散的。否则连分式便是摆动的。余下的问题是将此法导推至左半平面上的Z(除了负实轴上的某些点)。斯蒂尔杰斯证明了极限：

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n}(z)=P(z),$$
$$\lim_{n\to\infty}P_{2n+1}(z)=P_1(z),$$
$$\lim_{n\to\infty}Q_{2n}(z)=q(z),$$
$$\lim_{n\to\infty}Q_{2n+1}(z)=q_1(z),$$

都存在。p, q, p_1, q_1都解析且$p_1(z)q(z)-p(z)q_1(z)=1$。之后，他建立了$F_1(Z)$和$F(Z)$在切开的平面上的解析性。对于$F_1(Z)$和$F(Z)$的性质的进一步详细

研究使斯蒂尔杰斯遇到了他所谓的矩量问题：即求得一个质量分布，其矩是已知的。正是为了解决矩问题，他引进了斯蒂尔杰斯积分。首先他考虑了一定义于正实轴上的递增的实值函数 φ，讨论了其单侧极限，例如他表明 φ 在 x 处是连续的，当且仅当 $\varphi^{-1}(x)=\varphi(x)$。其后他假定 φ 是一个阶梯函数($\varphi(0)=0$)，定义了积分

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)\,, \qquad ⑦$$

是 $\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]$ 当 $\max(x_{i+1}-x_i)\to 0$ 时的极限，其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\ x_{i-1}\leqslant\zeta_i\leqslant x_i$。之后他建立了⑦的分部积分公式

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)=f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)-\int_a^b \varphi(x)df(x)\,,$$

及许多积分性质，从而解决了矩量问题。斯蒂尔杰斯还提出并解决了一个反问题即已知一递增函数 $\psi(u)$，$\psi(0)=0$，那么通过使 $C_k=\int_0^\infty u^k d\varphi(x)$ 就得到类似于①的一个连分式，且有性质

$$F(x)\leqslant\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\leqslant F_1(x)。$$

斯蒂尔杰斯对连分式的研究总结和完善了此前这一科目的所有工作，是数学中的一个里程碑，他提出的积分概念发展了黎曼的积分思想，如今已成了数学中一种常用积分，在物理学中有着广泛应用。

《关于超限数理论的基础》(Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre) 德国数学家康托尔(G. Cantor，1845—1918)著。分两部分先后发表于1895和1897年的《数学年刊》上。后收入康托尔的全集中。

康托尔是集合论的创始人，他关于无穷集合的工作起源于三角级数的研究。1873年11月在给戴德金的信中他提出了实数集合是否可数的问题，同年12月7日在给戴德金的信中他声称自己成功地证明了实数集合是不可数的。那一天可认为是集合论诞生之日。1874年他发表了关于集合论的第一篇论文“关于全体实代数数的一个性质”(Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen)，证明了代数数全体是可数的，从而容易证明有不可数多个超越数。这是惊人的创举。在之后发表的一系列文章中，他发展了自己的理论。他用一一对应作为基本准则，提出了“势”的概念来区分无穷集合的大小。在证明了存在相同的势和不同的势的集合(从而区分出了无穷之间的差别)之后，他继续研究集合的势这一概念，并引进了基数与序数的理论。其中超限基数与超限序数理论是惊人的创造。在一般集合论发展中认识到对每一个集合总存在势更高的集合是根本重要性的一步，康托尔最先就是通过他的序数的理论来证实这一点的。在从1879到1884年发表的几篇具有同一标题“关于无穷的线性点集”(Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten)的文章中，康托尔发展了他的这一理论。由于康托尔的关于无穷集合的一系列革命性之作未被当时的一些重要数学家所接受，尤其它受到了

来自柏林大学的权威克罗内克的强列反对，加上长期研究工作的疲劳，康托尔一度陷入精神崩溃。从1884年他停止了数学研究工作，但1887年又重新回到数学上来。从那时起到他去世一共只发表了3篇数学文章，《关于超限数理论的基础》是最后的一篇。

《关于超限数理论的基础》在超限数理论的历史上具有决定性的意义。在这篇纲要性的著作中，康托尔重新奠定了他的超限基数与超限序数理论的基础。全文共分20节，第1节便是“势”或“基数”的概念。文章一开头康托尔便给出了他关于“集合”的著名定义，他称“集合”M为确定的个别东西m的全体。这些东西属于我们的直觉或思维，称为M的“元素”，这用符号表示即$M=\{m\}$。之后定义了“势”或“基数”的概念，康托尔写道：

“我们用M的‘势’或‘基数’称由我们的能动思维从M的各元素m的性质和其顺序中抽象出来的一般概念。”

并用$\overline{\overline{M}}$表示该双重抽象的结果，即M的基数或势。虽然现代数学中已不再使用康托尔关于基数或序数的定义，但其后的一切发展无不导源于康托尔的理论范畴。第2节中康托尔讨论了势的大小。他断定对任意两基数a、b，必有或者$a=b$，或者$a<b$，或者$a>b$成立。由此得到重要结论：“对两集合M、N，如果M等于N的一部分N_1，而N等于M的一部分M_1，则M与N相等。”〔施勒德(1896)和伯恩施坦(1898)在没有“两基数之间三种数量关系必有其一成立”的前提下都独立地证明了该结论)。第3、4节中，分别给出了势的相加与相乘，势的指数的概念。第5节讨论有限基数。第6节介绍最小的超限基数。第7到11节讨论序型。在第7节中给出了序型的定义，讨论了全序集的序型。他把序型理解为从集M的元素m中只抽取其性质而保留其顺序而得到的一般概念。之后在第8节中给出了序型的加法和乘法。第10节讨论含于超限有序集的基本序列，第11节研究了由介于0、1之间的一切实数以其自然顺序构成的线性连续统的序型θ。前11节构成文章的第一部分。文章的第二部分讨论序数。在第12节中给出了良序集的定义之后，13节讨论了良序集的“节”(Abschnitt)。第14节研究了良序集的序数。从第15节到第20节主要研究了第二数类$Z(\aleph_0)$的一些性质，包括第二数类的数(15节)，第二数类域中的势(18节)，第二数类的数的范式(19节)，第二数类的ε-数(20节)等。在第16节中证明了第二数类的势等于第二个最大的超限基数$\aleph_1$。

康托尔在该文中发展的超限数理论并不完善，也留下了许多工作，后来得到很大发展。试图完善它的努力促使了数学基础这一学科的成长。有些数学家认为他关于$\aleph$的等级的学说是雾上之雾，玄乎其玄，有的把它作为一个有趣的“病理学的情形”来谈。但康托尔提出的问题甚至比解决的问题更重要。他的这一理论不仅对数学的意义是巨大的，而且对哲学产生了深刻的影响。其

重要性不久便由于它在分析学和测度论、拓扑学等方面的重要应用而被一些卓越的数学家所认识到。今天集合论已成为现代数学的基础。

该文 1899 年出版了法文译本，英译本于 1915 年出版。

《几何基础》(Grundlagen der Geometrie) 德国数学家希尔伯特(David Hilbert，1862—1943)著。1899 年初版。该书以严格的公理化方法重新阐述了欧几里得几何学，为二十世纪数学的公理化开辟了新道路，是数学史上具有划时代意义的著作。

希尔伯特在《几何基础》中首先给出了一些不定义概念—点、线、平面、在…之间、对点重合、角的重合，并以此为基础建立几何学理论体系，这与欧几里得有着显著的区别。然后希尔伯特列举了欧氏几何的公理系统。他的公理不是希腊几何学中的“第一原理”，而只不过是为了保证几何学的无矛盾性而采取的条件。他用这些公理证明了欧氏几何的一些基本定理，其目的不仅是把众多的既知事实予以组织和整理，而且是把以公理为基础的几何学的结构本身作为问题。为此提出了公理系统的“相容性”和“独立性”，证明了他所给出的公理是独立的。

《几何基础》第一版于 1899 年出版后，受到各国学术界的重视，有多种译本出版，在希尔伯特的著作中它赢得了最多的读者。原书多次修订再版。希尔伯特在世时，该书的最后一版是第七版。至 1977 年已经出到第十二版。虽然新版本逐有增删，不断完善，但其基本内容则无大变动。正文共有七章。希尔伯特在导言中声明本书的目的是“从新尝试着来替几何建立一个完备的、而又尽可能简单的公理系统；要根据这个系统推证最重要的几何定理，同时还要使我们的推证能明显地表出各类公理的含义和个别公理的推论的含义”。为此在第一章中提出五组公理。第一组为关联公理，共 8 条，其中规定了最基本的概念“属于”；第二组为顺序公理，共 4 条，展开了“介于”这一概念；第三组是合同公理共 5 条，其目的是写出合同关系的这样一些性质，它们要足以纯逻辑地推导出牵涉合同关系的全部定理，其中前三条公理是关于线段的合同的，第四条是关于角的合同的，第五条则用来确定线段的合同和角的合同之间的关系；第四组只包含唯一的一个平行公理(即欧几里得公理)；第五组为连续公理，共 2 条(第一版中只有叫做度量公理或阿基米德公理的一条，后来又引进一个完备公理)。第二章论述了公理的相容性和相互独立性。第三章、第四章分别为比例论和平面中的面积论，属于非阿基米德的度量几何学。第三章的目的在于引入线段相比的概念，特别在于建立非阿基米德几何里的相似形理论。在第四章里则建立了非阿基米德的面积理论。第五、六两章分别讲述德扎格定理和帕斯卡定理，属于非阿基米德的射影几何。第五章里首先要解决的问题是：在非阿基米德的射影几何里引进坐标系以至一般地引进解析几何的方法，其目的是在平面

上建立解析几何。第六章对上一章的问题作了进一步的探讨，证明了没有阿基米德公理，要证明帕斯卡定理是不可能的。第七章介绍根据第Ⅰ—Ⅳ组公理的几何作图，属于非阿基米德的作图理论。

《几何基础》一书有中译本（江泽涵、朱鼎勋译，科学出版社，1987，第二版，根据德文第十二版译出）。

《数学问题》(Mathematische Probleme) 德国数学家希尔伯特(David Hilbert, 1862—1943) 1900年在巴黎第二届国际数学家大会上所作的著名演讲。其中阐述了问题在数学发展中的重要意义、数学问题产生的源泉、对问题解答的一般要求及解决数学问题的方法，反映了希尔伯特对数学问题的深刻认识。尤为重要的是他根据19世纪数学发展的现状提出了23个当时尚未解决的重要问题。20世纪数学发展证明，这些问题涉及现代数学的许多重要领域，成为20世纪数学家兴趣的中心。数学家经常通过检验当时希尔伯特问题解决的程度来衡量他们所取得的进步。它对20世纪数学的发展产生了深远影响。这23个问题是：

1. 康托尔的连续统基数问题。1963年获得解决。科恩证明：连续统假设的真伪在策梅洛—弗伦克尔公理系统内无法判明。希尔伯特提到的良序问题由策梅洛完成。

2. 算术公理的相容性。希尔伯特的设想后来发展为系统的"希尔伯特"计划("元数学"或"证明论")。1931年哥德尔的"不完备性定理"指出了用"元数学"证明算术公理相容性之不可能。

3. 只根据合同公理证明两个等高等底的四面体体积之相等是不可能的。希尔伯特的学生德恩1900年便给出了该问题的证明。

4. 直线作为两点间最短距离问题。该问题太笼统。许多数学家在构造和探讨各种特殊度量几何方面有很大进展，但问题并未完全解决。

5. 不要定义群的函数的可微性假设的李的连续变换群概念。1952年解决。格利森、蒙哥马利及齐平等人给出了肯定解答。

6. 物理公理的数学处理。公理化物理学的一般意义不明确。在量子力学等部门，公理化方法已经取得很大成功。希尔伯特首先提到的概率论的公理化已由柯尔莫哥洛夫1933年完成。

7. 某些数的无理性与超越性。从西格尔(1921)、盖尔丰德(1929)到贝克(1966—1969)这类问题得到成功的处理。

8. 素数问题。黎曼猜想仍未解决。哥德巴赫猜想亦未解决，目前最好结果属于陈景润(1966)。

9. 任意数域中最一般的互反律之证明。已由高木贞治(1921)和阿廷(1927)解决。

10. 丢番图方程可解性的判别。1969年马季亚谢维奇证明希尔伯特所期望的一般算法是不存在的。

11. 系数为任意代数数的二次型。哈塞(1929)和西格尔(1936，1951)获得了重要结果。

12. 阿贝尔域上的克罗内克定理推广到任意代数有理域。这方面已有很多工作，但问题远未解决。

13. 不可能用仅有两个变数的函数解一般的七次方程。要求连续函数情形已由阿诺尔德(1957)解决。解析函数情形仍未解决。

14. 证明某类完全函数系的有限性。1958年永田雅宜给出了否定解答。

15. 舒伯特计数演算的严格基础。代数几何的基础已由范·德·瓦尔登(1938—1940)和韦伊(1950)建立,但舒伯特演算的合理性仍未解决。

16. 代数曲线与曲面的拓扑。结果仍然很零散。

17. 正定形式的平方表示式。已由阿廷于1926年解决。

18. 由全等多面体构造空间。比贝尔巴赫(1910)等解决了问题的一部分。

19. 正则变分问题的解是否一定解析。取得一些特殊结果。

20. 一般边值问题。

21. 具有给定单值群的线性微分方程的存在性。已由希尔伯特本人解决(1905)。

22. 解析关系的单值化。曲线的情形由克贝解决(1907)。

23. 变分法进一步发展。希尔伯特本人和许多其它数学家对变分法的发展做出了重要贡献。

《数学问题》全文中译文刊于《数学史译文集》(上海科学技术出版社,1981)。

数学学科史

集合论(Set theory) 数学的一个基本的分支学科,研究对象是一般集合。集合论在数学中占有一个独特的地位,它的基本概念已渗透到数学的所有领域。按现代数学观点,数学各分支的研究对象或者本身是带有某种特定结构的集合如群、环、拓扑空间,或者是可以通过集合来定义的(如自然数、实数、函数)。从这个意义上说,集合论可以说是整个现代数学的基础,至多范畴论除外。

集合论是G·康托尔于19世纪末创立的。20世纪初对集合论的严格处理产生了公理集合论,由于对它的研究广泛采用了数理逻辑工具,集合论(公理集合论)又逐渐成为数理逻辑的一个分支,并从60年代以来获得迅速的发展。

集合论是在分析数学的研究中产生的:直接产生于三角级数的研究工作中。1854年黎曼提出,如果函数$f(x)$在某个区间内除间断点以外所有点上都能展开为收敛于函数值的三角级数,那么这样的三角级数是否唯一?但他没有回答。1870年海涅证明:当$f(x)$连续,且它的三角级数展开式一致收敛时,展开式是唯一的。进一步的问题是:什么样的例外的点(间断点)不影响这种唯一性!表述这些例外的点的整体的需要,产生了点集的概念,康托尔引入了直线上的一些点集拓扑概念,探讨了前人从未碰到过的结构复杂的实数点集。这是集合论的开端。

1874年,康托尔越过"数集"的限制,开始一般地提出"集合"的概念。他给集合下了这样一个定义:把若干确定的有区别的(具体的或抽象的)事物合并起来,看作一个整体,就称为一个集合,其中各事物称为该集合的元素,也说它属于该集合。有了集合概念,就可以定义出一系列有关的概念,集合论就产生了。

从本质上看,集合论是关于无穷集合和超穷数的数学理论。康托尔创立集合论的卓越贡献之一就是把实无穷引入数学。他把适用于有穷集的不用计数而判定两集合大小的一一对应准则推广到无穷集,此后一一对应方法成为典型的集合论方法。元素间能建立一一对应的集合称为等势,康托尔指出,无穷集的特征就是它可与自己的一个真子集等势。他称与全体自然数N等势的集合为可数集,1873年,他采用了著名的对角线法,证明了全体实数的集合R不是可数集,因此,无穷集也是有差别的。1878年,他引入了"集合的势"后又称为基数的概念,它既适用于无穷集也适用于有穷集,是"个数"概念的推广。康托尔把势定义为等势集合类共性的抽象,后来弗雷格与罗素改为等势类本身。1883年,康托尔应用对角线

法证明了康托尔定理：一个集合 S 与它的幂集间 $p(s)$ 不可能建立一一对应，$\overline{\overline{P(s)}}\geqslant\bar{\bar{s}}$。这样，说明了在无穷集之间还存在着无穷多个层次。

1883 年康托尔开始研究有序集，特别是其中的良序集，他引入了序数概念来刻划良序集的结构。序数可以比较大小，而且任一序数之后，恰有一个在大小顺序上紧紧尾随的序数。因此，后来康托尔给出了序数的一种系统的表示法，相当于十进制之用于自然数。利用序数可以把良序集编号，并把数学归纳法推广到自然数以外去（见超限归纳法）。序数的研究加深了对基数的理解，1904 年策梅罗证明了任一集合都可以良序化（良序定理），将基数等同于一个序数，这就解决了基数比较大小的问题。同序数一样，任一基数之后，甚至任一基数集之后，恰好有一个在大小顺序上紧紧尾随的基数。因此可将所有超限基数按序数来编序，这就是所谓阿列夫的谱系 $\aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \cdots$（其中 $\aleph_0$ 是最小无穷集可数集的基数，ω 是自然数集的序数），它可以无限延伸下去。超限序数和超限基数一起刻划了无穷。它们所以还称为数，是因为它们都有自己的算术。

集合论之前的数学界只承认潜无限，集合论则引入了实无限，自然数不是一个一个地潜在地向无限变化，而是“一下子”以完成的姿态呈现在人们面前。用超限基数和超限序数刻划的无穷集，都是实无限。因而一开始并不被数学界所完全接受。但是后来，从非欧几何的产生开始的对数学无矛盾性（相对无矛盾性）的证明把整个数学解释为集合论（见证明论、数学基础），集合论成了数学无矛盾性的基础，集合论在数学中的基础理论地位就逐渐确立起来。

19 世纪末 20 世纪初，人们发现了一系列集合论悖论（见悖论），表明集合论是不协调的，这使得人们对数学推理的正确性和结论的真理性产生了怀疑，触发了第三次数学危机。为了克服悖论所带来的困难，人们开始对集合论进行改造，即对康托的集合定义加以限制，“从现有的集合论成果出发，反求足以建立这一数学分支的原则。这些原则必须足够狭窄，以保证排除一切矛盾；另一方面又必须充分广阔，使康托尔集合论中一切有价值的内容得以保存下来”（策梅罗语）。那就是集合论公理化方案。1908 年，策梅罗提出第一个公理集合论体系，后经弗伦克尔和斯科朗的改进，称为 *ZF* 系统。*ZF* 集合论承袭了康托尔集合论的全部成果，凡数学所需的一切有关集合运算、关系、映射的结果以及全部基数、序数的理论全都可以从 *ZF* 公理系统中演绎出来。*ZF* 集合论又排除了康托尔集合论中可能出现的悖论。因此，在很大程度上弥补了康托尔集合论（与公理集合论相比较，人们把康托尔集合论称为朴素集合论）。当然，由于哥德尔第二不完全性定理，*ZF* 系统作为包括自然数理论的一阶形式系统是不可能在其内部解决本身的无矛盾性问题的。这是一切这类系统的固有性质。

集合论的公理系统除 *ZF* 系统

外还有多种，其中最常用的要算1925—1937年间形成的冯·诺伊曼、伯奈斯、哥德尔提出并完善的公理系统，称为*NBG*系统。已经证明，如果*ZF*公理系统是无矛盾的则*NBG*公理系统也是无矛盾的（而且后者是前者的一个保守的扩张）。见公理集合论。

虽然证明整个公理系统的无矛盾性已无意义，但关于公理系统中某一个别公理或某一假设的相对无矛盾性和相对独立性仍是重要的课题，其中选择公理与连续统假设有重要的地位，是集合论中长期研究的课题：选择公理（*AC*）成为数学史上继平行公理之后最有争议的公理，包括*AC*的公理系统记为*ZFC*，以区别不包括*AC*的*ZF*系统。连续统假设（*CH*）是1878年康托尔提出来的，简单地说，就是关于直线上有多少点的问题，康托尔猜测实数集合的任一不可数子集合与实数集合等价。这一假设的证明至今没有完全得到解决，它已成为数学史上与费马猜想、黎曼猜想齐名的一大难题。

近40年来在*AC*和*CH*研究方面取得不少进展。1938年，哥德尔证明了：从*ZF*推不出*AC*的否定，从*ZFC*推不出*CH*的否定，即*AC*对于*ZF*，*CH*对于*ZFC*是相对无矛盾的。1963年，科恩创立著名的力迫方法，证明了*AC*对于*ZF*，*CH*对于*ZFC*的相对独立性，即从*ZF*推不出*AC*，从*ZFC*推不出*CH*。综合这两个的成果，得出：*AC*在*ZF*中，*CH*在*ZFC*中都是不可判定的。这是20世纪最大的数学成果之一。科恩的力迫方法成为集合论的有力工具，此后20多年中，人们一方面推广和改进科恩的力迫法，提出诸如迭代力迫、真力迫等新概念和新方法；一方面则将这些方法应用于具体的数学领域，如拓扑学中，以证明该领域中的某些命题是不可判定的。此外大基数问题、无穷组合论问题的研究亦有很大进展，70年代以来，决定性公理的研究与它们交织在一起，有新的发展。同时，人们还在寻找迄今尚未发现的与其他公理无矛盾的可信赖的新的公理（*CH*或它的任一具体的否定都不具备这种资格），以期在更有效的途径上来解决连续统问题，这方面的工作成为集合论当前研究的主流。

悖论（Paradox） 如果某一理论的公理和推理原则看上去是合理的，但在这个理论中却推出了两个互相矛盾的命题，或者证明了这样一个复合命题，它表现为两个互相矛盾的命题的等价式，那么，就说这个理论包含了一个悖论。所谓互相矛盾的命题，指的是推出了一个命题和它的否定。所谓矛盾命题的等价式，指的是如果承认一个命题，就可推出它的否定；反之，如果承认这个命题的否定，就可推出这个命题。

公元前6世纪，克里特岛的哲学家发现的“说谎者悖论”可以算作人们最早发现的悖论，实际上它还不是上述意义下的严格的悖论。它的原始命题是：一个克里特人说：“所有的克里特人所说的每一句话都是谎话。”试问这句话的真假。如果这句话是真话，则因为这句话也出自一个克里特人之口，所以按此

话的论断可推知这句话为假。即由这句话的真可推出它的否定。但反过来，如果这句话为假却不足以推出它为真，只能推出：至少有一个克里特人说过一句真话，不能推出全称的原始命题为真。因此不是严格意义的悖论。其实古人也早就发现了这一点，并对其进行修改。最早是公元前4世纪的欧布里德把原始命题改述为："现在我说的是一句假话"这就是所谓"强化了的说谎者悖论"。在此基础上，人们构造了一个与之等价的"永恒的说谎者悖论"，表述为

在本页这两行里所印的这句话是谎话。

由于上两行中只有这一句话，所以设这句话为真，则要承认它的断言，从而推出该话为假。如设该话为假，则应肯定它的否定为真，即"这句话"不是谎话，所以该话为真。

悖论之所以引起现代数学界和逻辑学界的极大注意，是由于19世纪末20世纪初，在集合论中发现了3个著名的悖论，引起了当时数学界、逻辑学界以至于哲学界的震惊，触发了第三次数学"危机"。

1897年，布拉利—福尔蒂提出一个悖论：设 W 为一切序数所组成的集合。因为 W 按自然大小顺序成一良序集，故 W 有一序数 Ω。由序数性质，Ω 必比 W 中任一序数都大，但由定义，Ω 也出现在 W 中，从而将有 $\Omega>\Omega$，这是矛盾的。即推出互相矛盾的命题，所以是悖论。后来就称为布拉利—福尔蒂悖论，也叫最大序数悖论。

1899年，康托尔发表一个悖论：设 S 为一切集合所组成的集合。考虑 S 的基数 $\overline{S}$，因为任何集合都是 S 的子集，故不存在其基数大于 $\overline{S}$ 的集合，但由康托尔定理可知，S 的幂集（即由 S 的所有子集构成的集合）$P(S)$ 的基数 $\overline{\overline{P(S)}}$ 大于 $\overline{S}$，即推出了互相矛盾的命题。这一悖论后来称为最大基数悖论，亦称为康托尔悖论。

1903年，罗素发表了一个悖论：根据排中律，一个客体或者属于某个集合，或者不属于某个集合。因此，对一个给定的集合，问它是不是自身的分子，即问是否属于它自己，看来是有意义的。如果把一个集合 S 定义为：S 是由一切不是自身分子的集合所组成，即任一集合 a，a 属于 S 当且仅当 a 不属于 a。这必然要涉及到 S 是否属于 S 的问题。如果 S 属于 S，根据 S 的定义，S 就不属于 S；反之，如果 S 不属于 S，同样根据定义，S 就是属于 S，即 S 属于 S 当且仅当 S 不属于 S。即推出了两个互相矛盾的命题的等价式。这个悖论就称为罗素悖论。

继发现集合论中的几个著名悖论后，人们又发现了一些不在集合论范围的悖论。

1905年，理查德提出一个悖论，1906年贝瑞将其表述为一种较简单的形式。试考虑："用至多一百个字母所不能表述的正整数中最小的一个"（The least positive integer which can not be described in at most a hundred letters），但这一短语本身就是对于这个数的一种表述，而它只用了68个字母，矛盾。后来称之为理查德悖论。

1908年，格里林提出了一个悖论：一个形容词称为是“非自状的”，如果它并不具有自身所表示的性质。例如“红的”或“英文的”这两个形容词就是非自状的，因为它们并不具有各自所表示的性质；而“黑的”或“中文的”这两个形容词则是自状的，因为它们本身也是黑的或中文的。那么，“非自状的”这一形容词是否是非自状的呢？显然，它是非自状的，当且仅当，它不是非自状的。推出了矛盾命题的等价式。这一悖论后来被称为格里林悖论。

英国数学家拉姆齐在1926年提出把悖论分成逻辑悖论和语义悖论两种。前者又称为语法悖论，包括前述3个集合论悖论；后者也称为认识论悖论，包括前述说谎者悖论、理查德悖论和格里林悖论等。但是随着语义学的发展，真实性概念可以用集合论概念精确定义，因而，两类悖论之间的差别也不是绝对的。

悖论问题对数学基础、数理逻辑和数学哲学的发展都产生了巨大的影响并在它们的发展中不断得到日益深入的研究。

数理逻辑（**Mathematical logic**） 数学的一个分支，用数学方法研究的逻辑或形式逻辑。所谓数学方法就是指数学采用的一般方法，包括使用符号和公式，使用已有的数学成果和方法，特别是使用形式的公理方法(见公理法)。又称为符号逻辑、理论逻辑或逻辑斯蒂。

用数学方法研究逻辑的系统的思想肇源于莱布尼茨而萌芽于亚里士多德。亚里士多德最早从形式结构来论述演绎推理，由他开始了形式逻辑的古典阶段。古典形式逻辑包括几种常见的演绎推理和最简单的量词理论，也使用一些特有符号，但没有探讨关系逻辑和公理系统的逻辑性质，从莱布尼茨起开始了数理逻辑的发展，它包含着古典形式逻辑而突破其局限性。一方面联系着数学的实际，另方面又适应了其他科学的需要，在近百年间取得了突飞猛进的发展。

数理逻辑的发展可分为三个阶段。

1. 开端。数理逻辑开始于19世纪后期。当时古典形式逻辑的不足之处已为某些逻辑学者所理解，数学方法对认识自然和发展科学技术的重要作用已开始显示出来。人们感到演绎推理和数学计算有相似之处，希望能把数学方法应用于思维领域。17世纪末德国哲学家莱布尼茨首先明确地提出了数理逻辑的思想。他设想能建立一“普遍的符号语言”，这种语言包含着“思想的字母”，每一基本概念应由一表意符号来表示。一种完善的符号语言又应是一个“思维的演算”，他设想，论辩和争论可以用演算来解决。这种符号语言和思维演算正是现代数理逻辑的特征。他为实现这些设想做了不少工作，如成功地将古典逻辑的四个简单命题表达为符号公式等。18世纪前后，许多人继续了莱布尼茨的工作，但没有重要进展。19世纪中叶，英国的布尔和德·摩根突破了这种局面。布尔的贡献是在逻辑史上首先提出了一个尽管还有缺点的逻辑演算——布尔代数(1854年)，德·摩根的贡献则是，突破了

古典型式逻辑的“一主项一谓项”的局限，提出了关系逻辑，为后人的探讨开辟了新路。

2. 奠基。19世纪初以来，人们在积累了大量实践经验并进行理论总结后，感到数学科学单凭几何或物理直观以及一些有效应用是不足的，进而要求数学论证具有严谨性和系统性，对数学基本理论、证明方法和数学性质做了深入的探讨。70年代开始出现对数理逻辑有重要意义的进展，主要有：集合论、抽象的和形式的公理方法和初步自足的逻辑演算。70年代康托尔创立集合论，肯定了实无穷即已经完成了的无穷集的存在，并且使用了超穷方法（见集合论）；19世纪中叶，人们建立了抽象的公理体系，19世纪末，希尔伯特建立了形式的公理体系，其中，公理不仅反映系统的逻辑结构，也限制着可能的解释或模型（见公理法）；逻辑演算则是一种公理体系，其中的定理都是逻辑规律特别是推理形式，19世纪70年代弗雷格首先建立了一个完全的逻辑演算体系，其后皮亚诺为此作了不少工作，最后由罗素和怀特海完成了建立一个初步自足的完全的外延逻辑系统的工作。

20世纪初期，集合论、公理法和逻辑演算这三个方面都继续发展，同时与集合论悖论有关，也引起了一系列争论，特别是关于数学基础的争论，有力地促进了数理逻辑的奠基工作。当时争论的重点在于：有没有和如何认识实无穷？什么是数学的存在？数学应建筑在什么基础之上？围绕这些问题，产生了数学基础的各个学派，各学派的工作都促进了数理逻辑的发展（见数学基础），特别是希尔伯特的工作有较大的影响。

数学系统的无矛盾性的证明是重要的基础问题，一般用解释（求模型）方法来处理，但集合论或数学分析不能再在其他理论得到模型，因而必须在解释法之外设法证明它们的无矛盾性，为此希尔伯特提出一个方案：将包含实无穷的数学理论组成一个完全形式化的公理系统，用（不假定实无穷的）有穷方法来研究此公理系统内的证明，如能断定此种证明不会导致逻辑矛盾，则此系统的无矛盾性得证。证明无矛盾性必须考察一个理论里可能写出的推导或证明，因而称为证明论。证明论要求将一个数学理论和其中推导所用的逻辑演算综合在一起组成一个完全形式化的公理系统（形式系统）。这样，系统中的证明才能严格定义，并且一个公式序列是否为一证明也可以根据一定的机械方式以有穷步骤能行地判定。实无穷为引起无矛盾性问题的原因之一，古典逻辑演算也假定了实无穷，因而在论证古典数学无矛盾性时，不能再用以实无穷为前提的思想方法，只能用有穷方法，否则就是循环论证。有穷方法的特征是，每一步只考虑确定的有穷数量的对象，承认潜无穷，而不处理任何已完成的包括无穷对象的整体。逻辑的全称命题表达一条规律，此规律对于每一给定对象必须能得到判定。由于研究形式系统需要用数论，递归算术恰好就是不假定实无穷的初等数论。这

样建立起来的逻辑和数论称为"元数学"。

3. 过渡。希尔伯特方案反映了30年代以前数学基础的争议,目的是用有穷方法研究包括逻辑和古典数学的形式系统的元逻辑性质,特别是无矛盾性问题。在1928—1936年间主要通过哥德尔的工作,得到了几个最重要的基础理论问题的解答。在方法论方面数学地精确地描述了直观的机械过程,推动了递归函数论的研究,为数理逻辑发展的第三阶段准备了条件。1928年希尔伯特等把一阶逻辑分离出来并证明其无矛盾性,同年还提出逻辑演算的完全性问题。1930年哥德尔证明了一阶谓词系统的完全性:一阶谓词演算的有效公式皆可证。1931年,哥德尔又证明了两个著名的不完全性定理:①一个包括初等数论和一阶逻辑的形式系统 S,如果是无矛盾的,那么就是不完全的。②如果一个包括初等数论的形式系统是无矛盾的,则其无矛盾性不能在此系统中得到证明,当然也不能用有穷方法证明。这两个定理给希尔伯特方案以巨大的冲击,希尔伯特等人则放宽有穷方法的要求,允许使用超穷归纳法作为元数学工具,1936年,根岑用此法证明了纯粹数论系统的无矛盾性。

有穷方法是一种"能行性"方法,能行方法可以说是机械的过程,也就是根据预先给定的规则用有穷步骤可以完成的方法。"预先给定的规则"和"机械过程"都是直观概念,必须加以精确的数学定义才行。1934年,哥德尔提出用一般递归作为能行性的定义,同一时期,丘奇、克利、图林等人又先后给出几个相互等价的定义,它们都成为能行可计算性或机械程序的数学描述(见算法)。所有这些工作都澄清了第二阶段(奠基阶段)提出的问题,为数理逻辑的进一步发展打下坚实的基础。这些工作使逻辑部分地转化为数学分支,推动数理逻辑进入新的发展阶段。

4. 第三阶段。30年代后期至今为数理逻辑发展的第三阶段。证明论尽管未达到预期的目的,元数学却取得许多成果,数理逻辑成为数学的分支学科。目前其中心内容有五大分支:证明论、公理系合论、递归论、模型论和各种逻辑系统的研究。前四个分支各有其中心课题,近年来都有较大的发展。最后一个分支的方向是用古典演算的元逻辑方法处理各种非经典逻辑系统,如模态逻辑、多值逻辑、时态逻辑、模糊逻辑等。现在,它们亦有较大的发展。此外,数理逻辑与理论计算机科学有深刻的联系,有关程序语言和计算性理论的研究正在得到飞速的发展。

证明论(Proof theory) 数理逻辑的一个分支,以数学证明为研究对象的数学理论。

对数学证明的研究可追溯到古希腊亚里士多德,他在《工具论》一书中的《后分析篇》中就讨论了有关证明的问题,并且他是以古希腊时数学中所用到的证明作为研究对象的。

现代证明论则产生于对数学的无矛盾性的证明。数学中使用反证

法时需要肯定数学的无矛盾性。在证明欧几里得平行公设的独立性时，又需要肯定使用新公设的非欧几何的无矛盾性，这便要求人们对数学的一部分(非欧几何)的无矛盾性作出严格的探讨与证明。这种无矛盾性的证明起初是靠解释方法获得的，即把非欧几何的无矛盾性解释为欧几里得几何的无矛盾性，然后依次解释为实数论的无矛盾性、自然数论的无矛盾性，最后解释为集合论的无矛盾性。这是所谓相对无矛盾性的证明。但是，集合论悖论的发现，表明了未经改造的朴素集合论是有矛盾的。公理化的集合论虽然排除了已发现的悖论，但还不能保证数学理论里不再出现矛盾，而集合论的无矛盾性问题又不能化归于其他数学理论。同时，希尔伯特认为在物理世界里找不到集合论的模型。为了证明数学的无矛盾性，他于 20 世纪 20 年代提出了著名的希尔伯特方案，由此产生了证明论。

证明论的基本方法是：把所探讨的理论系统完全形式化，作为研究对象，叫做对象理论。对象理论被当作没有内容的，只是根据一定语法规则由一些被称为字母的基本符号组成的一些符号序列，它们依据一定的变形规则而变化。如果能够导出 A 和 $\neg A$(非 A)两个符号序列，指经过解释后表示互相矛盾的两个命题，则说这个理论是矛盾的；如果无论怎样变形都不能得出这种符号序列，便说这理论是无矛盾的。证明论的目的是探讨怎样的理论是无矛盾的，怎样的理论是矛盾的，尤其要证明，数学作为对象理论是协调的。证明论还涉及一种被称为元理论的理论，它必须是有内容、有意义的。这样，证明论有 3 种理论，它们是：①希望证明其无矛盾性的那个没有形式化的直观的理论。它是有意义有内容的。它不是对象理论，只是对象理论的来源。②对象理论。它是通过把所研究的理论完全形式化而得到的。它被当作没有内容意义的，只是对一些符号序列作各式各样的变形，是研究的对象。③元理论。它是有内容意义的，是用来研究对象理论的，它应尽可能地简单明了，使得人们至少相信它是无矛盾的。为了保证这一点，要求采用有穷方法。1924 年，德国数学家阿克曼证明：如对数学归纳法作一些限制，自然数是无矛盾的。

1931 年，哥德尔的不完全性定理表明有穷方法的不可能，这个定理是证明论的一大成就。这以后，人们降低了有穷性的要求，1936 年，根岑用超限归纳法证明了算术的无矛盾性，60 年代以来又有人证明了数学分析的某些片断的无矛盾性。克赖泽尔等人从 60 年代以来，开始了关于证明的结构及复杂度等问题的研究。1977 年以来，帕里斯等人发现了算术中自然的不可判定的命题。证明论有了更深入的发展。

不完全性定理 (**incompleteness theorem**) 证明论中的一条重要定理。由哥德尔于 1931 年证明，是数理逻辑发展史上的一个极为重要的定理。

设有一个以皮亚诺自然数论为其子系统的不自相矛盾的(即自身协调的)形式系统，暂记为 U；在形

式系统中凡不含自由变元的公式叫做语句；如果语句 A 和 $\neg A$（非 A）在某形式系统内均不可证，则 A 就叫做该形式系统的不可判定语句。不完全性定理说，任何一个上述的系统 U 都必有一个不可判定语句 A。依据排中律，A 和 $\neg A$ 之间必有一个是真语句，故不完全性定理可改为：任何一个上述系统 U 都必有一个真语句是不能推出的。如果一个系统对任何语句 A 都能推出 A 或推出 $\neg A$，则这个系统叫做完全系统，这样不完全性定理又可改述为：任何一个上述的系统 U 必是不完全的。

在证明不完全性定理时，主要使用了算术化方法。由其证明过程，还推出了这样的结果：如果包含皮亚诺自然数论为子系统的形式系统 U 是无矛盾的，则表示"U 是无矛盾的"这一事实的算术公式是不可能在系统 U 内证明，这个结果叫做第二不完全性定理。也是证明论中的重要结果。

哥德尔证明的"系统 U 中的语句 A 是不可判定的"是一个算术命题，但不是自然的算术命题。即哥德尔对不完全定理的证明是一个语法证明。算术中第一个自然的不可判定的命题是 1977 年帕里斯和哈林顿证明的，即给出不完全定理的一个语义证明。这是一个重要的成果。

希尔伯特方案（Hilbert's program） 希尔伯特在 20 世纪 20 年代提出的用以证明数学的无矛盾性的一个特定的方案。首先，数学中在使用反证法时需要先肯定数学的无矛盾性；更重要的是，从非欧几何开始的对数学无矛盾性的证明由集合论悖论的发现而遇到极大的困难，数学的严谨性、数学方法的可信性受到了巨大的冲击，引起了"第三次数学'危机'"。这种情况下，希尔伯特希望能直接证明数学的无矛盾性，于是提出这一有名的方案。其基本内容是：

1. 将所要讨论的古典数学理论 T（有内容的）（如数论）公理化，把所得到的公理化理论和所用的逻辑彻底地形式化，使得 T 能表成一些形式符号和符号序列（无内容的）组成的系统，记为 T_F，T_F 形式地摹写了 T 中的现实命题和理想命题及其关系。T_F 称为 T 的形式理论（如形式数论），T_F 是作为一种独立结构而存在的，通过对形式理论 T_F 的无矛盾性的研究来建立原来的古典理论 T 的无矛盾性。

2. 由于研究形式理论 T_F 时需要用到逻辑和数论，希尔伯特建议采用有穷方法来建立一个逻辑系统和初等数论 T_m，从而避免循环论证（见数理逻辑），希尔伯特称之为元数学。用 T_m 来讨论 T_F 的无矛盾性，T_m 中的符号和公式是有内容的，对 T_F 的讨论采用构造的方法，不得涉及实无穷。

3. 用元数学 T_m 来证明在形式理论 T_F 中，不会有某个论断 A 与其否定 $\neg A$ 同时可以推出，也就是证明形式理论 T_F 的协调性，也就保证了 T_F 所代表的 T 不会产生矛盾。

注意这里区分了三种数学理论：①古典（即普通）数学理论 T，T 是直观的、非形式的，T 中的符号和公式都是有内容的；②形式数学理

论 T_F，T_F 是一个形式符号系统，是 T 的形式化，T_F 通称为对象理论，其中的符号和公式都是没有内容的、纯形式的，但 T_F 的系统特征（如无矛盾性）是可用符号序列来表述的；③用以描述或研究 T_F 的数学理论 T_m，希尔伯特称之为元数学或证明论。目的是通过 T_m 来证明对象理论 T_F 的无矛盾性，从而说明 T_F 所代表的古典数学理论 T 是不会产生矛盾的。

希尔伯特方案约于 1922 年问世，曾引起数学界的普遍重视，许多人作了巨大的努力。一些较简单的对象理论，如命题演算、一阶谓词演算，只含加法的算术等的无矛盾性先后得到证明，这更促进了对此方案的信心。但 1931 年哥德尔在按此方案证明形式数论系统和形式实数系统的无矛盾性时得出了著名的不完全性定理。给希尔伯特方案以沉重的打击，原来意义上的希尔伯特方案未能实现。但这一方案极大地推动了数理逻辑的发展，证明论就由此方案所创立，哥德尔不完全性定理也是实施这一方案中产生的重要成果。方案的思想方法对现代数学起了巨大的推动作用。

递归论（**recursive theory**） 数理逻辑的一个分支，是一门研究递归函数及其推广的科学。递归函数是一种数论函数，其定义域与值域都是自然数集。只是由于构作函数的方法不同而有别于其他数论函数。将定义域推广到不限于自然数集时，便是所谓广义的递归函数。

递归论这门学科最早可以追溯到原始递归式的使用。古代人以及现代的儿童对加法及乘法的理解，实质上就是使用原始递归式。但直到 16 世纪的毛罗利科，尤其是 17 世纪的帕斯卡才正式使用与递归式密切相关的数学归纳法。19 世纪德国数学家戴德金和意大利数学家皮亚诺正式使用原始递归式来定义加法与乘法，从而发展了自然数理论。1923 年，司寇伦提出并初步证明一切初等数论中的函数都可以由原始递归式作出，即都是原始递归函数。1931 年，哥德尔在证明其著名的不完全性定理时，以原始递归式为主要工具把所有元数学的概念都算术化了。原始递归函数的重要性日益受到人们的重视，人们开始猜测，原始递归函数可能穷尽一切可计算的函数。但是，阿克曼提出了非原始递归的可计算函数，否定了这个猜测，同时也要求人们探讨原始递归函数以外的可计算函数。1934 年，哥德尔在埃尔布朗的启示之下，提出了一般递归函数的定义；美国的克林于 1936 年证明了这样定义的一般递归函数与丘奇所定义的 λ-可定义函数是相同的，并给出了几种相等价的定义。这样的一般递归函数后来被称为埃尔布朗—哥德尔—克林定义。1936 年，丘奇、图林各自独立地提出一个论点，即凡可计算的函数都是一般递归函数，把递归函数论与能行性理论密切地结合起来，从而使递归函数的应用范围大大地扩展了。关于递归函数本身的研究的进展则在于定义域的推广，从而得到递归字函数、α 递归函数和递归泛函等等。

随着集合论的发展，递归论也

向广义递归论发展。序数上递归论对有穷概念的推广在无穷语言中得到了重要应用。自然数上递归论已在许多方面得到应用。

随着计算机的发展，要求把古典数学能行化。以尼罗德为代表的递归论学家开拓了递归数学的研究领域。他们把古典数学的基本概念算法化，然后考虑哪些数学定理可以成立哪些无法成立。递归论在计算机科学中的应用主要是用于计算复杂性理论。起初是把图灵机作为研究计算复杂性的模型，考虑计算的时间、空间复杂性。继而基于递归论，再加上适当的公理又建立了抽象计算复杂性理论。近年来递归论的方法大量用于 P 与 NP 问题的研究。

算法(algorithm) 求解问题类的、机械的、统一的方法，它由有限多个步骤组成，对于问题类中的每一个给定的具体问题，机械地执行这些步骤就可以得到问题的解答。算法的这些特征，使得计算不仅可以由人，而且可以由计算机来完成。用计算机解决问题的过程可以分成三个阶段：分析问题、设计算法和实现算法。

中国古代数学就引入了利用算筹进行计算的算法，称为“术”，中国古代数学的主要成就多是用算法（术）表述的，如《九章算术》的“正负术”（在世界上最早引入负数及其运算规则）、“方程术”（以线性方程组解实用问题，求线性方程组数值解的算法）；刘徽的“割圆术”（引入了极限观念，求圆周率的算法）；《数书九章》的“大衍求一术”（求一次同余式组解的方法）和“正负开方术”（求一元高次方程数值解的算法）等等，尤其后两个术已经给出了比较复杂的算法。它们已经具备了前面所说的那些算法的特征。后来的中国珠算的口诀也可以说是一种简易的算法，所解决的问题类是算术运算。现在称为欧几里得算法的求两数最大公约数的辗转相除法，欧几里得在《几何原本》中只给出这一算法的思想，并没有以算法的形式表述出来。《九章算术》中的“约分术”以明确的算法形式表述出求两数最大公约数的方法。

中国古代早就有“算术”、“算法”等概念，但其含义是指当时的全部数学知识和计算技能，与现代算法的含义不尽相同。英文 algorithm 一词也经历了一个演变过程，最初写法为 algorism 或 algoritmi，原意为用阿拉伯数字进行计算的过程。这个词源于公元 9 世纪阿拉伯数学家花拉子米的名字。

古代的计算一般是数值计算。现代计算已远远突破了数值计算的范围，包括了大量的非数值计算，例如检索、表格处理、判断、决策、形式逻辑演绎等。

在 20 世纪以前，人们普遍认为，所有的问题类都是有算法的，正是为了得到判定一切科学命题，起码是一切数学命题真假的算法，莱布尼茨开始了数理逻辑的创立工作。但是 20 世纪初，人们发现有些问题虽经过长期的研究，仍然找不到解决它们的算法。例如希尔伯特第 10 问题，半群上的字的问题，谓词演算中的任一闭合公式是否为一

定理的问题等等。因此人们怀疑这些问题找不到解决它们的算法。为了证明解这些问题的算法不存在，就要求把算法概念予以精确化，使其能作为数学对象来处理。但是在这之前数学界对算法只有朴素的直观概念，并无精确的定义，因此产生了建立算法的精确的数学定义的问题。20 世纪 30 年代这个问题才得到解决，先后出现了算法的几个等价的数学定义，其中最重要的是递归函数、图灵机、正规算法等。

1934 年，哥德尔最先提出算法的数学定义（一般递归函数定义，见递归论）。1936 年，克林把它具体化，建立了等式演算从而定义了递归函数，不久就证明了递归函数与丘奇提出的 λ-可定义函数（1933 年）的等价性。同时，图灵也引进了著名的图灵机来描述算法，继而也证明了图灵可计算函数与递归函数的等价性。丘奇在知道图灵机以前就认为递归函数或 λ-可定义函数是算法可计算函数的精确的数学描述，但无法证明它们的等价性，因而丘奇建立了一个不能证明的论题：一切算法可计算函数都是递归函数，即二者是等价的。后来称之为“丘奇论题”。克林曾怀疑存在非递归的算法可计算函数，但他无法构造出反例，也就接受了丘奇论题。1936 年图灵也独立地提出了丘奇论题的观点。次年证明了图灵机可计算函数与 λ-可定义函数的等价性，由图灵可计算函数与递归函数及 λ-可定义函数的等价性，丘奇论题亦可表述为：一切算法可计算函数都是递归函数或图灵可计算函数或 λ-可定义函数。由于图灵机的定义很符合人们对算法的直观经验，因此哥德尔在见到图灵机后也接受了丘奇论题。

丘奇论题为什么不能证明？因为“算法可计算”（“能行可计算”）是一个未经严格数学定义的概念，而“递归函数”（以及图灵机，λ-可定义函数）却是精确定义了的数学概念，因此无法证明它们的一致。而事实上，丘奇论题的功能正在于对“算法可计算”这个含混的概念精确化、严格化，而且至今也没有发现反例，所以人们仍然接受它。后来马尔可夫提出了“正规算法”（1947 年），波斯特提出了“首尾算法”（1943 年），它们也是常用的算法定义，并且也都与递归函数定义等价。随着计算机科学的发展，人们开始要求在符号串上直接定义算法。60 年代初出现了几个等价的定义，其中我国数学家胡世华最早发表了“递归算法”定义。

模型论（model theory） 数理逻辑的一个分支，是研究形式语言及其解释（模型）之间的关系的理论。

用模型来研究数学理论可追溯到非欧几何的无矛盾性证明（见解释）：建立欧氏几何模型从而证明了非欧几何相对于欧氏几何的无矛盾性。20 世纪 20 年代后，随着证明论的创立和发展，对形式系统的研究不断深入，许多问题是依赖于模型（解释）来研究的，例如可用各种模型来论证一组（形式）语句的无矛盾性或范畴性，也可用模型来论证一语句对一组语句的独立性等等。因

而形式语言与其解释之间的关系问题日益受到重视，成为重要的研究对象。

最早的模型论研究是罗文汉姆和斯科朗等人的工作：1915 年罗文汉姆证明，每一组有限多语句如果有模型的话，则它也有一个可数模型；1920 年斯科朗把这一结果推广到有可数个语句的情况。30 年代哥德尔、马尔采夫等人在紧致性定理方面的工作也是重要的奠基工作。但是直到 50 年代，模型论才正式成为一门新的学科，主要标志是 1949 年亨肯发表的完全性定理的新证明，1950 年国际数学家大会上塔尔斯基与罗宾逊的报告以及 1951 年罗宾逊《代数的元数学》的发表。

一个形式语言$\mathcal{L}$的解释 u 称为此语言的一个模型或结构。u 是一个具有若干运算、关系及特指元素的非空集合，也称为泛代数。所以，模型论又被形容为“泛代数＋逻辑”。由于所涉及的逻辑系统不同，模型论可分为：一阶模型论、高阶模型论、模态模型论、多值模型论等。由于在数理逻辑中以一阶逻辑发展最成熟，所以，模型论中也以一阶模型论内容最丰富，应用也最多。

构造模型是模型论的重要课题，模型论采用了许多独特的构模方法和工具。例如 50 年代塔尔斯基与沃特提出的初等子模型；70 年代罗宾逊等人提出的模型论力迫法；由斯科朗提出而在 50 年代由沃希等人作了系统化的超积等。这些方面后来都有新的发展。

模型论应用于数学各分支，取得了许多新结果。在代数方面应用，取得群论和域论的一些结果，如阿克斯与柯琴用它解决了著名的阿廷猜想。在分析方面应用，罗宾逊建构了非标准分析（1960—1961 年），现已发展为一整套非标准数学。

判定问题（decision problem）

判定某类问题是否具有算法解，或者是否存在能行性的方法使得对该问题类中的每一个特例能在有限步内机械地判定它是否具有某种性质的问题。如果对某类问题已经获得这种能行的方法，就说这类问题是可判定的，或者说其判定问题是可能的；如能证明某类问题不可能存在这样的方法，就说这类问题不是能行可判定的。判定问题有不同的表述。从语义方面看，判定问题是要确定一公式是否常真，即是否普遍有效，或是否可满足；从语法方面看，它是要确定某一公式是可证，还是可否证。

上述“是否有算法解”、“是否存在能行的方法”的说法中的“是”，指有算法解或有能行的方法，这是不成问题的，因为人们的直观至少在理论上可以判定一个解是算法解或一种方法是能行的方法，因而证明一个理论的判定问题可解，只需给出一个算法再证明算法为所求即可。对其中的“否”即不存在算法解或不存在能行的方法，则首先要把“算法”、“能行性”概念精确化，给出严格的数学定义，使它们的类成为明确的数学对象，从而能用严格的数学方法证明对某类问题它们不存在。算法和能行性概念是在 30 年代中期严格化的（在研究判定问题的需要推动下，见算法、递归论），从那

时起人们才得以解决大量的不可判定的问题。

判定问题成果举例:

1. 可判定问题。1927 年兰福德证明了自然数及有理数的线性序理论的判定问题可解;1929 年普雷斯伯格证明了自然数的加法理论可判定;1940 年,塔尔斯基证明了布尔代数的初等理论可判定;1948 年,他证明了代数封闭域的初等理论可判定;1954 年,什米莱夫证明了交换群的初等理论可判定;1968 年,阿克斯证明了有限域的初等理论可判定。

2. 不可判定问题:1936 年,丘奇证明皮亚诺算术理论 *PA* 不可判定;同年,罗塞证明 *PA* 的任何无矛盾扩张都不可判定;1936 年,丘奇,1937 年图灵证明一阶逻辑不可判定;1955 年诺维科夫,1959 年布恩证明群的字问题不可判定;1970 年,马季亚谢维奇证明希尔伯特第 10 问题不可判定。

对可解的情形有一个算法复杂性或可行性问题,对不可解问题,有一个可解度问题。

公理集合论(axiomatic set theory) 数理逻辑的主要分支之一,是用公理化方法处理朴素集合论的内容的理论,更重要的,是研究集合论的元数学性质——集合论的模型、各公理的关系、各系统之间的关系、各种不可判定语句,以及集合论公理化过程中所提出的种种新方法和新问题的理论。

1908 年策梅罗提出了第一个集合论公理系统,旨在避免集合论中的悖论(见集合论),20 年代弗伦克尔和斯科朗加以改进和补充,得到常用的策梅罗-弗伦克尔公理系统,简记为 *ZF*。这是一个建立在有等词和属于关系的一阶谓词演算之上的形式系统。它的非逻辑公理有:外延公理、空集公理、无序对公理、并集公理、幂集公理、替换公理模式、正则公理。如果另加选择公理(*AC*)则所得到的公理系统简记为 *ZFC*。

已经证明,*ZF* 对于发展集合论是足够的,它能避免已知的集合论悖论,并在数学基础研究中提供一种方便的语言和工具。在 *ZF* 中,几乎所有的数学概念都能用集合论语言表达。数学定理也大都可以在 *ZFC* 系统内得到形式证明。因而作为整个数学的基础,*ZFC* 是完备的。数学的无矛盾性可归结为 *ZFC* 的无矛盾性。

由哥德尔不完全性定理可知,如果 *ZF* 是无矛盾的,则在 *ZF* 中不能证明自身的无矛盾性。所以,在公理集合论中只考虑相对无矛盾性问题,解决的方法是构造模型。常用三种方法:内模型法,外模型法(力迫方法),对称模型法。1938 年,哥德尔证明了 *CH* 对于 *ZFC* 的相对无矛盾性,用的就是内模型法。1963 年,科恩创立外模型法,证明了 *CH* 相对于 *ZF* 的独立性。

公理集合论的一个研究领域是由朴素集合论中对无穷组合问题的研究发展而来的组合集合论。另一个研究领域是描述集合论(谱系理论),主要探讨划分层次(级)后的实数子集的结构性质问题。在研究这两个领域的许多问题时,都要用到

ZF(或 ZFC)以外的附加假设(公理)才能判定。常用的附加假设有:可构成公理,各种大基数公理,以及与 AC 不相容的决定性公理等。

1938 年,哥德尔提出了可构成公理,60—70 年代,这一公理得到重视和发展。大基数公理虽然早已提出〔在 ZF+大基数公理(即"存在一大基数")的公理系统中,可以证明 ZF 是无矛盾的〕,但直到 60 年代以后才作为公理集合论某一领域的附加假设使用。几乎每一种大基数都是 ω 的某种性质向不可数基数的推广。可构成性、大基数和力迫方法(外模型法)已成为当代公理集合论研究的三大主流,它们又是三种重要的工具。随着无穷对策的产生和对策论在数学各分支的渗透,决定性公理也日益受到重视。

数学基础(**foundations of mathematics**) 研究数学中带有普遍性和本质性问题的理论。这些问题大体上可以分作三类:一类是数学中的逻辑问题,如公理系统的无矛盾性、数学形式化体系、元数学等;一类是数学的方法论问题,如数学思想方法的一般原则、数学科学的发展规律、数学科学的结构等;另一类是与数学中的理论问题有关的哲学问题,如数学命题或理论的真理性、数学对象的本体论解释等。有时将它们分别称为数学的逻辑基础、方法论基础和哲学基础。它们与逻辑学、数学方法论和数学哲学都有密切的关系,但数学基础主要涉及有关问题的数学方面,虽然它往往借鉴于以至于吸收后三者的研究成果并对它们有很大的影响。

人们的数学研究并不是从数学的基础开始的,相反,只有数学发展到相当丰富的程度,以至于产生了一系列的带有普遍性和本质性的问题而又无法解决时,才产生了数学基础研究以至于数学基础学科。

人们的数学研究是从最易于理解、与人的生活关系最密切的数学知识——自然数和简单的几何图形——开始的。自然数的运算和人们现实生活的需要很早就使人们产生了有理数的观念。在世界各地数学的早期发展至此都是一致的。接着,在注重理论探讨的古希腊,毕达哥拉斯学派发现了直角等腰三角形的直角边和斜边不可公度,即如直角边为 1,斜边不能表示成有理数,于是产生了第一次数学危机,这也是人们第一次遇到需要研究的数学基础问题。但古希腊人避开了它,潜心于"形"的探讨。中国的刘徽也发现了开方不尽数的问题,注重实用的中国古人用有理数(十进小数)去逼近它得出可用的结果,并没有感到逻辑上的困难。17 世纪,微积分的产生触发了第二次数学危机(见微积分学),人们再一次遇到数学基础问题。这一次,中国古人式的实用观念占了上风,由于微积分在现实生活中得到多方面的应用并且取得重要的实际效果,人们不顾基础的"不牢固",在一百多年间把分析数学发展为庞大的体系。直到 19 世纪,非欧几何的创立使人们陷入逻辑上两难的困境,人们才真正开始研究第一个数学基础问题——数学理论的无矛盾性。人们开始采用解释法证明非欧几何的无矛盾性,与此同时,

微积分的基础问题——首先也是无矛盾性问题——也受到人们的重视，它也采用了解释的方法：把非欧几何和微积分的无矛盾性解释为实数的无矛盾性，再解释为自然数的无矛盾性，每次解释都更向数学由之发展出来的更简单的概念回归（当然是更高层次的、严格的），最后，当把自然数的无矛盾性解释为集合论的无矛盾性时，似乎一切都已清楚明白了。于是，在19世纪的最后一年，数学家庞加莱高兴地宣布："数学的严格性的基础已经完全确立起来了！"在这种情况下，集合论悖论的发现无异于晴天霹雳，它所引发的第三次数学危机是一场真正的危机（见悖论），包括逻辑上、方法论上、哲学上的"危机"。数学基础问题第一次以最迫切的需要的姿态提到了数学界的日程上，人们动用了自己的全部知识——包括逻辑的、数学的、方法论的、哲学的知识——来解决数学基础问题，数学基础开始成为独立的学科，其标志就是数学基础三大学派——直觉主义、逻辑主义、形式主义——的形成，它们在20世纪初有过剧烈的争论。后来，三大派都没有实现自己原来预想的目标，但对数学基础学科的发展都起了巨大的推动作用（见直觉主义、逻辑主义、形式主义）。三大学派的数学成果首先表现在数理逻辑学科的发展和它的现代分支——证明论等——的形成上。后来这些分支中的重要成果都可以看作是数学基础研究的成果，例如哥德尔不完全性定理（1931）及他关于"连续统假设的无矛盾性"的证明（1938）也都是数学基础中的重要成果。

30年代后，三大派的争论渐少，一些问题逐渐得到深入的研究，例如哥德尔、海丁等人对直觉主义数学进行新的探讨，指出数学研究中本来就存在着构造性和非构造性两种倾向。后来王浩把构造性数学称为做的数学（m. of doing），把非构造数学称为在的数学（m. of being）。它们都是有意义的，而且不是互不相容的。

当然，数学基础观点的不同仍将导致对数学问题及其解做不同的理解。例如1963年，柯恩证明了连续统假设对 *ZFC* 系统的独立性，他进而认为 *CH* 问题已经解决了，因为由已证的独立性，既存在着连续统假设成立的"康托尔集合论"，也可以存在连续统假设不成立的"非康托尔集合论"，那么从无矛盾就是存在的形式主义观点出发，肯定 *CH* 是否是真，还有什么意义呢？而非形式主义者看来，连续统应该有多大就只能有多大，这是有客观标准的。例如，伯奈斯1965年就指出过，科恩研究连续统假设的独立性的结果是关于集合论公理系统的证明论的，不是直接关于集合论本身的结果。换言之，伯奈斯认为科恩只解决了在怎样的形式系统中不能推出表示 *CH* 的公式，而没有解决集合论本身的问题，所以，不承认科恩解决了连续统问题。我们现在还没有确定连续统的势，但这并不是说，永远不可能确定它的势。在数学方法论和哲学问题方面，这种争议就更多些，有些也就成为数学方法论或数

学哲学的内容。数学基础之间的争议，到20世纪70年代末，尤其进入80年代后，渐渐不象过去那样剧烈了。许多领域都有了更深刻的发展。

代数学(algebra) 数学中最重要的、基础的分支之一。代数学的历史悠久，它随着人类生活的提高，生产技术的进步，科学和数学本身的需要而产生和发展。在这个过程中，代数学的研究对象和研究方法发生了重大的变化。代数学可分为初等代数学和抽象代数学两部分。初等代数学是更古老的算术的推广和发展，而抽象代数学则是在初等代数学的基础上产生和发展起来的。

代数学的西文名称algebra来源于9世纪阿拉伯数学家花拉子米的重要著作的名称。该著作名为"ilm al－jabr wa'l muqabalah"，原意是"还原与对消的科学"。这本书传到欧洲后，简译为algebra。清初曾输入中国两卷无作者的代数学书，译为《阿尔热巴拉新法》，后改译为《代数学》(李善兰，1853)。

初等代数学是指19世纪上半叶以前的方程理论，主要研究某一方程(组)是否可解，怎样求出方程所有的根(包括近似根)，以及方程的根所具有的各种性质等。

代数之前已有算术，算术是解决日常生活中的各种计算问题，即整数与分数的四则运算。代数与算术不同，主要区别在于代数要引入未知数，根据问题的条件列方程，然后解方程求未知数的值。这一类数学问题，早在古埃及的数学纸草书(约公元前1800年)中就有了启示，书中将未知数称为"堆"(一堆东西)，并以象形文字表示。古巴比伦人也知道某些二次方程的解法，在汉穆拉比时代(公元前18世纪)的泥板中，就载有二次方程问题，甚至还有相当于三次方程的问题。数学史家们曾为此发生过热烈争论：在什么意义下能把巴比伦数学看成代数？

古希腊时代，几何学明显地从数学中分离出来，并在希腊科学中占统治地位，其威力之大，以致于纯算术的或代数的问题都被转译为几何语言：量被解释为长度，两个量之积解释为矩形面积等。现代数学中保留的称二次幂为"平方"，三次幂为"立方"，就是来源于此。古典希腊时期流传至今的，与代数有关的著作只有丢番图的《算术》。书中解决了某些一次、二次方程问题和不定方程问题，出现了缩写符号和应用负数之例。其问题构思精巧，解题方法极多，但最大的缺点是没有解方程的一般方法。

公元四世纪以后，希腊数学开始衰微，但印度和中东地区的数学却获得了相当可观的发展。7、8世纪的印度数学家主要研究不定方程的解法。在婆罗摩笈多的著作中，还给出了二次方程 $x^2+px-q=0$ 的一个根的公式 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{p^2+4q}-p)$ 及某些不定方程的通解的一般形式。印度人已经用缩写文字和一些记号来表示未知数和运算。

在古代，只有希腊几何学从数学中分离出来，算术与代数在很长

时期内都是交错在一起的。人们只能从中归纳出具有代数特点的问题，作为代数学的历史痕迹。代数学发展成为一门独立的数学分支应归功于中世纪的阿拉伯人。阿拉伯数学家系统地研究了二次方程的解法，确定了解方程求未知量是代数学的基本特征，建立了解方程的变形法则，还特别创造了三次方程的几何解法。花拉子米的《代数学》传到欧洲后，作为标准课本流行了几百年，而奥马·海亚姆关于“代数学是解方程的科学”的观念一直保持到 19 世纪末。

中国古代在代数学方面有光辉的成就。在古代数学名著《九章算术》(公元一世纪)中，记载了用算筹解一次联立方程组的一般方法，所采用的“正负术”中给出了负数的概念，建立了正、负数的运算法则。中国古代把开各次方和解二次以上的方程，统称为“开方”，在《周髀算经》和赵爽注以及《九章算术》和刘徽注中已经有完整的开平方法和开立方法。在二次方程 $x^2+ax=A$ 的数值解法和求根公式这两方面也有一定的成就。唐初王孝通的《缉古算经》的大部分内容是求三次方程的正根，还发展了三次方程的数值解法。宋元时期，中国数学家对高次方程的研究取得更加辉煌的成就。北宋数学家贾宪提出了著名的“开方作法本源图”(即贾宪三角)和增乘开方法，并用来解决二项方程近似根求法。南宋秦九韶把增乘开方法运用于高次方程，在高次方程数值解法问题上做出了具有世界意义的重大贡献。金、元之际数学家李冶研究列一元方程式的方法，创立“天元术”；元朝朱世杰又把这种方法推广到多元高次方程组，创立“四元术”，为代数学的发展做出新的贡献。

在中世纪的欧洲，对代数学有较大贡献的是意大利数学家斐波那契，他的《算盘书》(1202)是这一时期最重要的数学著作，其中系统地向欧洲人介绍了阿拉伯的算术和代数。书中载有一个有趣的“兔子繁殖问题”(见斐波那契兔子问题)，导致有名的斐波那契级数的研究，后人发现这个级数有许多重要而有趣的性质，至今仍有人在研究，美国在 20 世纪 60 年代初还创办《斐波那契季刊》，专门刊登这方面的新发现。

二次方程的求根公式在花拉子米时代就已经得到，但三、四次方程的求根公式却直到 15 世纪末还没有得到。16 世纪上半叶，意大利数学家塔尔塔利亚首先得到了三次方程的一般解法，其方法却由另一位意大利数学家卡尔达诺抢先在他的著作《大术》(1545)中公布，为此引出一场风波，其中包括 400 多年前的著名的数学竞赛。三次方程的求根公式以“卡尔达诺公式”流传下来。四次方程的一般解法由卡尔达诺的学生费拉里得到。

在出现普遍适用的代数符号之前，代数方程理论的发展是缓慢的、曲折的。花拉子米的《代数学》完全用文字叙述，使用起来很不方便。丢番图和印度数学家都使用过一些缩写文字和记号，但很不系统，没有被后人采纳。在十二世纪以后欧洲的代数学文献中陆续出现过一些简写

法，包括一些运算的表示，如用 $\bar{P}$ 和 $\bar{M}$ 表示“加”和“减”，等等。

符号代数学的最终确立是由法国数学家韦达完成的。他的《分析术入门》被西方数学史家推崇为第一部符号代数学。在书中，他自觉地系统地运用字母代替数字，用辅音字母表示已知数，元音字母表示未知数。韦达还明确指出代数与算术的区别，前者是“类的算术”（施行于事物的类和形式的运算”），后者是“数的算术”。于是代数学更带有普遍性，形式更抽象，应用更广泛。在稍后的工作里，韦达改进了三、四次方程的解法，他还对 $n=2$、3 的情形，建立了方程的根与系数之间的关系，即现在称为韦达定理的结果。后来笛卡儿改进了韦达创造的符号系统，用 $a,b,c,\cdots$ 表示已知量，$x,y,z,\cdots$ 表示未知量。

18 世纪对代数学的研究时常要服从分析学的需要，许多人甚至把分析看作代数的延伸。其实这一时期代数学的发展为 19 世纪的革命性变化奠定了基础。高斯研究了复数及其运算的几何表示，给出代数基本定理的第一个证明（1799）。法国数学家拉格朗日、旺德蒙德，意大利数学家鲁菲尼等研究五次以上代数方程的解法，发现根的有理函数与根置换对方程性质的深刻影响，开始认识到五次以上的代数方程用根式求解的不可能性。

在 19 世纪，代数学发生了革命性的变革。首先是挪威数学家阿贝尔证明了（1824—1826）五次以上的一般代数方程不可能用根式求解，并实质上引进了域和在给定域中不可约多项式这两个概念。紧接着（1832），法国数学家伽罗瓦对于高次方程是否能用根式求解问题给出更彻底的解答。他引进了置换群的正规子群、数域的扩域、群的同构等概念，证明了由方程的根的某些置换所构成的群（即伽罗瓦群）的可解性是方程根式可解的充分必要条件。伽罗瓦的工作并没有立即为人们所了解和接受，直到 1870 年才由法国数学家若尔当在他的著作《置换与代数方程专著》中给出第一个全面而清晰的阐述，他还补充了自己的新成果，这部著作大大地推进了置换群论的研究。

几乎与伽罗瓦的工作同时，英国数学家皮科克发表了他的《代数通论》（1830），其中对代数运算基本法则进行研究，试图建立一门更一般的代数，它仅是符号及其满足的某些运算法则的科学。英国数学家德·摩根和布尔在这方面也做出了重要尝试。这些工作预示了抽象代数学的产生。

另一项引起代数学变革的工作来自英国数学家哈密顿和德国数学家格拉斯曼，前者在 1843 年构造出第一个不满足乘法交换律的数学对象——四元数，后者则在 1844 年独立地得到更一般的具有 n 个分量的超复数理论。

在数论方面，由于对费马大定理的研究，德国数学家库默尔引进了（1845—1847）“理想数”概念，在此基础上，戴德金发展了理想理论。这项工作不仅对代数数论的发展有重要影响，而且开辟了抽象代数发展的道路。

在布尔的工作的影响下，英国数学家凯莱和西尔维斯特共同创立了代数型的理论，奠定了关于代数不变量理论的基础。这项工作也是引向抽象代数学建立的动力。

自19世纪初以来，引起代数学的变革并最终导致抽象代数学产生的工作还可以列举一些，这些工作大致可分属于群论，代数数论和线性代数这三个主要方面。到19世纪末，数学家们从许多分散出现的具体研究对象抽象出它们的共同特征来进行公理化研究，完成了来自上述三个方面工作的综合，终于使代数学发展成为抽象代数学。近代德国学派对这一步综合的工作起到主要作用。自19世纪末戴德金和希尔伯特的工作开始，在韦伯三卷巨著的影响下，施泰尼茨于1911年发表了重要论文《域的代数理论》，对抽象代数学的建立贡献很大。20世纪20年代以来，以E·诺特和阿廷以及他们的同事、学生们为中心，抽象代数学得到空前的发展。荷兰数学家范德瓦尔登根据诺特和阿廷的讲稿于30年代初写成《近世代数学》，综合当时抽象代数学各方面的工作于一书，对于抽象代数学的传播和发展起了巨大的推动作用。

抽象代数学是以研究数字、文字和更一般元素的代数运算的规律和由这些运算适合的公理而定义的各种代数结构的性质为其中心问题的。因此抽象代数学对于全部现代数学和一些其他科学领域都有重要的影响。

随着数学中各分支理论的发展和应用的需要，抽象代数学得到不断的发展。在1933—1938年，经过伯克霍夫、冯·诺伊曼、坎托罗维奇和斯通等人的工作，格论确定了在代数中的地位。而自20世纪40年代中叶起，作为线性代数的推广的模论得到进一步的发展并产生深刻的影响。泛代数、同调代数、范畴等新领域也被建立和发展起来。

在中国，抽象代数学的研究始于30年代。中国数学家已在许多方面取得了有意义的和重要的成果，其中尤以曾炯之、华罗庚和周炜良的工作更为显著。

对数(**Logarithm** 若 $a^b=N(a>0,a\neq1)$。则 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $b=\log_a N$。当 $a=10$ 时称作常用对数，当 $a=e$ 时，称作自然对数。

对数的发明是16世纪末至17世纪初的事。当时在自然科学领域特别是天文学方面经常遇到十分复杂的数值计算，数学家们为了寻求化简计算的方法而发明了对数。一般认为，对数是由苏格兰数学家纳皮尔和瑞士工程师比尔吉彼此独立地发明的。但在此之前，在法国数学家许凯(15世纪)和德国数学家施蒂费尔(1487—1567)的工作中就孕育了对数的思想。他们研究等比数列与等差数列之间的关系，特别是施蒂费尔将这两种数列加以对比，指出，等比数列各项的乘、除、乘方、开方运算、相当于等差数列相应各项的加、减、乘、除运算。但是他们都没有进一步发展这种思想。

比尔吉是瑞士的一位工程师，他曾担任著名天文学家开普勒的助手，因此经常接触复杂的天文计算，

于是产生了化简数值计算的强烈愿望。他受施蒂费尔工作的影响，考虑等差数列

$$0,10,20,\cdots,10n$$

和与之对应的等比数列

$$10^8,\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right),\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2,\cdots 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n$$

由此建立了一种对数体系，于1620年发表在《等差数列和等比数列表》中。不难看出，比尔吉所造的对数表，把对数的底取为$(1.0001)^{10^4}$与现在自然对数的底e相差甚小。

比尔吉发明对数的时间大约在1610年，但他推迟了发表的时间，而纳皮尔的对数表在1614年公诸于世，早比尔吉6年。纳皮尔是苏格兰的一个贵族，他对数值计算颇有研究。他制造的“纳皮尔算筹”，化简了乘除法运算，其原理就是用加减法来代替乘除法。纳皮尔发明对数的动机是为寻求球面三角计算的简便方法，他依据一种非常独特的与质点运动有关的设想构造出所谓对数方法，其核心思想表现为算术数列与几何数列之间的联系。在他的《奇妙的对数表的描述》中阐明了对数原理(见〔《奇妙的对数表的描述》〕)，后人称他发明的对数为纳皮尔对数，记为$N_{ap}.\log x$，它与自然对数的关系为

$$N_{ap}.\log x=10^7\ln\frac{10^7}{x}$$

现在通用的以10为底的常用对数，是由另一位英国数学家布里格斯首先采用的，在他1624年出版的《对数算术》中，载有14位的常用对数表。他还制作了正弦、正切对数表。荷兰数学家兼出版商弗拉克补充了布里格斯的对数表，他出版的几种对数表(包括三角函数对数表)很快在欧洲普及。弗拉克还最早阐明对数首数的意义。

关于以e为底的自然对数的准确涵义，是由英国一位数学教师斯佩德尔(J. Speidell)首先指出的，他在1619年出版了关于对数的著作，包含1—1000的自然对数表。

对数传到中国的时间是17世纪中叶，中国数学家薛风祚和波兰传教士穆尼阁合作的《比例对数表》是我国最早的对数著作。

二项式定理(binomial theorem) 这里指$(a+b)^n$在n为正整数时的展开式。$(a+b)^n$的系数表

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
………………

在我国称为“贾宪三角”，一般认为是北宋数学家贾宪所首创。它记载于杨辉的《详解九章算法》(1261)之中。在阿拉伯数学家卡西的著作《算术之钥》(1427)中也给出了一个二项式定理系数表，他所用的计算方法与贾宪的完全相同。在欧洲，德国数学家阿皮安努斯在他1527年出版的算术书的封面上刻有此图。但一般却称之为“帕斯卡三角形”，因为帕斯卡在1654年也发现了这个结果。无论如何，二项式定理的发现，在我国比在欧洲至少要早300

年。

1665年，牛顿把二项式定理推广到 n 为分数与负数的情形，给出了 $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ 的展开式。

二项式定理在组合理论、开高次方、高阶等差数列求和，以及差分法中有广泛的应用。

代数方程(**algebraic equation**) 指多项式方程，其一般形式为：

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0,$$

是代数学中最基本的研究对象之一。

在20世纪以前，解方程一直是代数学的一个中心问题。二次方程的求解问题历史久远。在巴比伦泥板中(公元前18世纪)就载有二次方程的问题。古希腊人也解出了某些二次方程。中国古代数学家赵爽(公元3世纪)在求解一个有关面积的问题时，相当于给出二次方程 $-x^2+kx=A$ 的一个根 $x=\frac{1}{2}(k-\sqrt{k^2-4A})$。7世纪印度数学家婆罗摩笈多给出方程 $x^2+px-q=0$ 的一个根的公式 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{p^2+4q}-p)$。一元二次方程的一般解法是9世纪阿拉伯数学家花拉子米建立的。

对三次方程自古以来也有很多研究，在巴比伦泥板中，就有相当于三次方程的问题。阿基米德也曾讨论过方程 $x^3+a=cx^2$ 的几何解法。11世纪波斯数学家奥马·海亚姆创立了用圆锥曲线解三次方程的几何方法，他的工作可以看作是代数与几何相结合的最早尝试。但是三、四次方程的一般解法(即给出求根公式)，却直到15世纪末也还没有被发现。意大利数学家帕乔利在1494年出版的著作中还说："$x^3+mx=n$，$x^3+n=mx$(m、n 为正数)现在之不可解，正象化圆为方问题一样。"但到16世纪上半叶，三次方程的一般解法就由意大利数学家费罗、塔尔塔利亚和卡尔达诺等得到，三次方程的求根公式最早出现在卡尔达诺的《大术》(1545)之中。四次方程的求根公式由卡尔达诺的学生费拉里首先得到，也记载于卡尔达诺的《大术》中。

在16世纪末到17世纪上半叶，数学家们还探讨如何判定方程的正根、负根和复根的个数。卡尔达诺曾指出一个实系数方程的复根是成对出现的，牛顿在他的《广义算术》中证明了这一事实。笛卡儿在他的《几何学》中给出了正负号法则(通称笛卡儿法则)，即多项式方程 $f(x)=0$ 的正根的最多数目等于系数变号的次数，而负根的最多数目等于两个正号和两个负号连续出现的次数。但笛卡儿本人没有给出证明，这个法则是18世纪的几个数学家证明的。牛顿在《广义算术》中给出确定正负根数目上限的另一法则，并由此推出至少能有多少个复数根。

研究代数方程的根与系数之间的关系，也是这一时期代数学的重要课题。卡尔达诺发现方程所有根的和等于 x^{n-1} 的系数取负值，每两个根的乘积之和等于 x^{n-2} 的系数，等等。韦达和牛顿也都在他们的著作中分别叙述了方程的根与系数之

间的关系，现在称这个结果为韦达定理。这些工作在18世纪发展为关于根的对称函数的研究。

另一个重要课题是今天所谓的因子定理。笛卡儿在他的《几何学》中指出，$f(x)$能为$(x-a)$整除，当且仅当a是$f(x)=0$的一个根。由此及其他结果，笛卡儿建立了求多项式方程有理根的现代方法。他通过简单的代换，把方程的首项化为1，并使所有系数都变为整数，这时他判断，原方程的各有理根必定是新方程常数项的整数因子。牛顿还发现了方程的根与其判别式之间的关系，他在《广义算术》中还给出了确定方程根上界的一些定理。此外，数学归纳法也在16世纪末期开始明确地用于代数学中。

18世纪以后，数学家们的注意力开始转向寻求五次以上方程的根式解。经过两个多世纪的努力，在欧拉、旺德蒙德、拉格朗日、鲁菲尼等人工作的基础上，在19世纪上半叶，阿贝尔和伽罗瓦几乎同时证明了五次以上的方程不能用公式求解。他们的工作开创了用群论的方法来研究代数方程的解的理论，为抽象代数学的建立开辟了道路。（见置换群和伽罗华理论）

代数方程理论的另一个问题是一个方程能有多少个根。中世纪阿拉伯和印度的数学家们都已认识到二次方程有两个根。到了16世纪，意大利数学家卡尔达诺引入了复数根，并认识到一个三次方程有3个根，一个四次方程有4个根等等。荷兰数学家吉拉尔在1629年曾推测并断言任意一个n次方程，如果把复根算在内并且k重根算作k个根的话，那它就有n个根。这就是代数基本定理。这个定理在18世纪被许多著名的数学家认识到并试图证明之，直到1799年高斯才给出第一个实质性的证明（见代数基本定理）。

对代数方程理论的研究，使数学家们引进了在近世代数中具有头等重要意义的新概念，这些新概念很快被发展成为有广泛应用的代数理论。

行列式（**determinant**） 重要的数学工具和概念之一。它来源于解线性方程组。

在17世纪末，莱布尼茨研究线性方程组的解法时，开始使用指标数的系统集合来表示方程组的系数，并得到现在称为结式的一个行列式。大约在1729年，马克劳林开始用行列式的方法解含2—4个未知量的线性方程组，还使用了所谓的克莱姆法则，克莱姆在1750年把这个法则发表出来。贝祖研究（1764）齐次方程组，证明了系数行列式等于零是方程组有非零解的条件。这些关于行列式的早期工作（还可以举出一些）大都是为了研究方程组而利用行列式，以求得紧凑简单的表达式。

对行列式理论作专门研究（不单纯作为工具）的第一个人是旺德蒙德。1772年，他建立了用二阶子式和它们的余子式展开行列式的法则。一般认为旺德蒙德是行列式理论的奠基人。在同一年，拉普拉斯就推广了旺德蒙德的结果，用r阶子式及其余子式来展开行列式。

行列式这个名词最早出现在

18 世纪初柯西的著作之中，他还首先采用双重足标的记法把元素排成方阵。用两条竖线画在一个方阵的左右两侧来表示行列式是凯莱在 1841 年引进的。

柯西对行列式理论进行了系统研究，他建立了行列式的乘法定理，并得到行列式的一些性质(1815)。之后，西尔维斯特和凯莱共同发展了行列式的理论。雅可比研究了函数行列式，建立了它的导数公式，函数行列式被应用于多重积分的变量替换之中。

在整个 19 世纪，不断地得到行列式的新结果，除行列式的一般理论以外，还建立了大量的有关特殊形式行列式的一些定理。行列式理论被越来越多地应用于许多方面，除了解线性方程组和多重积分的变量替换外，行列式还被应用于坐标变换、解行星运动的微分方程组、将二次型化成标准型，等等。

行列式概念的出现虽然没有深刻地影响数学的发展，但大量的事实已经证明，行列式已成为现代数学中高度有用的工具。

线性方程组(**system of linear equations**) 关于未知量是一次的方程组，这是最简单也是最重要的一类代数方程组。

线性方程组的解法，早在中国古代的数学著作《九章算术·方程》章中已经作了比较完整的论述。其中所述方法实质上相当于现代的对方程组的增广矩阵的行施行初等变换，消去未知量的方法。在西方，线性方程组的研究是在 17 世纪后期由莱布尼茨开创的。他曾研究含两个未知量的三个线性方程组成的方程组，证明了当方程组的结式等于零时方程有解。马克劳林在 18 世纪上半叶研究了具有二、三、四个未知量的线性方程组，得到了现在称为克莱姆法则的结果，克莱姆不久也发表了这个法则。18 世纪 60 年代以后，法国数学家贝祖对线性方程组理论进行了一系列研究，证明了 n 元齐次线性方程组(n 个方程)有非零解的条件是系数行列式等于零，还利用消元法将高次方程问题与线性方程组联系起来，提供了某些 n 次方程的解法。

到了 19 世纪，英国数学家史密斯和道奇森继续研究线性方程组理论，前者引进了方程组的增广矩阵和非增广矩阵的术语，后者证明了 n 个未知数 m 个方程的方程组相容的充要条件是非增广矩阵和增广矩阵中的最高阶非零行列式是同阶的，即两个矩阵的秩相同，这正是现代解方程组的条件。

大量的科学技术问题，最终往往归结为解线性方程组，因此线性方程组的数值解法得到发展，并在计算数学中占有重要地位。

矩阵(**matrix**) 数学中重要的基本概念之一。是代数学的一个主要研究对象，也是数学研究和应用的一个重要工具。

矩阵的理论起源，可追溯到 18 世纪，见于著作则是在 19 世纪。高斯在 1801 年，艾森斯坦在 1844—1852 年先后把一个线性变换的全部系数作为一个整体，并用一个字母来表示。艾森斯坦还强调乘法次序的重要性。这些工作孕育了矩阵

的思想。

矩阵这个词是西尔维斯特首先使用的(1850)。矩阵的概念直接从行列式的概念而来,它作为表达一个线性方程组的简单记法而出现。脱离线性变换和行列式,对矩阵本身作专门研究,开始于英国数学家凯莱。1855年以后,凯莱发表了一系列研究矩阵理论的文章。他引进了关于矩阵的一些定义,如矩阵相等、零矩阵、单位矩阵、矩阵的和、矩阵的乘积、矩阵的逆、转置矩阵,对称矩阵等,并借助于行列式定义了方阵的特征方程和特征根。在1858年的文章中,凯莱证明了一个重要结果:任何方阵都满足它的特征方程。这个结果现称为凯莱一哈密顿定理。由于凯莱的奠基性工作,一般认为他是矩阵理论的创始人。

法国数学家埃尔米特、德国数学家克莱布什等研究了一些特殊矩阵的特征根的性质。德国数学家弗罗贝尼乌斯对矩阵理论做了进一步的工作,他探求矩阵的最小多项式,并指出最小多项式是唯一的(后来亨泽尔证明了这个结论);引进矩阵的秩的概念;整理了由西尔维斯特和外尔斯特拉斯提出的不变因子和初等因子的理论;给出凯莱一哈密顿定理的一般性证明;定义了正交矩阵并研究其性质。若尔当利用相似矩阵和特征方程的概念,证明了矩阵经过变换可相似于一个“标准型”,即现在所谓的约尔当标准形。在若尔当工作的基础上,弗罗贝尼乌斯讨论了合同矩阵与合同变换。弗罗贝尼乌斯关于矩阵理论的工作1877年发表在《克雷尔杂志》上。至此,矩阵论的经典内容已建立起来。

1892年,美国数学家梅勒茨引进矩阵的超越函数的概念,并把它写成矩阵的幂级数的形式。凯莱把超复数视为矩阵的思想在19世纪末、20世纪初得到发展,与此相关形成矩阵不变量的理论。20世纪初由于积分方程的发展开始了对无穷矩阵的研究。由于近代物理的需要还开展了元素属于抽象域的矩阵的工作。矩阵方程论、矩阵分解论和广义逆矩阵等矩阵的现代理论也逐步发展起来。矩阵及其理论现已广泛地应用到现代科技的各个领域。

群(group) 只具有一种运算的抽象代数结构,是数学中的重要概念之一。研究群的性质的理论称为群论,它是抽象代数学的重要组成部分。

最先产生的是n个文字的一些置换所构成的置换群。在18世纪末至19世纪初,代数学的中心问题是五次以上的一元多项式方程是否可以用根式求解的问题。拉格朗日、鲁菲尼、阿贝尔和伽罗瓦先后研究并解决了这个问题,他们引入和发展的置换群概念是最终产生抽象群论的第一个主要来源。

在数论中,拉格朗日和高斯曾研究具有同一判别式的二次型类,对于两个型的“复合”乘法,构成了一个交换群。戴德金在1858年,克罗内克在1870年给出了有限群和有限交换群的抽象定义,凯莱在1878年发表了关于有限抽象群的研究工作。这些都是产生抽象群论的第二个主要来源。

在若尔当系统介绍并发展伽罗

瓦理论的专著影响下,C. F. 克莱因在 1872 年在他著名的"埃尔朗根纲领"中指出,无限变换群可用来对几何进行分类,并给出这些群连续的函义。C.F. 克莱因和庞加莱在研究自守函数的过程中曾用到其他类型的无限群。1870 年前后,李开始研究连续变换群的概念,并用它们阐明微分方程的解,将微分方程进行分类。1874 年,李建立了连续群的一般理论。这些工作是导致抽象群论的第三个主要来源。

1854 年凯莱就接触过抽象群的概念,1878 年,他又发表论文研究有限抽象群,指出一个群可以看作一个普遍的概念;德国数学家内托在他的专著《置换理论及其对代数的应用》中阐明群的概念的抽象性,还探讨了同构和同态概念;C. F. 克莱因的学生迪克把前述三个主要来源的工作都纳入抽象群的概念之中,在 1882—1883 年的论文中建立了(抽象)群的定义,并明确地运用群的生成子的概念。到 19 世纪 80 年代,数学家们终于成功地概括出抽象群论的公理体系,大约在 1890 年得到确认。20 世纪初,美国数学家亨廷顿、穆尔和迪克森等都给出过抽象群的种种公理系统,这些公理系统和现代的一致。

抽象群的公理体系建立之后,数学家们建立了抽象群的一些定理,并且发展了抽象群的许多研究方向,如确定具有给定阶的群的全体,确定复合群或可解群与单群,特别是建立有限群的矩阵表示论,这些工作表明有限群论已经形成。在这方面做出重要贡献的有德国数学家弗罗贝尼乌斯、英国数学家伯恩赛德和犹太血统的数学家舒尔等。苏联数学家施密特在 1916 年还发表了无限群论的专著《抽象群论》。抽象群论的发展最终导致 20 世纪 30 年代抽象代数学的兴起。

到 20 世纪 80 年代,群的概念已经普遍地被认为是数学及其许多应用中最基本的概念之一。它不但渗透到诸如几何学、代数拓扑学、函数论、泛函分析及其他许多数学分支中而起着重要的作用,还形成了一些新学科如拓扑群、李群、代数群、算术群等,它们还具有与群结构相联系的其他结构如拓扑、解析流形、代数簇等,并在结晶学、理论物理、量子化学以至编码学、自动机理论等方面,都有重要的应用。作为推广"群"的产物:半群及幺半群理论及其近年来对计算机科学和对算子理论的应用,也有很大的发展。群论的计算机方法和程序的研究,已经迅速地发展。

有限群(**finite group**) 具有有限多个元素的群,是群论的重要内容之一。其所含元素的个数,称为有限群的阶。有限群可分为两大类:可解群与非可解群(即单群)。

有限群的研究起源很早,伽罗华、若尔当等人的工作就是确定了某些类型的有限群。如何确定可解群和单群是抽象群理论建立后的一个重要发展方向。德国数学家赫尔德在 1889 年以后的若干年内,详细地研究了单群和可解群,证明了:一个素数阶循环群是单群,n 个($n\geq 5$)文字的全部偶置换组成的交换群是单群。他还发现了许多其他有限

的单群。赫尔德和若尔当还建立了在有限群中的若尔当－赫尔德合成群列和若尔当－赫尔德定理。在19世纪末，德国数学家弗罗贝尼乌斯、迪克和英国数学家伯恩赛德等都致力于可解群的研究。20世纪初伯恩赛德证明的关于 $p^a q^b$（p、q 是素数）必是可解群的定理，导致了对有限单群进行分类的重要研究。美国数学家汤普森和菲特在20世纪60年代初证明了有限群中长期悬而未决的一个猜想（伯恩赛德猜想）：奇数阶群一定是可解群。推动了有限群理论的发展。有限单群的完全分类，即找出有限单群所有的同构类，经过上百名数学家约40年的共同努力，终于在1981年得到解决，这是数学史上的一个非凡成就。

置换群(permutation group) 由置换组成的群。n 元集合 $\Omega=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 到它自身的一个一一映射，称为 Ω 上的一个置换或 n 元置换。

置换群的研究开始于拉格朗日和鲁菲尼。拉格朗日在他1770年关于方程可解性的著作里，引进了 n 个根的一些函数进行研究，开创了置换群的子群的研究，得到"子群的阶整除群的阶"这一重要结果。鲁菲尼在1799年的专著《方程的一般理论》中，对置换群作了详细的考察，引进了群的传递性和本原性等概念。在拉格朗日和鲁菲尼工作的影响下，柯西发表了关于置换群的重要文章(1815)。他以方程论为背景，证明了不存在 n 个字母（n 次）的群，使得它对 n 个字母的整个对称群的指数小于不超过 n 的最大素数，除非这个指数是2或1。伽罗瓦对置换群的理论做出了最重要的贡献，他引进了正规子群、两个群同构、单群与合成群等概念，发展了置换群的理论。可惜他的工作没有及时为数学界所了解。柯西在1844—1846年间，写了一大批文章全力研究置换群。他把许多已有的结果系统化，证明了伽罗瓦的断言：每个有限（置换）群，如果它的阶可被一个素数 p 除尽，就必定至少包含一个 p 阶子群。他还研究了 n 个字母的函数在字母交换下所能取的形式值（即非数字值），并找出一个函数，使其取给定数目的值。

置换群的理论（主要指伽罗瓦的工作）在1870年由若尔当整理在他的《置换与代数方程》之中，他本人还发展了置换群理论及其应用。

群表示论(group representation theory) 用具体的线性群（矩阵群）来描述群的理论，是研究群的最有力的工具之一。

早在1854年，英国数学家凯莱就指出，任何有限抽象群都能用一个置换群来表示。若尔当在1878年首创置换群的线性变换表示，即把置换群用形如

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = 1,2,\cdots,n$$

的线性变换来表示。他的工作在19世纪末和20世纪初由弗罗贝尼乌斯和伯恩赛德等人推广到一切有限抽象群的表示之中。弗罗贝尼乌斯对有限群引进了可约和完全可约表示的概念，而且证明了一个正则表示（正则表示的概念由美国数学家皮尔斯在1879年引进）包含所有不

可约表示。他在1897—1910年间还证明了许多其他结果。例如，仅存在少数几个不可约表示，其他所有表示都是由它们合成的。他的工作被犹太血统的数学家舒尔所改进。

伯恩赛德在20世纪初独立地开创了群表示论的工作。他在1905年给出了一个群可约，其 n 个变量的线性变换群的系数所应满足的一个充要条件。有限群的表示理论已经引出了抽象群的一系列重要定理。在20世纪上半叶，表示理论已经推广到连续群。

无限群(infinite group) 元素个数为无限的群。拓扑群、李群、典型群、代数群、算术群等都是无限群。

无限群的研究开始于19世纪下半叶。正当抽象群的概念形成之际，数学们注意到了一类元素个数为无限的群。弗罗贝尼乌斯在他1879年的文章中开始提到抽象群，而德国数学家C.F.克莱因在他著名的"埃尔朗根纲领"中则使用无限变换群对几何学进行了分类。C.F.克莱因和庞加莱在他们关于自守函数的工作中曾经用到离散型的无限群，即不连续群。挪威数学家李在1883年关于连续群的文章中引进了无限连续群，他借助于一种微分方程来定义这种群，所得的变换并不依赖于有限多个连续的参量，而是依赖于任意函数，这种无限群称为无限连续李群(见李群)。

无限群论在20世纪初已有专著，如苏联数学家施密特在1916年发表的《抽象群论》可为代表。20世纪30年代以来，无限群研究有了迅速的发展。许多有限群的结果都被推广到无限群上去，无限群所特有的一些问题，如自由群、群的本原类、伯恩赛德问题等也得到深入研究。无限群论在研究一般代数系统中起到了示范作用。

交换群(commutative group)

其运算适合交换律的群，或称阿贝尔群。挪威数学家阿贝尔，在研究了高次方程的根式求解时，除了五次方程以外，他讨论了更广一类的方程，现称为阿贝尔方程。其全部根都是其中一个根的有理函数，设 x_1 是 n 次阿贝尔方程的一个根，其全部根则为 $x_1, Q_1(x_1), Q_2(x_1), \cdots, Q_{n-1}(x_1)$，其中 Q_i $(i=1,\cdots,n-1)$ 是有理函数，并且对于任意的 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$，有 $Q_i(Q_j(x_1))=Q_j(Q_i(x_1))$。后人发现，阿贝尔方程是具有交换律的伽罗瓦群的方程。为了纪念阿贝尔，后人称交换群为阿贝尔群。

交换群是一般群论中的一个独特分支。在拓扑学和代数学中常常构造一些交换群，作为讨论问题的工具。例如，拓扑学中的基本群、同调群、代数学中的布绕尔群等等。交换群论与代数拓扑、模论、同调代数、环论等有密切的联系。

李群(Lie group) 由挪威数学家李创立的一类连续变换群。

1870年前后，李开始研究连续变换群的概念，并用它们阐明微分方程的解，将微分方程进行分类。1874年，他建立了李群的一般理论。一个李群可以表示成如下形式：

$x_i'=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 f_i 对 x_i 和 a_i 都是

解析的，x_i 是变量而 a_i 是参数，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 n 维空间中的一点。变量或参数都取实数值或复数值。1883 年，李借助于一组微分方程定义连续变换群。他的目的是用各种不同的方法把常微分方程的不同类型化成可由积分求解的形式，并建立起它们之间的一致性。李证明，如果一阶常微分方程接受由某个无穷小变换所确定的变换群，那么这个微分方程的解就可由积分式表达，他还考查了许多种带有已给变换的方程。这样一来，李就依据无穷小变换把微分方程进行分类。

李群理论在最初的相当长一段时间内仅与一些微分方程的积分有联系，而与数学的其他分支关系不大。在 19 世纪的最后 10 年以及 20 世纪，李群理论在各种不同方向，主要是代数和拓扑方面得到了迅速的发展，成为数学的一个重要分支。

算术群（**arithmetic group**） 李群中带有算术性质的一类离散子群。算术群是较为广泛的一种群，诸如有限群、有限生成的交换群，无挠的有限生成幂零群以及有限生成的非交换自由群等都是算术群。

最早研究的算术群是 $SL(2, Z)$，称为模群。早在 19 世纪，高斯和戴德金等人在研究椭圆函数时，就涉及模群 $SL(2,Z)$ 及模群下不变的模函数，高斯在讨论正定二元二次型的整等价分类时，也已经知道模群的基本域。20 世纪 30 年代，德国数学家西格尔研究算术群 $SL(n, Z)$，并作出了它的基本域，称为西格尔区域，而 $SL(2,Z)$ 称为西格尔模群。至于一般线性代数群中算术群的研究，则是在 20 世纪 60 年代由法国数学家博雷尔和另一位数学家蒂茨的工作开始。随后，赛尔伯格与其他数学家提出了一个著名的猜想：R－秩大于 2 的任一半单李群的不可约格皆是算术的。经过许多著名数学家的努力，这一猜想终于在 1974 年由苏联数学家马尔古利斯所证明。这些工作丰富了算术群的研究内容，推动了算术群理论的发展。

线性代数群（**Linear algebraic group**） 具有仿射代数簇结构的群，它是抽象群论与代数几何相结合的产物。线性代数群的研究主要按代数学观点进行，并成为与李群理论相平行的一个独立分支。

线性代数群理论的萌芽，是在 19 世纪末叶。法国数学家皮卡等人的工作实际上已经研究了复数域上的线性代数群。皮卡把这些群应用到线性微分方程的伽罗瓦理论中去。但是他的工作在半个世纪内没有引起人们的注意。线性代数群理论的正式出现，是由法国数学家 É·嘉当和德国数学家外尔在 20 世纪初对李群和李代数的深入研究，以及法国数学家谢瓦莱和中国数学家段学复以李代数的方法对特征为零的任意域上的线性代数群的讨论而促成的。1955 年前后，线性代数群理论由法国数学家博雷尔与谢瓦莱建立起来。后经许多数学家的发展，形成了一个较完美的数学体系，并对基础数学的许多领域如半单李群及其算术子群、典型群、有限单群、不变量理论等的发展起了重要作用。

环(ring) 一个具有两种二元运算的代数系统,是代数学的基本概念之一。

环的概念,最初是在19世纪末戴德金研究代数数时引进的。他指出,所有代数整数的集合形成一个环,任何一个特殊代数数域中的代数整数也形成环。后来在克罗内克的博士论文中,也使用了环的概念。环这个词是由希尔伯特引进的。关于环的抽象理论是在20世纪初开始建立的。美国数学家韦德伯恩对此做出了重要贡献,他在1905年首先证明了一个重要定理:任何有限除环都是交换域。在他1907年发表的著名论文中,研究了线性结合代数,这种代数实际上是环。环和理想(环的具有某种性质的子集)的系统理论是由德国数学家E·诺特给出的。虽然在她开始工作时关于环和理想的许多结果都已经得到,但她把这些结果系统化和公理化,建立了抽象的理论。她对许多已有的结果经过适当地确切表述而成为抽象理论,例如她把希尔伯特的基定理(1890)重新表述为:一个系数环上的任何多个变量的多项式所成的环,当这系数的环有一个单位元素和一组有限基时,这多项式环本身也有一组有限基。这样一来,她把不变量理论也纳入抽象代数之中。*E*.诺特还把多项式环的理想论包括在一般理想之中,为代数整数的理想论和代数整函数的理想论建立了共同的基础。*E*.诺特对环和理想所做的深刻研究在1926年臻于完成,一般认为,她的工作标志着抽象代数学的形成。

交换代数(commutative algebra) 以交换环为主要研究对象的一门代数学科。它是以代数数论和代数几何为背景而产生与发展的,并为这两个古老的数学分支提供了新的统一的工具。

18世纪末到19世纪中期,高斯和库默尔等人在研究关于有理整数性质和方程的有理整数解的时候,把这些初等数论问题放在二次域、分圆域以及它们的代数整数环中考虑,经过戴德金和希尔伯特等人的抽象化和系统化,形成了研究代数数域和它的代数整数环的一个新学科即代数数论。比数论稍晚些时候,几何学也经历了代数化过程。从19世纪末开始,由于希尔伯特等人的工作,特别是20世纪20—30年代德国数学家E·诺特关于理想理论和克鲁尔建立的赋值论、局部环理论、和维数理论,为古典几何提供了全新的代数工具。从此,交换代数成为一门独立的学科。

20世纪50年代以后,交换代数得到很大发展,模论的研究,同调代数和各种上同调理论的建立,特别是法国数学家格罗唐迪克的概型理论,对于交换代数的发展起了巨大的推动作用。利用概型理论,比利时数学家德利涅于70年代初证明了著名的韦伊猜想(见韦伊猜想)。

现在,交换代数的运用,已深入到微分与代数拓扑,多复变函数论、奇点理论、甚至偏微分方程等学科。

线性结合代数(linear associative algebra) 一种代数系统,类似于群、环、域,而更接近于环。

线性结合代数的研究，开始于19世纪50年代。在哈密顿发现四元数的启示下，数学家们陆续得到许多超复数系统。首先，凯莱给出实四元数的一个八单元推广——八元数；紧接着哈密顿引进拟四元数，即带有复系数的四元数；稍后，英国数学家克利福德创立另一类型的超复数，叫作克利福德代数，在这个系统中，具有单元 $1, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$。每个单元的平方满足 $e_i^2=-1$，而对任何 $i \neq j$ 有 $e_ie_j=-e_je_i$，任两个单元的乘积是一个新的单元，所有乘积是可结合的。

到19世纪70年代，又涌现了大量的新的超复数系统。美国数学家B.皮尔斯1871年发表著名论文《线性结合代数》，总结了这方面的工作。他指出，“线性”意味着任何两个单元的积可以化成另外一个单元，而结合则表明乘法是结合的。线性结合代数的理论到70年代末才建立起来，弗罗贝尼乌斯在1878年、C.S.皮尔斯在1881年先后证明了：具有有限个原始单元的，有乘法单位元素的实系数线性结合代数只有实数、复数和实四元数系统。外尔斯特拉斯和戴德金也得到了关键性的结果。到19世纪末(1898)，德国数学家胡尔维茨证明了实数、复数、实四元数和克利福德代数是仅有的满足乘法定律的线性结合代数。

这个课题的研究，一直活跃到20世纪，美国数学家迪克森、韦德伯恩在这方面都有重要贡献。

李代数(**Lie algebra**)　一类重要的非结合代数。非结合代数是环论的一个分支，与结合代数有密切联系。结合代数的定义中把乘法结合律删去，就是非结合代数。

李代数是挪威数学家李在19世纪后期研究连续变换群时引进的一个数学概念。他是从探讨具有 r 个参数的有限单群的结构开始的，并发现李代数的四种主要类型。法国数学家É·嘉当在1894年的论文中给出变数和参变数在复数域中的全部单李代数的一个完全分类。他和德国数学家基灵都发现，全部单李代数分成四个类型和五个例外代数，嘉当还构造出这些例外代数。嘉当和德国数学家外尔还用表示论来研究李代数，后者得到一个关键性的结果。由于基灵，É·嘉当和外尔的工作，李代数的理论得到完善和发展，其理论与方法已渗透到数学和理论物理的许多领域。

布尔代数(**Boolean algebra**)　1847年由英国数学家布尔在研究思维规律时提出的一种特殊的格，也称逻辑代数。是用数学方法研究逻辑学的最初尝试。

布尔用数学方法研究逻辑问题，成功地建立了第一个逻辑演算。他用等式表示判断，把推理看作等式的变换。这种变换的有效性不依赖人们对符号的解释，只依赖于符号的组合规律。这一逻辑理论，既可以进行公式推演，又可以对命题取作数值。例如，可以把真命题取作1值，假命题取作0值，由此复杂的命题仅作数值计算就可以求得它为真值还是假值了。这样把已给的公式中出现的符号的逻辑解释放在一

边，把它转变为表示数量的符号，但只能取 0 或 1，对它实现求解的一切必须的步骤，最后再还给它以逻辑的解释。这一理论在布尔之后虽然也有些改进，但它的基本轮廓是布尔建立起来的，因此，人们称之为布尔代数。

布尔代数到 20 世纪 30—40 年代才有了新的进展，大约在 1935 年，美国数学家斯通首先指出布尔代数与环之间的联系，还得到了现在所谓的斯通表示定理。他的工作使布尔代数在理论上有了一定的发展。布尔代数在代数结构、逻辑演算、集合论、拓扑空间理论、测度论、概率论、泛函分析等数学分支中均有应用。1967 年以后，布尔代数在公理集合论及模型论的研究中也起到一定作用。

模(module) 在线性空间基础上建立起来的一种代数系统，是代数学的一个重要工具。

模的概念可以追溯到 19 世纪后期德国数学家克罗内克的工作，他在研究代数数的理论中，考虑了多项式环上的模的概念。在他所创立的有理函数域论中，引进了在域上添加代数量生成扩域的概念和“模系”概念(相当于现代的“理想”)，实际上证明了有理系数多项式环 $Q[X]$ 模一个不可约多项式 f 所生成的模系的同余类域同构于 $Q[\theta]$(θ 是 f 的一个根)。20 世纪 20 年代末，德国数学家 E·诺特研究了模在表示论以及代数的结构理论上所起的作用，使模开始成为代数学的一个重要工具。20 世纪 40 年代发展起来的同调代数，更以模为其主要研究对象，并且对环论的发展起到促进作用。

域(field) 可交换的除环叫做域，它是代数学的基本概念之一。

域的概念在 19 世纪代数学的发展中逐步形成并明确起来。在伽罗瓦的著作中就引用了域的概念，他的域就是由方程的系数生成的域，他的扩域是经添加方程的一个根作成的。在戴德金和克罗内克关于代数数的著作中，从完全不同的角度引入了域的概念。“域”这个词也是戴德金提出来的。在 19 世纪，已经知道的具体的域有：有理数域、实数域、复数域、代数数域和有理函数域。1908 年，德国数学家亨泽尔又引进了一类 P－进域，并进行了系统研究。

域的抽象理论开始于德国数学家韦伯的工作。1893 年他曾给伽罗瓦理论以抽象的阐述，其中引进域的概念作为群的派生，并强调群和域是代数的两个主要概念。1903 年，迪克森和亨廷顿建立了一个独立的域的公理体系。

德国数学家施泰尼茨在韦伯的工作的影响下，对抽象域进行了综合研究。按照他的观点，每一个域都可以从它的素域(所有子域的公共元素所构成的子域)出发，经过适当的添加而得到。由此引进了代数扩张和域的特征的概念。他还研究了伽罗瓦方程理论在域中的有效性问题。他的研究成果都包含在他写于 1910 年的论文《域的代数理论》中。

19 世纪末到 20 世纪初美国数学家得到有限域的一些结果，如有限抽象域都与某一个伽罗瓦域同构

(穆尔,1893);任何有限域必须是交换的(韦德伯恩、迪克森,1905)等等。

20 世纪以来,对抽象域的研究又有新的进展,中国数学家曾炯之做出了一定贡献。

伽罗瓦理论(**Galois theory**) 用群论的方法来研究代数方程的解的理论。在 19 世纪末以前,解方程一直是代数学的中心问题。早在古巴比伦时代,人们就会解二次方程。在许多情况下,求解的方法就相当于给出解的公式。但是自觉地、系统地研究二次方程的一般解法并得到解的公式,是在公元 9 世纪的事。三、四次方程的解法直到 16 世纪上半叶才得到。从此以后,数学家们转向求解五次以上的方程。经过两个多世纪,一些著名的数学家,如欧拉、旺德蒙德、拉格朗日、鲁菲尼等,都做了很多工作,但都未取得重大的进展。19 世纪上半叶,阿贝尔受高斯处理二项方程 $x^p-1=0$(p 为素数)的方法的启示,研究五次以上代数方程的求解问题,终于证明了五次以上的方程不能用根式求解。他还发现一类能用根式求解的特殊方程。这类方程现在称为阿贝尔方程。阿贝尔还试图研究出能用根式求解的方程的特性,由于他的早逝而未能完成这项工作。伽罗瓦从 1828 年开始研究代数方程理论(当时他并不了解阿贝尔的工作),到 1832 年,他完全解决了高次方程的求解问题,他建立了用根式构造代数方程的根的一般原理,这原理是用方程的根的某种置换群的结构来描述的,后人称之为"伽罗瓦理论"。伽罗瓦理论的建立,不仅完成了由拉格朗日、鲁菲尼、阿贝尔等人开始的研究,而且为开辟抽象代数学的道路建立了不朽的业绩。伽罗瓦理论在后来施泰尼茨建立的交换域理论中起到重要作用。

戴德金曾把伽罗瓦的结果解释为关于域的自同构群的对偶定理。随着 20 世纪 20 年代拓扑代数系概念的形成,德国数学家克鲁尔推广了戴德金的思想,建立了无限代数扩张的伽罗瓦理论。伽罗瓦理论发展的另一条路线,也是由戴德金开创的,即建立非交换环的伽罗瓦理论。1940 年前后,美国数学家雅各布森开始研究非交换环的伽罗瓦理论,并成功地建立了交换域的一般伽罗瓦理论。

代数基本定理(**fundamental theorem of algebra**) 关于多项式根的定理,即一个次数不小于 1 的复系数多项式 $f(x)$ 在复数域内有一根。由此推出,一个 n 次复系数多项式 $f(x)$ 在复数域内恰有 n 个根(重根按重数计算)。

这个定理最早在荷兰数学家吉拉尔的论著《代数新发现》(1629)中给出,他推测并断言 n 次多项式方程有 n 个根,但是没有给出证明。欧拉在 1742 年在给朋友的信中断定:任意次数的实系数多项式都能够分解成一次和二次因式的乘积。达朗贝尔、拉格朗日和欧拉都曾给出代数基本定理的证明,但他们的证明都不完全。高斯在 1799 年给出了第一个实质性的证明,但仍欠严格。后来他又给出另外三个证明(1814—1815,1816,1848—1850)。高斯研究

代数基本定理的方法开创了探讨数学中存在性问题的新途径。20世纪以前,代数学所研究的对象都是建立在实数域或复数域上的,因此代数基本定理在当时曾起到核心的作用。

泛代数(universal algebra) 以一般代数系统为研究对象的一个数学分支。在一般的群、环、布尔代数、模、格、半群等等概念之上再抽象,得出能概括它们的共性的更加一般的概念。

泛代数的研究开始于英国数学家怀特海的专著《泛代数》(1898),他在这里提出了一种代数学的新观点,即代数学是按照与含义无关的一种逻辑发展,“显然我们可以用我们愿意用的任何符号,并按我们选定的任何法则去处理它们”。他的这种新方法直到20世纪30年代末美国数学家G·伯克霍夫的著名工作,才真正发展起来。G·伯克霍夫研究了代数系统的理论结构表示,在怀特海的工作的启发下,建立了这种更加一般的代数学。泛代数在数理逻辑中有重要应用。

范畴(category) 从数学的各个领域中概括出来的一种高度抽象的数学系统。例如,集合论研究集合与映射;群论研究群与群同态;等等。20世纪中期,数学家们认为有必要将各个领域中的研究对象各自合在一起成为一个整体。于是,所有的集合与映射组成集合的范畴,所有的群与群同态组成群的范畴,等等。此外,范畴与范畴之间存在的内在联系与变换,又产生了函子的概念。范畴与函子的概念和理论是由(波兰籍)美国数学家艾伦伯格和麦克莱恩在1945年发展同调代数的工作中产生的。这一理论一经提出就受到普遍重视并得到迅速发展,且为数学家们引进到许多数学分支中。例如,戈德门特于1958年引进到拓扑学中;埃雷斯曼于1958年引进到微分几何学中;格罗唐迪克、迪厄多内于1960年引进到代数几何中;等等。

同调代数(homological algebra) 代数学的一个重要分支。

同调代数源于代数拓扑学,在20世纪40年代发展起来。最早出现的是群的上同调和同调,这是围绕着解决赫维茨(波兰代数拓扑学家)问题而引出的。这个问题的解决还导致波兰数学家艾伦伯格和美国数学家麦克莱恩在1945年引进了群的上同调群。与此同时,结合代数的上同调群,李代数的上同调理论也都被引进。这些分别的理论于1956年为H·嘉当和艾伦伯格用范畴的语言统一起来。

同调代数在数论和群论中,以至在代数几何学和代数拓扑学中都有重要的应用。

数论(theory of number) 研究数的规律,特别是研究整数性质的数学分支。

数论是最古老的数学分支之一,古希腊人和中国古人等很早就有了数论知识。例如中国古人公元前11世纪就知道一组勾股数;公元4世纪的欧几里得就把自然数分成1、素数和复合数,并证明了算术基本定理——每个复合数都可以唯一

地表成素数的乘积。素数分布也是数论最早研究的课题之一,欧几里得证明了素数有无穷多个,他还给出求两个自然数的最大公约数的方法,即所谓欧几里得算法。无独有偶,公元1世纪成书的中国典籍《九章算术》中也给出了相同的算法。公元前250年,埃拉托塞尼发明了筛法,可以之求出不超过某个自然数N的全部素数。后来的素数表都是由此发展而来的。

勾股数问题属于不定方程,中国古人,古希腊人以及古巴比伦和古印度人对此都有所研究。最简单的不定方程是一次不定方程$ax+by=1$,其中a、b为整数且$(a,b)=1$。《九章算术》中最先给出不定方程组的求解问题,中国5世纪的《张邱建算经》中提出的“百鸡问题”也是一次不定方程求解问题。一次同余方程$ax\equiv c(\mod m)$的求解问题等价于求解一次不定方程$ax+my=c(o<x\leqslant m)$问题。《孙子算经》中的“物不知其数问题”是一个著名的同余式(不定方程)求解问题。公元13世纪,中国的秦九韶在其名著《数书九章》中系统解决了一次同余式组求解问题,是古代世界数论研究的一大成果。公元3世纪的古希腊人丢番图研究过不定方程,因此又把不定方程称为丢番图方程。不定方程研究虽然有悠久的历史,但至今得到完满解决的问题并不多,仍然是最活跃的数学领域之一。

把整数表为某种整数之和的形式,也是数论的经典课题之一,这一课题领域称为堆垒数论,著名的哥德巴赫猜想和华林问题都属于这一领域。

对于任何实数α,如何构造有理数$\frac{h}{k}(k>0)$来逼近α,是数论的另一类问题。公元5世纪,中国的何承天和祖冲之就曾分别建议用$\frac{22}{7}$(约率)与$\frac{355}{113}$(密率)来近似表示π值,这两个分数都是π的渐近分数。狄利克雷曾证明:对任意实数α及$K>1$,都存在着整数h、k使$0<k<K$及$|\alpha-\frac{h}{k}|<\frac{1}{k}K$。有理逼近的研究与不定方程研究有密切的关系,因而又称为丢番图逼近。研究实数的种种有理逼近问题,是数论中的重要问题。

用几何方法研究某些数论问题形成了一个新的数论分支——数的几何,它起源于拉格朗日和高斯等人的工作,由闵科夫斯基的著作而系统化。特别应用于各种丢番图逼近问题。

特殊类型的数,也是数论最早研究的问题之一,毕达哥拉斯就研究过完全数和亲和数,而且直至今日,这两种数的研究仍是数论的重要课题。费马数和梅森数的研究也有数百年的历史了,至今还有着相当的吸引力。

超越数的研究也早就成为数论的内容,这项研究取得丰硕的成果,例如,运用初等方法就可证明e和π是超越数,利用复变函数论则可证明$2^{\sqrt{2}}$,i^i等是超越数。但也存在着许多著名的难题,如欧拉常数及$e+\pi$是否超越数等。

数论可按采用的方法不同而分

为不同的分支理论。一般地，采用算术推导方法来论证数学命题的分支称为初等数论。把一个算术问题化为一个分析问题，然后用分析方法或其他成果来处理这个问题，从而导出算术的结果，当然，这时得到的常常是具有渐近性质的结果，这样得出的分支叫做解析数论。如果在解析数论研究中，不用到单复变函数的柯西定理或类似深度的分析工具，则称为解析数论的初等方法。

解析数论开始于欧拉 18 世纪中叶的一些研究，而狄利克雷的工作(19 世纪 30—40 年代)奠定了解析数论的基础。许多重要的数论问题，都是由解析数论才得到解决或得到深入的研究，如素数分布、堆垒数论问题，其中最著名的哥德巴赫猜想和华林问题，都成为重要的解析数论问题。黎曼 ζ 函数及关于它的黎曼猜想具有十分重要的意义，一系列重要的数论问题，特别是与素数有关的问题的完满解决，尚有待于黎曼猜想的解决，这是当代数论的一大难题。

埃拉托塞尼筛法在解析数论中得到改造，成为一种著名的初等方法在数论中得到广泛的应用，关于哥德巴赫猜想研究的进展几乎就是筛法的改进的过程。圆法则是由哈代和利特伍尔德建立起来(20 世纪 20 年代)的另一种解析数论方法：把[0,1]分成优弧和劣弧，包含较小分母的分数的小区间组成优弧，[0,1]的其余部分为劣弧，把一些数论问题归结为劣弧上的积分的研究。劣弧上积分的估计则归结为在劣弧上指数和的估计。这样一来，使用圆法，可把许多著名数论问题(如哥德巴赫问题和华林问题)都转化为指数和估计的纯分析问题。华罗庚、韦伊、维诺格拉多夫等人做出突出贡献。

在对费马猜想及二次域的研究中，人们开始把整数的问题放到更大的范围来考虑，开始研究代数整数及代数数域的性质，由此发展出代数数论这一分支学科，代数数论的方法立即应用到相当多的数论问题研究中，得出了一批成果，这些成果几乎可以用到每一个数学领域中去。代数数论是当代数论研究最活跃的分支之一。

由于数论问题很具体又很特殊，所以在数论中发展起来的各种方法常常是很有用的。例如，指数和的估计方法和筛法在理论物理学、概率统计中有重要的应用。尤其近几十年来，电子数字计算机的发展和广泛应用，使数论有了非常广阔的直接应用。这是由于计算机的数值计算要求问题的离散化，离散数学日趋重要，而数论无疑是离散数学的基础之一，从而得到直接的应用。例如高维数值积分的数论网格法中，使用了大量的数论方法和成果。在编码和数字信号处理问题中，数论也有重要的应用。

数论是最古老的数学分支，又是始终活跃着的前沿数学领域；数论是最典型的纯粹数学，它又是日益得到广泛直接应用的新“应用数学”分支。

初等数论(**elementary number theory**)　数论中以算术方法为主要研究方法的一个分支，是数

论的最古老的分支。在各文明古国的古代文化中都有着若干初等数论内容，如关于勾股数的知识(见不定方程)。古希腊的毕达哥拉斯就研究过整数的可除性问题，提出奇数、偶数，素数、复合数等概念，以及完全数和亲合数等问题。公元前300年，欧几里得进而证明了素数有无穷多个，并给出求两个正整数的最大公因数的算法，建立了整除性的初步理论。公元3世纪的丢番图则研究了若干简单的不定方程。中国古人也较早进行了初等数论研究，除了关于勾股数的早期认识之外，商周之际成书的《周易》表明，中国古人当时已有了奇数、偶数概念，并初步利用了数的同余性质；公元1世纪成书的《九章算术》最先提出不定方程组(一次)的求解问题("五家共井"问题)并给出一组解；公元4世纪的《孙子算经》提出著名的"物不知数"问题——一次同余式组的求解问题；5世纪的《张邱建算经》提出著名的一次不定方程组"百鸡问题"并给出几组不同的整数解；13世纪秦九韶的《数书九章》中用"大衍求一术"完全解决了一次同余式组的求解问题，国际上称求解的算法为中国剩余定理。这一定理，在西方是19世纪由高斯重新发现的。

近代初等数论的发展得益于费马、欧拉、拉格朗日、勒让德和高斯等人的工作。1640年，费马提出一个他未给出证明的命题：如果 p 是素数，那么对于任何整数 a，a^p-a 都是 p 的倍数，此即费马小定理。欧拉1736年证明了它，1760年，欧拉把这一定理推广到复合数的情况。1772年，拉格朗日证明了费马提出的另一个定理：每一个正整数都能够表成四个整数的平方和形式。1798年勒让德的第一部数论教科书出版。1801年，高斯的名著《算术研究》问世，在书中，他证明了二次互反律、原根存在的充要条件等著名结果。这些工作奠定了初等数论的基础，使之走上独立发展的道路。二次互反律在数论史上起了重要的作用。

初等数论中某些问题的研究，促使形成新的数学分支，如不定方程和高次互反律的研究，促进了代数数论和类域论的形成和发展。采用其他数学方法研究初等数论问题有时也产生新的数论分支，如数的几何和解析数论的形成和发展。初等数论中包括着一些至今尚未解决的著名难题，如梅森数问题、完全数问题等；同时还不断产生着新的问题，如以1为首位数字的数占所有的数的比例的问题(纽科姆于20世纪初提出的)，对这两类问题的研究促进了初等数论的不断发展。初等数论是作为一门纯粹数学发展起来的，但近年来，初等数论在计算机科学、组合数学、代数编码、密码学、计算方法等领域内得到广泛的应用。这无疑从另一个角度促进着初等数论的发展。

解析数论(**analytic number theory**)　数论中，采用分析方法研究数的性质的分支叫解析数论。在数论研究中采用分析方法起源于欧拉的时代。欧拉用分析方法证明了欧拉恒等式 $\prod_p(1-p^{-s})^{-1}=$

$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$，由此给出“素数有无穷多个”的一个新证明。这个恒等式本身则被认为是算术基本定理的解析等价形式。1837年，狄利克雷用分析方法解决了首项与公差互素的算术级数中有无穷多个素数的问题（见素数定理），1839年又用分析方法推证出二次域的类数公式。可以说，狄利克雷奠定了解析数论的基础。1859年，黎曼定义复变函数$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$，即欧拉恒等式右边的级数，不过把s看作复变数，他认为素数的性质可以通过复变函数$\zeta(s)$来探讨，并且对复变函数$\zeta(s)$做了深刻的研究，取得许多重要结果。后来，人们就把$\zeta(s)$称为黎曼ζ函数。由此，研究素数分布的关键在于研究$\zeta(s)$的性质，特别是其零点性质。这样就把复变函数论的思想和方法应用于数论研究，开创了解析数论的新时代。黎曼还提出这样一个猜想：$\zeta(s)$的所有复零点都在直线$\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}$上。这就是黎曼猜想，是至今没有解决的最著名的数学问题之一。对它进行的研究推动了解析数论和代数数论的发展。1896年，J·阿达马与瓦莱－普森按黎曼指出的方向，用整函数理论，同时证明了素数定理。从此解析数论得到迅速的发展。

在数论中应用分析方法，一般有两种情况：一是数论问题本身不涉及分析概念，分析方法是作为工具使用的。有一些数论问题不用分析方法就无法解决，如前述狄利克雷的工作，堆垒数论的一些问题——三素数定理、华林问题；还有一些问题利用分析方法可使证明简化，如用母函数法证明整数分析问题的一些恒等式，堆垒数论的许多问题解的存在性的证明等。一是数论问题本身必须用分析概念才能表达清楚，例如素数定理。此外，利用分析概念还可提出新的数论问题，例如各种数论函数的阶估计及均值估计问题。

总之，解析数论起源于对素数分布问题的研究，在各种堆垒数论问题的研究中得到发展。其主要领域有素数分布、黎曼ζ函数、狄利克雷函数、堆垒数论、格点问题和解析数论方法等。

数的几何（**geometry of number**） 又称几何数论，是应用几何方法研究某些数论问题的一个数论分支。用几何方法研究数论问题缘起于拉格朗日和高斯等人以几何观点研究二次型的算术性质的工作。为了把狄利克雷和埃尔米特所建立的丢番图逼近的解析理论进行简化，闵科夫斯基在19世纪末把格和凸集等几何概念引入数论。1891年，他发表了这方面的第一篇论文，1896年，出版了这方面的第一本著作，书名就叫《数的几何学》，从此，数的几何成了数论的一个独立的分支，并在丢番图逼近和代数数论研究中得到广泛的应用。

格和凸集是数的几何的两个基本概念，闵科夫斯基就研究了对称凸集，并得到一些基本的性质，表述为数的几何第一基本定理：如果$\mathcal{K}\subset R^n$是体积为$V(\mathcal{K})$的对称凸

集，且$V(\mathcal{R})\geq 2^n$，那么在$\mathcal{R}$中或其边界上必有一个非零整(格)点；以及数的几何第二基本定理：设$\mathcal{R}$是闭的对称凸集，$0<V(\mathcal{R})<\infty$，则其相继极小$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$适合不等式

$$\frac{2^n}{n!}\leq\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_nV(\mathcal{R})\leq 2^n。$$

关于$V(\mathcal{R})$，闵科夫斯基还提出一些命题，后来由拉夫卡(1943年)、西格尔(1945年)等人所证明。

代数数论(**algebraic number theory**) 数论的一个重要分支，它以代数整数，或者代数数域为研究对象。不少整数问题的解决要借助于或者归结为代数整数的研究。因此，代数数论是整数研究的一个自然的发展。代数数论的发展也推动了代数学的发展。

代数数论主要起源于对费马猜想的研究。费马猜想(不定方程$x^n+y^n=z^n(n>2)$没有$xyz\neq 0$的整数解)的证明可归结为$n=4$及n为奇素数情形的证明。19世纪中叶，库默尔试图利用n次本原单位根$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{n}}$，把方程$x^n+y^n=z^n$写成$x^n=(z-y)(z-\zeta y)\cdots(z-\zeta^{n-1}y)$，从而证明费马猜想。但这需要有一个前提，即在分圆域$Q(\zeta)$(添加单位根ζ到有理数域上生成的扩域)中，“整数”也象普通整数一样，可以唯一地分解成素数的乘积。但在狄利克雷的启发下，库默尔发现分圆域中的“整数”分解成素因子的乘积不具有唯一性。库默尔因此引入了“理想数”概念，每个“理想数”可以唯一地分解成素因子的乘积，这样建立了分圆域上的数论。戴德金把库默尔的工作系统化并推广到一般的代数数域，奠定了代数数论的基础。

高斯关于二次域的研究是代数数论的另一个重要起源。1801年，高斯发表的著名著作《算术研究》，展示了他的一个杰出的思想：把有理数域和有理整数环上的许多初等数论问题，放到更大的域和环——二次域和它的代数整数环上来研究，这也导致了代数数论的开端。

代数数论也是活跃的数学前沿理论，一方面是对一些古典问题得出新的结果。例如，高斯曾提出过两个猜想：(1)只有有限多个类数为1的虚二次域；(2)存在无限多个类数为1的实二次域。关于(1)1934年，海布雷恩证明了当$d(k)$(k为有理数域的二次扩域，$d(k)$为k的判别式)$\to\infty$时，h_k(k的类数)$\to\infty$；1935年，西格尔证明了$\lim\limits_{d(k)\to-\infty}\frac{\ln h_k}{\ln\sqrt{|d(k)|}}=1$；1966年贝克，1967年斯塔尔克证明了类数为1的虚二次域$K=Q(\sqrt{-d})$只有9个：$d=1,2,3,7,11,19,43,67,163$。猜想(2)仍在研究之中。另一方面就是不断开辟新的研究领域，如数域的阿贝尔扩张理论。1898至1899年间希尔伯特提出一个著名的猜想：希尔伯特类域猜想，1907年，富特文格勒证明了这个猜想。韦伯对推广希尔伯特类域作了大量工作，例如，推广了理想类群的概念，得到一些全新的结果。1920年，高木贞治应用韦伯的理想类群概念，推广了希尔伯特的结果，建立了完整的类域论。现在类域论已发展成为极其重要

的、成果甚丰的数学领域。

代数数论的一大特点是，不仅由它可解决一系列整数规律问题，而且它的成果几乎可以用到每一个数学领域中。

超越数论(**transcendental number theory**) 如果一个复数是某个系数不全为零的整系数多项式的根，则称此复数为代数数。不是代数数的复数，叫做超越数。

刘维尔开创了对超越数的研究，他于1844年以构造性方法证明了超越数的存在，他采用了构造性方法，实际地构造出超越数，例如复数 $z=\sum_{n=1}^{\infty}g^{-n!}$ 对 $g=2,3,\cdots$ 都是超越数。1873年埃尔米特证明了 e 是超越数，1882年，林德曼证明了 π 是超越数，从而解决了古希腊的"化圆为方"问题。由此开拓了超越数论这一领域。

19世纪超越数论的一项重要成果是林德曼-外尔斯特拉斯定理：如果 $\alpha_2,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是两两不同的代数数，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是非零代数数，则 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i e^{\alpha_i}\neq 0$。(1)

由此立即得出：如果 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在有理数域 Q 上线性无关，则 $e^{\alpha_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 代数无关(即它们不是任一有理系数多项式方程的根)。由(1)式知，如 α 是非零代数数，则 $\sin\alpha,\cos\alpha,\mathrm{tg}\alpha$ 都是超越数；如 α 是不等于0和1的代数数，则 $\ln\alpha$ 是超越数。

1900年，希尔伯特提出的23个问题中的第7问题就是一个超越数论问题：如果 α 是不等于0和1的代数数，β 是无理代数数，那么 α^β 是否超越数？1929年，格尔丰德证明了：如果 α 是不等于0和1的代数数，β 是二次复代数数，则 α^β 是超越数，特别地，$e^\pi=(-1)^{-i}$ 是超越数。1930年，库兹明把这个结果推广到 β 是二次实代数数的情形，特别地，$2^{\sqrt{2}}$ 是超越数。1934年格尔丰德和施奈德各自独立地对希尔伯特第7问题的后半部分作了肯定回答。1966年，贝克证明了如下重要结果：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 是非零代数数，且 $\ln\alpha_1,\ln\alpha_2,\cdots,\ln\alpha_n$ 在 $\overline{Q}$ 上线性无关，则 $1,\ln\alpha_1,\cdots,\ln\alpha_n$ 在所有代数数所成的域 Q 上线性无关。由此可推出：(1)若代数数的对数线性组合(其系数为代数数)不等于零，则必为代数数。(2)若 $\alpha_1\cdots,\alpha_n,\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是非零代数数，则 $e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$ 是超越数。(3)若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是不为0和1的代数数，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是代数数，且 $1,\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 在 Q 上线性无关，则 $\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$ 为超越数。为此及其他重要数学成就，贝克获1970年菲尔兹奖。

1874年，康托尔引入可数性概念，一个直接的推论是"几乎所有"的实数(复数)都是超越数。马勒尔1932年提出一个猜想：对于几乎所有的实数 Q、任意的正整数 n 和正数 ε，至多有有限多个 n 次整系数多项式 $p(x)$，使得 $|p(\theta)|<h^{-(n+\varepsilon)}$，其中 h 是 $p(x)$ 的诸系数的绝对值的最大值。1965年为斯普林茹克所证明。

超越数论是数学中最活跃的前沿理论之一。其最新发展已采用了

交换代数、代数几何、多复变函数理论及上同调理论等方法。许多著名问题，例如，沙鲁尔猜想：若复数 ζ_1，ζ_2，$\cdots\zeta_n$ 在 Q 上线性无关，则由 ζ_1，$\cdots$，ζ_n，e^{ζ_1}，$\cdots$，e^{ζ_n}在 Q 上生成的域的超越次数至少为 n，又其特例关于 e 和 π 的代数无关性（更“简单”的 $e+\pi$ 的超越性），以及欧拉常数 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$的超越性的猜测，至今都未解决。

堆垒数论（**additive theory of number**） 又称加性数论，是关于“加性问题”的一个数论分支。它研究的典型问题是：设 N 是全体非负整数的集合；$A_1,A_2,\cdots,A_s$ 是 N 的有限个或可数个子集。试判定对 N 中的每一个 n，方程 $n=a_1+a_2+\cdots+a_s$ 是否可解或其解数 $r(n)$，其中 $a_j\in A_j(1\leqslant j\leqslant s)$。这类问题与整数集合的加法性质有关。堆垒数论的历史也很古老，费马等人就开始了堆垒数论的某些研究。以下是几个著名的堆垒数论问题：

1. 多角数问题

设整数 $m\geqslant 3$，由 $a_0^{(m)}=0$，$a_{n+1}^{(m)}-a_n^{m}=(m-2)n+1(n=1,2,\cdots)$确定一个数列$\{a_n^{(m)}\}$，属于这个数列的整数称为 m 阶多角数。其通项为：$a_n^{(m)}=\frac{1}{2}(m-2)n^2-\frac{1}{2}(m-4)n$。易知，4 角数就是平方数。1636 年，费马猜测：每个自然数都可以表示为 m 个 m 阶多角数之和。拉格朗日于 1772 年证明了 $m=4$ 的情况；勒让德于 1798 年证明了 $m=3$ 的情况；1813 年，柯西证明了这个猜测。解决了多角数问题。

2. 平方和问题

求不定方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2=n$ 的整数解的个数 $r_s(n)$的问题，其中 s 是给定的正整数。例如 $r_2(3)=0$，$r_2(5)=8$，$r_2(9)=4$。

1829 年，雅可比证明了 $r_2(n)=4\sum\limits_{d|n,2\nmid d}(-1)^{\frac{d-1}{2}}$，还证明了 $r_4(n)=8\sum\limits_{d|n,4\nmid d}d$。1919 年，哈代等人得到了 $s\geqslant 5$ 时 $r_s(n)$的渐近公式。现在对 $s\leqslant 24$ 时，均已得出 $r_s(n)$的具体表达式。1926 年克洛斯特曼，1962 年埃斯特曼分别讨论了形如 $n=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+dx_4^2$ 的平方和问题，拓广了平方和问题，开拓了一系列新的领域

3. 哥德巴赫问题

是堆垒数论亦是整个数论最有魅力的问题之一，见“哥德巴赫猜想”条。

4. 华林问题

1770 年，华林推测：任意正整数能够用不超过 4 个平方数的和、不超过 9 个立方数之和或不超过 19 个四次方数之和来表示。意思是：对任意给定的整数 $k\geqslant 2$，必存在一个正整数 $s(k)$，使得每个正整数 n 必是 $s(k)$个非负的 k 次方数之和。即不定方程

$$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=n \qquad ①$$

对所有的整数 $n\geqslant 0$ 有非负整数解 $x_j(1\leqslant j\leqslant s)$。这就是华林问题（还包括解的数目及极值问题）。

1909 年，希尔伯特证明了 $s(k)$ 的存在性。1943 年林尼克用密率法给出 $s(k)$存在性的另一个证明。

华林还猜测 $s(k)$的最小值 $g(k)$

$=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$。1770年拉格朗日证明了 $g(2)=4$；1909年威弗里奇证明了 $g(3)=9$。设 $G(k)$ 为使方程(1)对充分大的 n 可解的 $s(k)$ 的最小值。易证 $g(k)\geqslant 2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$，$G(k)\geqslant k+1$。利用 $G(k)$ 的上界估计，人们基本上完成了对 $g(k)$ 的探讨：当 $k\geqslant 6$ 时有条件 $3^k-2^k+2\leqslant(2^k-1)\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]$ 时，$g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$。1957年，马勒尔证明当 k 充分大时条件一定成立；1964年，斯泰姆勒尔证明此条件在 $6\leqslant k\leqslant 200000$ 时成立。1964年陈景润证明 $g(5)=37$；1985年巴拉萨布雷尼安等证明了 $g(4)=19$。

20世纪20年代，哈代等人用圆法研究了华林问题。他们对方程①的解数作了估计。1938年、1947年和1957年，华罗庚三次改进估计的结果。哈代等人猜测：当 $k=2^m\geqslant 4$ 时，$G(k)=4k$；其他情形，$G(k)\leqslant 2k+1$。易证 $k=2^m\geqslant 4$ 时 $G(k)\geqslant 4k$；其他情形，$G(k)\geqslant k+1$。对解数估计的改进同时也改进了对 $G(k)$ 的上界估计。1939年达文波特证明了 $G(4)=16$；1947年林尼克证明了 $G(3)=7$；1959年维诺格拉多夫证明了，当 $k\geqslant 170000$ 时，$G(k)\leqslant k(2\ln k+4\ln\ln k+2\ln\ln\ln k+13)$，卡拉楚巴进一步改进为 $G(k)<2k\log k+2\log\log k+12k$，这是目前的最好结果。

华林问题可作各种推广。例如：(1)华林-哥德巴赫问题，即把方程①中的 x_j 限制为素数。对此问题的研究，华罗庚和维诺格拉多夫有重要贡献。(2)多项式华林问题。把方程①中的项 x_j^k 换成 $f(x_j)$，这里 $f(x)$ 是整值多项式；或更一般地换成 $f_j(x_j)$，其中 $f_j(x)$ 为整值多项式。当取 $f(x)=x+\frac{1}{2}(m-2)(x^2-x)$ 时，即为多角数问题。对多项式华林问题，华罗庚做了许多著名的工作。(3)代数数域上的华林问题，或者任意数域上的华林问题。对此问题，西格尔有重要贡献。

素数分布(**distribution of prime numbers**) 数学中研究素数性质的一类重要问题。欧几里得《几何原本》中就证明了素数有无穷多个。那么，素数在自然数中是如何分布的呢？这自然成为数论中最重要和最有吸引力的中心问题之一。人们至今尚未找到，人们一般认为大概也不可能找到一个可以表示全体素数的有用公式。最初的研究素数分布的方法，是通过造素数表来观察。最早的素数表是古希腊的埃拉托塞尼构造的(公元前250年)，现有的较完善的素数表是D. B. 扎盖尔1977年编制的，列出了不大于50000000的所有素数。由素数表很难发现素数分布的规则。实际上，有的相邻素数相差很小，例如2和3，许多相邻素数就是相邻的奇数，其差为2(叫做孪生素数)，如5和7，11和13；另一方面，有些相邻素数之差又很大，可以证明，对任意自然数 N，都存在着差大于 N 的相邻的素数。而且现在人们还没有找到能判定充分大的数是否是素数的方

法，现在已知的大素数都是个别地构造出来的。到1990年人们所知道的最大的素数是 $2^{216193}\times 391581-1$，这是一个有65087位的数。

关于素数分布性质，人们通过数值观察、计算以及猜测等方法，提出许多命题，其中有些至今尚未得到证明。著名的命题有素数定理、孪生素数猜想、费马素数问题、梅森素数问题、单位循环素数问题等。

素数定理(**prime number theorem**) 关于素数个数问题(素数分布的最重要的问题之一)的一个命题。用 $\pi(x)$ 表示不大于实数 x 的素数的个数，如 $\pi(2)=1,\pi(3)=2,\pi(100)=25$。欧几里得关于素数有无穷多个的命题即可表示为 $\lim\limits_{x\to\infty}\pi(x)=+\infty$。1808年，A. 勒让德猜测 $\pi(x)=\frac{x}{\ln x-B}$，B 为某个常数；1849年，高斯猜测，$\pi(x)=\int_2^x\frac{du}{\ln u}$，为此，他假设素数的平均分布密度为 $\frac{1}{\ln x}$。1852年左右，П. Л. 切比雪夫证明了：存在两个正数 c_1 和 c_2，使不等式 $c_1\frac{x}{\ln x}\leqslant\pi(x)\leqslant c_2\frac{x}{\ln x}$ 成立，其中 $x\geqslant 2$，并从而证明了贝特朗猜想：在 x 和 $2x$ 之间有素数存在。1896年，J·阿达马和C·dela 瓦莱-普桑几乎同时证明了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1$$

或 $$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}。$$

这就是素数定理。它是素数分布理论的中心定理。1949年，A·赛尔伯格和P·爱尔特希给出素数定理的初等证明。

同时，人们也研究有误差项的素数定理，即对 $\pi(x)-Lix$ 寻找最佳估计。这里 $Lix=\lim\limits_{\eta\to 0}\left(\int_0^{1-\eta}\int_{1+\eta}^{x}\right)\frac{du}{\ln u}$，它比 $\frac{x}{\ln x}$ 更接近 $\pi(x)$。1900年，瓦莱-普桑证明了 $\pi(x)-Lix=O(x\ exp(-c\sqrt{\ln x}))$，$c$ 为一正常数；1901年，H. Von 科赫改进为 $\pi(x)-Lix=O(x^{\frac{1}{2}}\ln x)$；1958年，И. M. 维诺格拉多夫得到 $\pi(x)-Lix=O(x\ exp(-c(\ln x)^{\frac{3}{5}-\varepsilon}))$，$\varepsilon$ 为任意正数，c 为与 ε 有关的正常数。

算术级数中的素数分布(**distribution of prime number in arithmetic series**) 1837年，P. G. 狄利克雷证明了首项与公差互素的算术级数中有无限多个素数。设整数 $q\geqslant 3,1\leqslant l\leqslant q,(l,q)=1$。用 $\pi(x,q,l)$，表示首项为 l，公差为 q 的算术级数中不超过 x 的素数的个数，则对固定的 q，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x,q,l)\varphi(q)\ln x}{x}=1。$$

式中 $\varphi(q)$ 表示不超过 q 且与 q 互素的正整数的个数。这就是算术级数中的素数定理。关于误差估计，A. 佩奇于1935年，C. L. 西格尔等于1936年证明了：对任意正数 h，当 $3\leqslant q\leqslant(\ln x)^h$ 时，有

$$\pi(x,q,l)-\frac{1}{\varphi(q)}Lix=O(x\exp(-c\sqrt{\ln x}))$$

c 为绝对正常数；记号 O 中所含的常数只与 h 有关、与 q 无关。

设 $k\geqslant 3,1\leqslant l\leqslant k,(l,k)=1$，以 $p(k,l)$ 表示算术级数 $a_n=kn+l(n=$

0,1,2,…)中的最小素数。S. 乔拉猜测 $p(k,l)=O(k^{1+\varepsilon})$,其中 ε 为任意小的正数。1944 年,Ю. B. 林尼克首先证明了存在绝对常数 c,使得 $p(k,l)=O(k^c)$。潘承洞于 1957 年首先指出 c 是可以计算的,并定出了 c 的值。陈景润于 1979 年得出 $c\leqslant 17$,后来又证明了 $p(k,l)\ll k^{13.5}$,这是 20 世纪 80 年代得出的最好结果。

费马数(**Fermat numbers**) 1640 年,费马猜测,形如 $F_n=2^{2^n}+1$ 的数,$n\geqslant 0$ 时都是素数,他并且提出 $F_0=3,F_1=5,F_2=17,F_3=257,F_4=65537$ 都是素数。但 1732 年,欧拉发现 $F_5=641\times 6700417$,费马猜测不真。人们接着提出了新问题:形如 $F_n=2^{2^n}+1$ 的素数有多少?是否有无穷多个 n,使 F_n 为素数?由于费马的猜测,人们把形如 F_n 的数称为费马数,形如 F_n 的素数称为费马素数。上面提出的第二个问题就是费马素数问题。有趣的是,直到现在(20 世纪 80 年代),人们所知道的费马素数仍然是费马指出的那 5 个。人们还知到 49 个费马数是合数:当 $n=8,9,10,11,12,13,15,16,18,19,21,23,25,26,27,30,32,36,38,39,42,52,55,58,63,73,77,81,117,125,144,150,207,226,228,250,267,268,284,316,452,556,744,1945,23471$ 时,只知道 F_n 的部分素因数,例如知道 F_{23471} 的一个素因数是 $5\times 2^{23473}+1$;当 $n=5,6,7$ 时,得出了 F_n 的标准素因数分解式;当 $n=14$ 时,只知 F_{14} 为合数,但没找到它的任何一个真因数。F_n 是递增很快的数列,例如 $F_{1945}>10^{582}$,这也是其素性难以判定的原因。是否费马数列中有无穷多个复合数?这也是一个尚未解决的问题。与费马数有关的猜想还有:费马数列中只有有限个素数;费马数无平方因数等。现在都没有得到证明。关于后一猜想,L. J. 沃伦 1967 年证明了:如果素数 q 满足 $q^2|F_n$,则 $2^{q-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,q^2)$。

1801 年,高斯证明了,当 $h=F_{n_1}F_{n_2}\cdots F_{n_s}(0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_s,s\geqslant 1)$,$F_{n_t}(t=1,2,\cdots,s)$ 都是素数时,正 h 边形可以尺规作图。近年来,费马数在数字信号处理中得到应用。

梅森数(**Mersenne numbers**) 形如 $M_P=2^P-1$(其中 P 为素数)的数称为梅森数,为使 M_p 为素数,p 为素数是必要条件,但不是充分条件。如果 M_P 为素数,则称为梅森素数。1644 年,梅森在一本著作(《物理－数学探索》)的序言中提出,当 $p=2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$ 时,2^p-1 是素数,对于 257 以内的其他素数 P,2^P-1 都不是素数,但在当时,人们只知道 $P=31$ 以前的 7 个梅森素数的证明(素性证明)。1772 年,欧拉才证明 M_{31} 是素数。而 M_{67} 和 M_{257} 不是素数,1903 年,科尔指出

$$M_{67}=2^{67}-1=193707721\times 761838257287。$$

梅森指出的数中,M_{61},M_{89},M_{167} 也是素数。人们发现,这种数有些很有趣的性质,例如每个形如 2^p-1 的素数对应一个偶完全数等等,于是人们开始有意识地寻找这种素数,为了纪念提出者把它们命名为梅森素数,一般的 2^p-1 形数命名为梅

森数。

直到19世纪上半叶，人们仍然只证明了梅森提出的前8个梅森素数。19世纪后半叶，E.拉库斯提出了一个判断 M_P 是否为素数的方法：若有 $\Delta>0$ 使 $(\frac{\Delta}{M_P})=-1$，且在二次域 $Q(\sqrt{\Delta})$ 中有一个单位数 ε 适合 $N(\varepsilon)=-1$，则 M_P 为素数的充分必要条件是 $\varepsilon^{2^{p-1}}+\bar{\varepsilon}^{2^{p-1}}\equiv 0 \pmod{M_P}$，式中 $\bar{\varepsilon}$ 为 ε 的共轭数。用此法，人们又证明了 M_{61}，M_{89}，M_{107}，M_{127} 为素数。

在电子计算机投入应用之前，人们就证明出上述由 M_2 到 M_{127} 这12个梅森素数，从前举 M_{67} 的分解式可以看到 P 值增大时，M_P 将迅速增大，使判断计算出现困难。1930年，D. H. 莱默尔改进了拉库斯的方法，提出如下判别法则：设 P 为一奇素数，定义序列

$L_0=4,\cdots,L_{n+1}=(L_n{}^2-2)2^P-1\ (n\geqslant 0)$，

则 2^P-1 是素数的充要条件是 $L_{P-2}=0$。电子计算机出现后，人们利用这一准则，使寻找梅森素数的工作又进行下去。实际上寻找大素数的工作就是寻找梅森素数，因为 2^P-1 这一可构造性的数无疑缩小了寻找的范围，现在所知道的大素数多是梅森素数，这也是研究梅森素数的意义之一。关于梅森素数，有下述两个著名猜想：有无穷多个 P 使 M_P 为素数；M_P 无平方因数。现都未得到证明，后者的一个结果是1967年，L·J·沃伦证明的：若素数 q 满足 $q^2\mid M_P$，则 $2^{q-1}\equiv 1 \pmod{q^2}$。梅森数在代数编码理论中亦有应用。

现在已知的最大的梅森素数为 $2^{216091}-1$，一共已知30个梅森素数。1983年，人们已证明，在小于 2^{62982} 的范围内，只有27个梅森素数，它们都是已知的。还知道大于此限的3个梅森素数。已知的梅森素数如下表。

序号	P	M_P	证明年代	序号	P	M_P	证明年代
1	2	3	古代	12	127	39位	1914
2	3	7	古代	13	521	157位	1952
3	5	31	古代	14	607	183位	1952
4	7	127	古代	15	1279	386位	1952
5	13	8 191	1461年	16	2 203	664位数	1952
6	17	131 071	1588	17	2 281	687位	1952
7	19	524 287	1598	18	3 281	969位	1957
8	31	2 147 483 647	1772	19	4 253	1 281位	1961
9	61	19位数	1883	20	4 423	1 332位	1961
10	89	27位	1911	21	9 689	2 917位	1963
11	107	33位	1914	22	9 941	2 993位	1963

（续）

序号	P	M_p	证明年代	序号	P	M_p	证明年代
23	11 213	3 376 位	1963	27	44 491	13 395 位	1979
24	19 937	6 003 位	1971	28	86 243	25 960 位	1983
25	21 701	6 553 位	1978	29	132 049	39 751 位	1983
26	23 209	6 987 位	1979	30	216 091	65 050 位数	1985

完全数（**perfect number**） 一个正整数 n，如果其全部因数的和等于 $2n$，则称 n 为完全数。例如 6 的因数和 $1+2+3+6=12$，28 的因数和 $1+2+4+7+14+28=56$，所以 6 和 28 都是完全数。

公元前 6 世纪古希腊的毕达哥拉斯是最早研究完全数的人，他已知 6 和 28 是完全数。欧几里得在《几何原本》中对完全数作了进一步的研究。他定义："完全数是等于其因数之和者"。并在该书第九卷中给出了一个关于完全数的定理：若一个级数（从 1 开始）的（素数）p 项之和

$$1+2+2^2+\cdots+2^{P-1}$$

是素数，那么这个和同最末一项的乘积为完全数。即，如果 p 和 2^P-1 均为素数，则 $2^{P-1}(2^P-1)$ 是一个完全数。古希腊人在公元 1 世纪以前已经知道 4 个完全数：6，28，496 和 8128。第 5 个完全数是 $33550336=2^{12}(2^{13}-1)$，它是 15 世纪发现的。主要的问题显然是形如 2^P-1 的数（P 为素数）是否为素数，这恰恰就是梅森素数。18 世纪，欧拉证明了，每一个偶完全数 n 都具有欧几里得指出的形式，即，如果 n 是偶完全数，则 $n=2^{p-1}(2^p-1)$，其中 p 与 2^p-1 为素数。1911 年，L. F. 迪克森作出上述结果的一个简单的证明。这就把完全数与梅森素数联系起来了，至今，共发现了 30 个偶完全数，其最大者为 $2^{216090}(2^{216091}-1)$（见梅森数）。

是否有无穷多个偶完全数的问题可归结为是否存在无穷多的梅森素数的问题。是否存在奇完全数则是数论中的另一著名问题，至今尚未获解决。已有的成果如下：18 世纪，欧拉曾证明，如果存在奇完全数 n，则 n 的分解式为

$$n=p^{\alpha}q_1^{2\beta_1}q_2^{2\beta_2}\cdots q_t^{2\beta_t}$$

式中 $p,q_1,q_2,\cdots,q_t$ 是不同的素数，$\alpha\equiv p\equiv 1(\bmod 4)$。1888 年，J・J・西尔维斯特证明了 $t\geqslant 4$，他还指出了 $t=4$ 不可能。1970 年，W. 麦克丹尼尔证明了上述分解式中的 $2\beta_j+1\equiv 0(\bmod 3)(j=1,2,\cdots,t)$。1973 年，P・哈吉斯证明了如果 n 是奇完全数，那么 $n>10^{50}$。1980 年，他进一步证明了如果存在奇完全数 n，则 n 至少有 8 个不同的素因子。

1946 年，E・利翁纳将因数之积等于该数本身平方的数称为第二类完全数，例如 $8^2=1\cdot 2\cdot 4\cdot 8$，$27^2=1\cdot 3\cdot 9\cdot 27$，所以 8 和 27 都是第二类完全数。若 P,P' 为不同的

素数，则 P^3 和 PP' 显然都是第二类完全数。

亲和数（amicable number） 用 $\sigma(n)$ 表示自然数 n 的所有正因数（包括 1 和 n）。使得

$$\sigma(n)-n=m \quad 和 \ \sigma(m)-m=n$$

两式同时成立的两个数 m 和 n 称为亲和数。例如 $\sigma(220)-220=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$，而 $\sigma(284)-284=1+2+4+71+142=220$，所以 220 和 284 是一对亲和数。

公元前 6 世纪毕达哥拉斯最先定义了亲和数，上面那一对亲和数就是他提出来的。人们所知道的第二对亲和数是费马于 1636 年提出的：17296 和 18416。第三对是笛卡儿于 1638 年提出的：9363584 和 9437056。1750 年，欧拉比较系统地提出 64 对亲和数，后来人们验证，其中两对错了。这样，到当时，人们已知 62 对亲和数，后来又陆续有所发现。一个十分有趣的事实是，一对很小的亲和数，1184 和 1210，直到 1866 年才被发现，而两百多年前却发现了大得多的亲和数。一万以内的亲和数有 5 对：220，284；1184，1210；2620，2924；5020，5564；6232，6368。目前人们所知道的一对最大的亲和数是 H. J. 莱尔在 1974 年指出的两个 152 位数：

$$m=3^4\cdot5\cdot11\cdot5281^{19}\cdot29\cdot89(2\cdot1291\cdot5281^{19}-1),$$

$$n=3^4\cdot5\cdot11\cdot5281^{19}(2^3\cdot3^3\cdot5^2\cdot1291\cdot5281^{19}-1)。$$

孪生素数（twin prime number） 两个差等于 2 的一对素数，称为孪生素数，例如 3 和 5，5 和 7，11 和 13，…，10016957 和 10016959；都是孪生素数。1979 年 R. 贝利提出一对很大的孪生素数 $297\cdot2^{546}\pm1$，同年 A・O・阿特金和 N・W・里克特得出一对更大的孪生素数 $1159142985\cdot2^{2304}\pm1$，是 1979 年人们已知的最大的孪生素数。怎样寻找孪生素数，并没有一般性的规则，但上面这两对孪生素数都是 $h\cdot2^r\pm1$ 的形式；对人们有所启发：是否可从梅森素数 M_P 出发，去寻找形如 $h\cdot M_P^n\pm1$ 的新孪生素数呢？答案是肯定的。1983 年，德国汉堡大学的 W. 凯勒发现，当 $n=1$，2 时，确可找到一些大孪生素数，$h\cdot M_P^n\pm1$ 这一可构造形式提高了寻找效率，他给出如下一些形如 $h\cdot M_P\pm1$ 的孪生素数：$371634\cdot(2^{1279}-1)\pm1$，$909030\cdot(2^{2203}-1)\pm1$，$1846908\cdot(2^{2281}-1)\pm1$，$2012081\cdot(2^{2281}-1)\pm1$，$3198240\cdot(2^{3217}-1)\pm1$，$2445810\cdot(2^{4253}-1)\pm1$，$1639494\cdot(2^{4423}-1)\pm1$。还给出几个形如 $h\cdot M_P^2\pm1$ 的孪生素数：$713502\cdot(2^{521}-1)^2\pm1$，$332880\cdot(2^{607}-1)^2\pm1$，$455892\cdot(2^{1279}-1)^2\pm1$。$260497545\times2^{6625}\pm1$ 是到 1988 年止人们已知的最大一对孪生素数。如何构造更多的孪生素数是一个正在研究的问题。另一个十分自然的问题是：孪生素数有多少个？孪生素数猜想即是此问题的一个答案：存在无穷多对孪生素数。这个猜想是波林奈克 1849 年提出来的，至今尚未得到证明，但人们倾向于认为它可能是正确的。

孪生素数猜想与哥德巴赫猜想有密切的关系。设 a、b、c 是整数，考

虑方程

$$ax+by=c$$

的素数解。如取 $a=1,b=1,c$ 为不小于 6 的偶数，素数解的存在问题就是哥德巴赫问题；取 $a=1,b=-1,c=2$，素数解存在且有无穷多组素数解就是孪生素数猜想。因而，历史上人们关于哥德巴赫猜想的成果（见哥德巴赫猜想）也同时就是关于孪生素数猜想的研究成果。现在最好的成果是陈景润在 1966 年得到的：存在无穷多个素数 p，使得 $p+2$ 是不超过两个素数之积（即著名的关于（1，2）的陈氏定理的变形）。

素数分布中有一个可以说是由孪生素数问题推广而产生的问题：相邻素数之差问题：设 P_n 是第 n 个素数，$d_n=p_{n+1}-p_n$ 是相邻两个素数之差。在黎曼猜想成立的条件下，1921 年，H·克拉默证明了 $d_n=O(p_n^{\frac{1}{2}}\ln p_n)$。赫斯-布朗和 H·伊瓦尼克 1979 年得出无条件的结果 $d_n=O(p_n^{\frac{11}{20}+\epsilon})$。80 年代，皮茨改进为 $d_n\leqslant p_n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{21}}$。另一方面，关于 d_n 的下界，1966 年，E. 邦别里和 H. 达文波特于 1966 年证明了：$E=\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{d_n}{\ln p_n}\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{8}=0.46650\cdots$。M·N·赫胥黎于 1977 年改进为 $E\leqslant0.4425$。猜测应有 $E=0$，但尚未能证明。

黎曼 ζ 函数（Riemannζ－function） 复变函数 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-s}$，其中 $s=\sigma+it$ 是复数，$\sigma>1$。欧拉就讨论过 s 为实变数的情况，并且证明了著名的欧拉恒等式 $\zeta(s)=\prod\limits_{p}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}$，式中 $\prod\limits_{p}$ 表示对所有的素数求积。1859 年，黎曼在其著名论文“论不大于一个给定值的素数个数”中提出复变函数 $\zeta(s)$，并证明了 $\zeta(s)$ 的一些性质，如，当 $\sigma>1$ 时，$\zeta(s)$ 没有零点；当 $\sigma<0$ 时，$s=-2,-4,\cdots,-2n,\cdots$ 是它的一级零点，称为“平凡零点”，此外，$\zeta(s)$ 没有零点；$\zeta(s)$ 可能有的其他零点一定都是位于带形区域 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 中的复零点，它们称为“非平凡零点”。黎曼还预言了 $\zeta(s)$ 的一些深刻的结果，为后来的人们所证明，如，在带形区域 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 中 $\zeta(s)$ 有无穷多个复零点，于 1893 年为 J. 阿达马所证明；设 $T>0$，以 $N(T)$ 表 $\zeta(s)$ 在矩形 $0\leqslant\zeta\leqslant1,0<t<T$ 中的零点个数，则有 $N(T)\sim\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$，于 1905 年为 H·Von 曼格尔所证明；提出 $\zeta(s)$ 的非平凡零点与 $\pi(x)$ 的一个关系式，于 1894 年为曼格尔所证明。黎曼在这篇论文中还提出一个著名的猜想：$\zeta(s)$ 的非平凡零点都在直线 $Re\ s=\frac{1}{2}$ 上，也称为黎曼假设，记为 RH。关于 RH 的研究见黎曼猜想。关于 $\zeta(s)$ 还有许多重要成果，如 1918 年 G. H. 哈代等证明了

$$\int_{-T}^{T}|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2dt\sim 2T\ln T$$

1926 年 A. E. 英厄姆证明了

$$\int_{-T}^{T}|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^4dt\sim\frac{1}{\pi^2}T\ln^4T$$

1940 年他又证明了当 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma<1$ 时

$$N(\sigma,T)=O(T^{3\frac{1-\sigma}{2-\sigma}}\ln^5 T)$$

其中 $T\geqslant 2$，$\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$，$N(\alpha,T)$表示在矩形 $\alpha\leqslant\sigma<1$，$|t|\leqslant T$ 中的零点个数，此结果后来代有改进。一般称之为零点密度定理。黎曼提出用复变函数特别是 $\zeta(s)$ 研究数论的新思想和新方法，开创了解析数论的新时期，并对单复变函数论的发展有深刻的影响。在黎曼思想的影响下，后来人们定义并研究了多种 ζ 函数，如戴德金 ζ 函数(1877)，阿廷 L 函数(1930)，西格尔 ζ 函数(1938)韦伊 L 函数(1951)，玉河 ζ 函数(1963)等，极大地推进了数论、函数论、代数理论的发展。

不定方程 (**indeterminate equation**) 指解的范围为整数、正整数、有理数或代数整数等的方程或方程组，一般地说，其未知数的个数多于方程的个数。为纪念曾研究过若干方程问题的古希腊数学家丢番图，不定方程又称为丢番图方程。不定方程是数论最古老的分支之一，一些不定方程问题(如勾股数问题)在各文明古国的早期文化中就有所反映，由于不定方程与数学的其他分支如代数群论、代数几何、组合数学等都有密切的关系，在有限群论和最优设计中也常要提出不定方程问题，因而这个古老的分支一直受到数学界的重视，是现代数论的重要研究方向之一。

最简单的不定方程问题是一次不定方程。公元1世纪成书的中国数学名著《九章算术》中的"五家共井"问题，就是一次不定方程组问题。公元5世纪成书的中国另一部数学名著《张邱建算经》中的"百鸡问题"则是一个著名的求正整数解的一次不定方程组问题。一次不定方程组一般是化为一次不定方程求解的。$s(s\geqslant 2)$元一次不定方程是

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_sx_s=n$$

式中 $a_i(i=1,2,\cdots,s)$，n 都是给定的整数，且 $a_1a_2\cdots a_s\neq 0$。

$s=2$ 的情况在17世纪就得到深入的研究。当 $a_1>0$，$a_2>0$，$(a_1,a_2)=1$ 时，二元一次不定方程的非负整数解问题是19世纪西尔维斯特解决的，他证明了：当 $n>a_1a_2-a_1-a_2$ 时，二元一次不定方程有非负整数解，而在 $n=a_1a_2-a_1-a_2$ 时没有非负整数解。多元情况的非负整数解的求解算法则是近几十年的工作。

满足不定方程

$$x^2+y^2=z^2 \qquad ①$$

的正整数，叫做勾股数，也叫商高数或毕达哥拉斯数。中国古代，公元前11世纪的商高已给出方程①的一组正整数解 $x=3$，$y=4$，$z=5$，所以把①的解叫做商高数的原因即在于此，《九章算术》中给出一系列勾股数。古巴比伦人和古印度人也给出一些勾股数。古希腊数学家毕达哥拉斯也给出方程①的一些正整数解，所以西方称之为毕达哥拉斯数。至迟至16世纪，人们已经得出方程①的一般解。如果$(x,y)=d$，由①可得 $d|z$，因而可设$(x,y)=1$，此外，x 和 y 必有一奇一偶。不定方程①满足$(x,y)=1$，$z|x$ 的全部正整数解可表为 $x=2ab$，$y=a^2-b^2$，$z=a^2+b^2$，式中 a、b 为满足 $a>b>0$，$(a,b)=1$，$2\nmid a+b$ 的任何整数。

费马(17世纪)提出了在数论史上非常重要的三个命题：

(1)每一个形如 $4k+1$ 的素数 p 可唯一地表成两个正整数的平方和，即 $p=x^2+y^2, 0<x<y$。

(2)每一个正整数能够表成四个整数的平方和。

(3)不定方程

$$x^4+y^4=z^2,(x,y)=1 \quad ②$$

没有 $xy\neq0$ 的整数解。

定理(1)费马说他能证出，但未发表证明，头一个完全的证明是欧拉在1749年给出的，1773年和1783年他又给出两个新证。近代，人们进一步求出了具体的表示式(构造性解)。现也未发现费马关于定理(2)的证明，它的第一个证明是拉格朗日于1772年作出的，1773年，欧拉给出一个更简单的证明。这一定理后来在组合数学中得到应用。费马给出了定理(3)的证明，在证明中他创用了无穷递降法，这个方法至今仍十分有用。

关于勾股数，有这样一个猜想：设 a、b、c 是勾股数，x、y、z 是正整数，且满足 $a^x+b^y=c^z$，那么 $x=y=z=2$。对这个猜想，许多人进行过研究，但至今仍未彻底解决。

最简单的二次不定方程是佩尔方程

$$x^2-Dy^2=N, N=\pm1,\pm4 \quad ③$$

式中 $D>0$ 不是平方数。一般地先考虑 $N=1$ 的情况，即不定方程

$$x^2-Dy^2=1 \quad ④$$

佩尔是17世纪英国人，他并没有研究③或④型的方程，由于欧拉弄错了才冠以佩尔的名字。1766年前后，拉格朗日首先证明方程④有 $y\neq0$ 的整数解。求佩尔方程最小解的上界，是一个重要的数论问题。设 $\varepsilon=\frac{u+v\sqrt{D}}{2}$，$D\equiv0$ 或 $1(\mathrm{mod}4)$ 是③在 $N=4$ 时的最小解，1918年，F·舒尔证明了 $\log\varepsilon<\sqrt{D}\log D$。1942年，华罗庚证明了 $\log\varepsilon<\sqrt{D}\times(\frac{1}{2}\log D+1)$。1964年，王元证明对任意 $\delta>0$，皆有常数 $C=C(\sigma)$，使当 $D>C(\delta)$ 时有 $\log\varepsilon<(\frac{1}{4}+\delta)\sqrt{D}\log D$。佩尔方程在数学中有许多应用，例如一般的二元二次方程如果有解，都可以归结为佩尔方程的求解问题。

一般的二元二次不定方程

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad ⑤$$

式中 a、b、c、d、e、f 都是整数。高斯曾证明，当 $D=b^2-4ac>0$，D 不是一个平方数，且 $\triangle=4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2\neq0$ 时，如果⑤有一组整数解，则有无穷多组整数解。不定方程⑤可变换为方程

$$x^2-Dy^2=\pm N \quad ⑥$$

不妨设其中整数 $D>0$ 不是平方数，N 为正整数。1944年，T.内格尔用初等方法，完全解决了方程⑥的求解问题。形如

$$ax^2+by^2=cz^2 \quad ⑦$$

式中 $a>0,b>0,c>0$，且两两互素，都无平方因子，是一类重要的二次不定方程。1785年，勒让德证明了，⑦有一组不全为零且 $(x,y,z)=1$ 的解 x,y,z 的充要条件是 $bc,ac,-ab$ 分别是 a、b、c 的二次剩余。1950年，L.霍尔泽用代数数论方法证明了⑦的非零解满足 $|x|<\sqrt{bc}$，$|y|<$

$\sqrt{ca}$，$|z|<\sqrt{ab}$。1969年，莫德尔给出上述结果一个简单的初等证明。方程⑦在组合数学中很有用。

设 k 为整数，不定方程

$$y^2=x^3+k \quad ⑧$$

叫做莫德尔方程。人们对它的研究亦有数百年的历史了。费马曾宣布他证明了 $y^2=x^3-2$ 仅有整数解 $x=3$。但始终未找到他的证明。直到1875年T.佩平才证明了这一结果，还证出 $y^2=x^3-1$ 仅有整数解 $x=1$。1912年，莫德尔证明了方程⑧的一些新结果，1918年进而证明了⑧仅有有限组整数解，并由此提出了著名的莫德尔猜想（见莫德尔猜想）。T.内格尔于1930年证明了 $k=17$ 时⑧有8组解；1963年，W.永格伦解决了 $k=-7$，$k=-15$ 两种情形；1968年，A·贝克证明⑧的整数解满足 $\max(|x|,|y|)<\exp(10^{10}|k|^{10^4})$。

1909年，A.图埃证明了：如果 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ $(n\geqslant3)$ 是有理数域上的不可约的整系数多项式，则不定方程

$$H(x,y)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}y+\cdots+a_1xy^{n-1}+a_0y^n=c \quad ⑨$$

仅有有限多组整数解，式中 c 是给定的非零整数。1921年，C.西格尔改进了他的结果；1958年，K.罗特给出了一个最佳结果；1968年，A.贝克给出了方程⑨的解的一个可计算的上界，这一工作和其他数论研究方面的成果，使贝克获1970年的菲尔兹奖。

1637年，费马指出，$n>2$ 时，不定方程

$$x^n+y^n=z^n$$

没有 $xyz\neq0$ 的整数解。这就是著名的费马猜想，对它的研究持续了300多年，虽然至今仍未解决，但从中发展出许多方法、理论及整个分支学科。这一问题被誉为数学中的“下金蛋的母鸡”（见费马猜想）。

当前，不定方程研究中比较成熟的方法是处理两个变元的方程。三个变元以上的高次不定方程，还比较难于处理。

筛法(**sieve method**) 数论中一个有广泛应用的初等方法。用现代数学语言可描述如下：给定“被筛集合”，即依赖于某一参数 x 的集合族 $A(x)$，$x\in X$，每一集合 $A(x)$ 由有限个整数组成，且当 $x\to\infty$ 时元素的个数也趋于无穷；给定“筛”，即由无限多个不同的素数组成的集合 P 以及对每一 $p\in P$ 给定 $h(p)$ 个模 p 的不同的剩余类 $H(p)$ 所组成，其中 $1\leqslant h(p)<p$；进行“筛选”，给定正数 $z>2$，把集合 $A(x)$ 中属于剩余类 $H(p)$ 的所有元素都去掉，其中 $p\leqslant z$，$p\in P$。剩下的元素所组成的 $A(x)$ 的子集及其元素个数，均记为 $S(A(x),H(p),P,z)$，是 x 和 z 的函数，称之为筛函数。当 $H(p)$ 仅有一个剩余类 $n\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$ 时，筛函数记为 $S(A(x),P,z)$。

选取不同的被筛集合、筛和 z，经筛选后可得到具有不同算术性质的子集，所以许多数论问题可以用筛法来研究。例如，取参数 x 为自然数 N，$A(N)$ 由某些大于1不超过 N 的整数组成，P 是全体素数。再取 $z=N^{\frac{1}{k}}$（整数 $k\geqslant2$）。于是 $S(A(N),P,N^{\frac{1}{k}})$ 是由 $A(N)$ 中所有大于 $N^{\frac{1}{k}}$

不超过 N，且其素因子都大于 $N^{\frac{1}{k}}$ 的整数组成。这种整数是不超过 $k-1$ 个素因数的乘积。

筛法最早是由古希腊学者埃拉托塞尼提出的（公元前 250 年左右），他的筛法后人称为埃拉托塞尼筛法，相当于上述情况中取 $k=2$。其用途是从自然数中筛出素数从而编制了世界上第一个素数表。1914 年，美国人 D·N·莱默尔用类似于埃拉托塞尼筛法的方法求出小于 1000 万的全部素数，这是一个著名的素数表。

筛法的一个基本问题是估计筛函数的上界和正的下界，这方面埃拉托塞尼筛法已无能为力。1920 年前后，V·布龙对埃拉托塞尼筛法作了有价值的改进，他的方法称为布龙筛法。用此方法，布龙证明了哥德巴赫猜想的命题(9,9)，并证明了所有孪生素数的倒数组成的级数是收敛的，开辟了数论中应用筛法的新路。1940 年，A·A·布赫什塔布用布龙筛法证明了命题(4,4)。但对许多问题来说，"筛子"的选择有一定困难，40 年代末塞尔伯格改进了布龙筛法，1950 年用它证明了命题(2,3)，1957 年为王元所肯定，后来称为塞尔伯格筛法。塞尔伯格由于数论研究中的杰出成就，获 1950 年菲尔兹奖。以上的筛法都是小筛法——其 $h(p)/p$ 值在某种平均意义上较小。大筛法是Ю·Л·林尼克于 40 年代初在研究模 P 的正的最小二次非剩余时提出的。1947 年 A·雷尼改进了大筛法，并于次年证明了命题$(1,c)$，c 是很大的常数，开辟了大筛法应用的新径。1962 年潘承洞用大筛法证明了命题(1,5)，王元和潘承洞等次年又证明了(1,4)，1965 年，维诺格拉多夫和邦别里分别证明了(1,3)。同年，邦别里发现大筛法可归结为估计某种指数和的平方均值的上界，从而使大筛法成为解析数论的重要工具。1974 年，H·L·蒙哥马利等人利用泛函分析的对偶原理把大筛法归结为某种双线性型的估计，使大筛法成为一个有效的初等分析工具，在黎曼 ζ 函数、狄利克雷 L 函数的零点密度估计，算术级数中的素数分布等问题研究中有重要应用。筛法应用的最卓越的成果是陈景润 1966 年作出的，他独创了一种加权筛法，证明了命题(1,2)，这是目前哥德巴赫猜想研究的最好成果。

丢番图逼近（**Diophantine approximation**）　研究数——实数、复数，代数数、超越数——的有理逼近为主的一个数论分支。数的有理逼近，可表为求某种不等式的整数解问题。由于在整数范围内求解的方程称为不定方程或丢番图方程，因而把求不等式的整数解问题称之为丢番图逼近。

人们很早就产生了有理逼近的思想，用较简单的有理数来逼近、表示某些数，是数学中传统的做法。

例如，公元前 3000 年左右，巴比伦人就已造出平方根和立方根表，其中用 1.414213 或 $\frac{17}{12}$ 表示 $\sqrt{2}$，用 $\frac{17}{24}$ 表示 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，并广泛应用逼近公式 $\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a}(b<a)$。

公元前5世纪，印度人用$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot34}$逼近$\sqrt{2}$。毕达哥拉斯学派曾用$\frac{7}{5}$表示$\sqrt{2}$。阿基米德给出$\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{365}{153}$。刘徽给出逼近公式$a+\frac{r}{2a}>\sqrt{a^2+r}>a+\frac{r}{2a+1}$。

再如，圆周率研究的历史，也就是对无理数π作有理逼近的历史。较著名的有：公元前2世纪，阿基米德给出$\frac{22}{7}>\pi>\frac{233}{71}$；公元263年，刘徽得出$\pi\doteq\frac{157}{50}$；公元480年左右，祖冲之给出$3.1415927>\pi>3.1415926$，$\pi\doteq\frac{355}{113}$；1579年韦达得出

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

1585年安托尼兹得出$\frac{377}{120}>\pi>\frac{333}{106}$，他取分子和分母的平均数构出一个新逼近分数$\pi\doteq\frac{355}{113}$，恰是1000年前祖冲之的结果；1593年荷兰人罗曼得到π的前15位精确值；等等。

当然，上述仅是些个别的工作，直正系统的逼近理论是在19世纪与实数理论的建立同步进行的。

1842年，狄利克雷证明了实数有理逼近的第一个结果：如果α是任意实数，Q是大于1的实数，那么存在整数对p、q，满足不等式$1\leqslant q<Q$和$|\alpha q-p|\leqslant Q^{-1}$。由此可得，如果$\alpha$是无理数，那么存在无穷多对互素的整数对$p$、$q$，满足不等式$|\alpha-\frac{p}{q}|<q^{-2}$。当$\alpha$是有理数时，上式不成立。1891年，胡尔维茨将上式改进为$|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{\sqrt{5}}q^{-2}$，并认为$\sqrt{5}$是最佳值。1955年，美国的福德用$\sqrt{3}$代替$\sqrt{5}$，将该式推广到复数。1982年，我国的李复中也对该式作了推广，他证明，在无理数α的任意三个连续渐近分数中，必有一个$\frac{p_i}{q_i}$适合$|\alpha-\frac{p_i}{q_i}|<\frac{1}{\sqrt{a_i^2+4}q_i^2}$，$\frac{p_i}{q_i}$为第$i$个渐近分数，$a_i$为第$i$个部分商。当所有的$a_i=1$时，上式就成为胡尔维茨公式。这两个不等式恰好给出了有理逼近的上下界。1976年，布劳德提出，对每个无理数α及每个$\varepsilon>0$，是否存在无穷多对素数p、q，使$|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^{2-\varepsilon}}$成立？这是至今没获解决的问题。1926年，辛钦证明了丢番图逼近测度定理：在勒贝格测度意义下对几乎所有的实数a，不等式$|a-\frac{p}{q}|<\frac{\Psi(q)}{q}$的整数解有无穷多对还是有穷多对，由级数$\sum_{q=1}^{\infty}\psi(q)$是发散还是收敛决定，这里$\Psi(\varepsilon)(\varepsilon>0)$是正的非增函数。

1844年，刘维尔开创了实代数

数有理逼近的研究，他证明了：如果 α 是次数为 d 的实代数数，那么存在一个常数 $C(\alpha)>0$，对于每个不等于 α 的有理数 $\frac{p}{q}$，有 $|\alpha-\frac{p}{q}|>C(\alpha)/q^d$。即如果 $\mu>d$，则不等式 $|\alpha-\frac{p}{q}|<q^{-\mu}$ 只有有穷多个解 $\frac{p}{q}$。根据这一结果。刘维尔构造出人们第一个认识的超越数 $\alpha=\sum_{v=1}^{\infty}2^{-v!}$。以后人们不断改进 μ 值，直到得出 μ 与 d 无关的结果。1909 年，图埃得出 $\mu>1+\frac{d}{2}$；1921 年，西格尔改进为 $\mu>2\sqrt{d}$；1947 年，戴森，1948 年，盖尔丰德各自独立地证明了 $\mu>\sqrt{2d}$；1955 年，罗特得出一个 μ 与 d 无关的结论，他证明，如果 α 是实代数数，其次数 $d\geqslant 2$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，不等式 $|\alpha-\frac{p}{q}|<q^{-(2+\varepsilon)}$ 只有有穷多个解。人们猜想这恐怕是最好的结果了。

对于一组数的有理逼近问题，称为联立丢番图逼近，从狄利克雷起亦代有研究。关于实代数数的联立有理逼近问题，1970 年才为施密特所解决。用代数数逼近代数数也是丢番图逼近的重要内容。丢番图逼近是数论的一个活跃的分支，与超越数论、不定方程等都有密切的关系。

数(number) 最基本的数学概念之一。通常包括自然数、整数、有理数、实数、复数以及在它们的基础上形成的其他概念，例如代数数、超越数、四元数、八元数等等。

数的观念具有悠久的历史，尤其是自然数观念的产生当在史前时期。在我国史前文化遗存的陶器刻符中就有数字，说明早已形成数的观念了。数的观念产生的详情现在已无法追溯，但严谨的数的理论，尤其是自然数理论，却直到 19 世纪末才建立起来。

一般认为，原始人在用匹配法计数及考察动作的顺序时产生了自然数概念，与自然数概念产生的同时也产生了自然数的运算——算术四则运算，在一定程度上可以说，自然数概念的完善也依赖着数的运算。进行除法运算，即求解方程 $ax=b(a\neq 0)$，a、b 为自然数，方程未必有自然数解，要使它恒有解，即使除法运算得以顺利进行，数的概念就要由自然数扩张到正有理数。巴比伦的泥板、古埃及的纸草书中就已有了自然数和分数，中国古代的《周髀算经》给出了分数运算的方法。可见在人类进入文明之初就已有了自然数和分数(即正有理数的概念)。

中国人最先引进负数概念，《九章算术·方程》的“正负术”进一步给出了负数的加减运算法则。如果说《九章算术》还限于负整数的话，宋元时人们解高次方程就涉及到负有理数。印度人先提出零的概念(公元 5 世纪)和零号“0”(公元 9 世纪)。中国古人由于使用算筹记数从而形成了独特的零的概念和记号(公元 12 世纪)，其后，中国人开始了完整地认识整个有理数的过程。从解方程的角度看，中国古人一般不考虑负数解；第一个承认方程可以有负数解的是印度人婆什迦罗(12 世纪)，西方则是许凯在 1484

年给出二次方程的一个负根，后来才承认负数是数。

人们对(正)无理数的认识比对负数的认识早得多。当然，开始认识的只是一部分无理数，首先是一些非平方数的(正的)平方根。最著名的是古希腊的毕达哥拉斯学派(公元前6世纪)发现等腰直角三角形直角边和斜边的长度不可公度，即直角边长为1的等腰直角三角形的斜边之长不是有理数。据说，他们还证明了这一点。这一点是严格的逻辑证明的结果。这是古希腊数学的一个特点。为了与毕达哥拉斯学派的"万物皆数(整数及其比)"观点相协调，他们有意避开了非平方数的开方计算问题。中国古人很早就会作开方(开平方、开立方)运算，三国时刘徽已认识到开方不尽数，并且认识到可从不足和过剩两方面逼近开方不尽数，他的算法相当于给出两种开方近似公式：$\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a+1}$和$\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a}$，并创用十进分数逐次逼近法。印度人也早就认识到开方不尽数，婆什迦罗等人把无理数视为与有理数一样的数，统一进行处理，这是一大成就。中世纪后期，东方数学传入欧洲，欧洲数学向代数学转化，方程理论成为中心研究课题。16世纪中叶，塔尔塔利亚、卡尔达诺、费拉里等人解决了三次、四次方程的求解问题。这时，由于解高次方程的需要，人们经常遇到开方不尽数，但对其认识却较缓慢，施蒂费尔(16世纪)虽然运用过形式复杂的无理数，但认为它们不是真正的数，甚至帕斯卡、巴罗等数学家也认为不尽根$\sqrt{3}$是"不可解释的"，直到沃利斯、斯蒂文(17世纪)等人才承认无理数是一种实在的数。虽然如此，由于实际的数学工作的需要，在16～17世纪，人们在实际的数学计算中，已承认正数的任何次方根的存在，对某些无理数的研究已达到相当充分的程度。

研究方程求解，免不了要遇到负数开偶次方的问题。1484年，许凯首先注意到这一问题，在解二次方程$4+x^2=3x$时得到根$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}$，他认为这是不可能的。1545年，卡尔达诺认真研究了这种情况，他给出负数开平方的运算方法，并引入最早的虚数记号，但称这种数为"诡辩量"，并怀疑其运算的合法性。1637年，笛卡儿在其《几何学》中第一次给出"虚数"的名称，和"实数"相对应。但怎样理解虚数，又产生了很大的争议。1797年，韦塞尔给出虚数的几何解释；1799年，高斯提出"复数"概念并给出复数的几何表示法；1801年，他系统使用i表示$\sqrt{-1}$(最先是欧拉采用的，但未流行)，并用$a+bi$(a,b为实数)表示复数。后来，高斯又提出用实数的有序对(a,b)表示$a+bi$，用纯代数方法定义了复数的运算。这一思想由哈密顿于1837年发表出来。人们把数的概念扩张到复数。

哈密顿认真研究了从实数扩张到复数的过程。类比于此，他于1843年提出"四元数"的概念：把复数的有序对(α,β)定义为一个四元数。其后不久，凯莱又用四元数的有

序对定义了八元数。它们都被称为“超复数”。于是产生了两个问题：数的概念的扩张的准则是什么？数的概念能否无限制地扩张下去？人们深入研究了这个问题，1867 年，汉克尔提出了数的扩张原则（“固本原则”），大意是：数的概念的扩张是为了满足某种代数运算的需要；扩张的结果必须保持原来的运算都能继续进行（保持各种算律）；扩张所得的新数集中必有一个子集与原来的数集同构。他指出，复数是满足固本原则进行扩张所能得到的最大的数集，六种代数运算可在复数范围内自由实施，n 次代数方程在复数域内有 n 个根；再向超复数扩张，就不能满足固本原则了：四元数的乘法不满足交换律；八元数的乘法既不满足交换律，又不满足结合律。如果舍弃更多的运算性质，超复数还可扩张到十六元数、三十二元数等等。

从自然数到复数构成了通常所说的“数系”，即包括自然数、整数、有理数、实数和复数的系统，这些数之间有如下关系：

自然数、零、负整数 } 整数
整数、分数 } 有理数
有理数、无理数 } 实数
实数、虚数 } 复数

18 世纪数学分析的大发展促使人们对分析基础的研究，分析基础问题最根本的就是实数理论的问题。19 世纪初开始，人们开始努力于建立实数理论，而实数理论，本质上就是无理数的定义问题。

1821 年柯西用有理数序列的极限定义无理数，但依他的定义，该极限应是预先确定的数，只不过要求它与序列中的项之差趋于零而已。这实际上是一个循环定义。无理数的算术定义，必须在逻辑上无矛盾才行。康托尔在 1872 年用有理数的“基本序列”来定义无理数，把有理数基本序列的集合关于一种等价关系（具有同一极限）的等价类叫做实数，所有实数构成的集合记为 R。对有理数 α，令序列 $\{\alpha,\alpha,\cdots\}$ 所在的等价类与之相对应，就能在实数集中找到一个子集 $\bar{Q}$ 与有理数集 Q 同构，$\bar{Q}$ 的元素也称为有理数，不是有理数的实数称为无理数。同一年，戴德金采用了对有理数进行划分的方法定义无理数，他还进一步证明了实数的连续性。外尔斯特拉斯于 1860 年提出了用递增有界数列来定义实数的思想，恰巧也在 1872 年，他的学生利萨克正式发表了他的定义。

1844 年刘维尔开创了超越数研究。1874 年，随着康托尔引入“可数”概念，人们发现，作为代数方程的根的无理数只是无理数的极小的部分，“几乎所有”的实数都是超越数。

由上述，人们在有理数的基础上定义出无理数，有理数本身却是未加严格定义的，定义无理数的需要无疑促进了对有理数的研究。1860 年，外尔斯特拉斯在一次讲课时，用自然数的有序对定义出正有理数，用另一类型的自然数对定义负整数，再用一对正负整数来定义负有理数。稍加改进，就是现代采用的有理数定义方法。外尔斯特拉斯认为，只要承认自然数，建立数的理论就不需要进一步的公理了。他认

为，自然数的本质和属性不能再作逻辑分析了。持这种观点的典型代表是克罗内克，1886 年，他曾说过："上帝创造了自然数，其余都是人做的工作。"但在 19 世纪末数学基础的研究中，人们还是要求证明自然数的无矛盾性的——即对自然数加以准确的逻辑分析和定义。1889 年，皮亚诺运用集合论思想给出了自然数的一个定义。他的定义是所谓"序数"定义；康托尔等人还给出自然数的"基数"定义，当然，二者是等价的。至此，人们对数的认识划过了一个巨大的圆圈（从自然数到自然数），达到了新的层次。

记数法（**numeration system of number**） 记录或标志数目的方法，主要指数字符号的表现形态和记数工具的使用。

在文字产生以前，人类已形成数的概念、数目用实物记录，如石子、竹片、贝壳等，有时也用人类天生的计算工具手指和脚趾，"屈指可数"反映出这种记数法。后来使用了结绳和契刻，直到现在仍有一些民族和部落在使用这两种记数方法。随着记载数目的增大出现了进位制，由于各地区各民族所处的自然环境与社会环境都不相同，因此产生出各种不同的记数方法。

古代两河流域的苏美尔人和巴比伦人用泥板铭刻来记数，约始于公元前三、四千年，主要用于商业贸易交换和贮存货物登记。最初用半圆形或月牙形代表 1，用小圆圈或小圆点代表 10，后来改用一种三角形的木笔，以压粘土板而成楔形，创造一套楔形文字记数法（见数字符号表，下同）。记数采用 10 进制和 60 进制混用。60 以下用 10 进简单累数制，60 以上用 60 进的位值制，这是现在已发现的最早的位值制记数法。

古代埃及最早的数码是发现于石刻上的象形文符号，约产生于公元前二、三千年。它使用十进位非位值制记数法，属于简单累数制，每一个较高的单位都用一个特殊的符号表示，记数时依次重复排列这些符号。后来由于纸草书写的需要演化出两种变体：僧侣符号与民间符号，它仍在记数时采用一种逐级命数法（或称分级符号制），即对个位数、一百以内 10 的倍数，一千以内百的倍数等数目都有专门的符号，避免了重复排列，使记数较为简洁。

中国古代最早的记数体系见于甲骨文，约形成于公元前 16～前 11 世纪，它采用 10 进非位值制记数制，独立的符号共发现 13 个，记数时用一种特别的乘法组合原则，被称为乘法累数制。十、百、千、万是单位词，对 10 以上的数目还多用合文书写。公元前 5 世纪左右出现计算用的算筹，它采用纵横两种布筹方法，为避免位数相混，记数时纵横相间，成为世界上最早的 10 进位值制记数体系。13 世纪后算筹式记数法被描摹应用于纸上，不断演化改进，添加了零号"〇"，成为一套完整的位值制记数法。

古希腊最早的记数法是发现于克里特岛的象形字数码，约始于公元前 1500 年，记数靠重复排列，用 10 进制。约到公元前 6 世纪，发展起一种阿提卡数码，将古希腊语中

数词的第一个字母取出代表该词以简化记数，仍采用简单累数制，是5进和10进位合用。到公元5世纪左右出现古希腊字母记数法，共27个字母，采用逐级命数法，为了与其他单词区别，数字上常加横线。

古代罗马的记数体系与希腊阿提卡数码在使用的时间和方法上都类似，是简单累数制，5进位与10进位合用，中世纪时曾广泛应用于欧洲社会的各种事务中，直今仍在一些特殊场合使用。

古代印度约在公元前2500年就出现一种称为哈拉巴的铭文记数法，只有几个特殊符号。到公元前后通行起卡罗什奇数码和婆罗门数码，前者用简单累数制，后者用分级命数制。公元5世纪后印度数码中的零的符号日益明确，使记数逐渐发展成为10进位值制。如公元8世纪后出现的德温那格利数码，这种位值制记数法约在公元9世纪传入阿拉伯地区，约在13世纪传入欧洲，约在16世纪形成当今通用的印度—阿拉伯数码。

古代中美洲地区的阿兹台克人和玛雅人的记数在公元初年时形成20进位制。后来玛雅人发展起严格的20进位值制，但20以下的数用5进位的简单累数制，还有一套专门用于天文记数的头像数码。不过这种20进位值制对世界数学发展影响不大。

除以上整数记数法外，许多地区还有各自的分数记载方法，例如古埃及的单位分数表示法；巴比伦地区的60进位分数表示法；古希腊的字母分数表示法；古罗马的算盘分数表示法；中国古代和印度古代的分数表达式等。中国约在13世纪出现10进分数(小数)表达式，中亚细亚数学家卡西是中国以外第一个系统应用这种小数的人。目前10进位值制记数法已占统治地位，小数也随之普及，应用日益广泛。

附“数字符号表”

算术(**arithmetic**)　研究数及数集上的运算的数学分支学科。算术的主要内容有数的概念的产生和发展、计算方法和计算工具、各种数的运算、数集的公理结构及数的性质等。研究整数的性质的内容后来发展成为数论。

算术是最古老的数学分支之一，是数学的“起点”之一，数的概念的产生及初步的算术运算的形成可追溯到史前时期。美索不达米亚和埃及地区在公元前30—前20世纪就产生了简单的算术知识(见美索不达米亚数学和埃及数学)。

古希腊人正式提出“算术”学科，但他们的算术只研究数的性质，严格说起来是数论，从毕达哥拉斯直到欧洲中世纪，“算术”学科的内容都是如此。文艺复兴以后，人们才把数的理论及运算研究两者都作为算术学科的内容。《几何原本》第7—9卷总结了古希腊人的算术(数论)知识，例如求两数最大公因数的方法，关于素数的一些定理等；书中还证明了乘法的交换律及乘法对于加法的分配律，这是典型的算术内容。丢番图也研究过一些算术问题(见古希腊数学)。总地看来，古希腊人的数学成果主要在公理法和几何学方面；算术则侧重于数论，数的运

数 学 符 号 表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	20	50	60	100	500	10^3	10^4	10^5	81
巴比伦楔形数码	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]
埃及象形符号	I	II	III	IIII	III II	III III	IIII III	IIII IIII	III III III	∩	∩	∩	∩∩	∩∩∩ ∩∩	∩∩∩ ∩∩∩	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	∩∩∩∩ ∩∩∩∩I
埃及僧侣符号	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
埃及民间符号	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			
中国甲骨文	一	二	三	亖	[illegible]	[illegible]	十	)(	[illegible]	丨	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible] [illegible]（3万）
中国算筹	I	II	III	IIII	IIIII	T	TT	TTT	TTTT	—O	—I	—II	=O	≡O	⊥O	IOO	IIIIOO				≟I
希腊象形数码	I ↄ	II	III	IIII ↄↄↄↄ	III II					•			••	•••••	〈			◇			
希腊阿提卡数码	I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII			Δ	ΔI		ΔΔ	𐅄	𐅄Δ	H	𐅅	X	M		𐅄ΔΔΔI
希腊字母计数	Α α	Β β	Γ γ	Δ δ	Ε ε	Ϛ ς	Ζ ζ	Η η	Θ θ	Ι ι			Κ κ	Ν ν	Ξ ξ	Ρ ρ	Φ φ	,Α ,α	$\overset{\alpha}{M}$		$\overline{\Pi A}$ $\overline{\pi\alpha}$
早期罗马符号	I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII	X	XI	XII	XX	↓	↓X	C	Ɒ	ↀ	ↂ	ↈ	↓XXXI
罗马数字	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XX	L	LX	C	D	M			LXXXI
印度哈拉巴数码	I	II	III	IIII	IIIII	III III	IIII III	[illegible]	[illegible]	[illegible]						[illegible]					
印度卡罗什奇数码	I	II	III	X	IX	IIX	IIIX	XX		7			3	733	333	7I					13333
印度婆罗门数码	一	二	三	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			o	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		
印度瓜温那格利数	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०（零）											
阿兹台克数码	•	••	•••	••••	•••••					[illegible]			[illegible]			[illegible]					[illegible]（八千）
玛雅数字	•	••	•••	••••	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]					[illegible]
西阿拉伯数码	1	2	3	4	5	6	7	8	9												81
东阿拉伯数码	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	·（零）											٨١
15世纪	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0（零）											81
16世纪	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0（零）											81

算、数值计算方面的成果甚少。

与希腊人不同，在中国古代，算术指的是整个数学，特别重视数的运算、计算方法的研究，许多现代看来是属于几何学的问题也是转化为数的问题通过计算来解决的（有时称之为“算术化”）。与此有关，中国数学在世界上最早采用的十进位值

制数字，在计算中表现出较大的优点；中国古代数学使用了独特的计算工具——算筹。算筹的使用大大促进了中国数学的发展，也影响到数学的发展方向：在整个中国古代数学中，计算处于中心的地位。算筹至迟出现于公元前5世纪，此时中国开始进入封建社会，社会生产有了较大的发展，广泛的社会生活对数学提出多方面的要求，中国古代数学逐渐形成了独特的应用体系，《九章算术》就是典型的代表作。一般的应用数学的模式是：人们对某类问题研究出算法，用它可以计算求解同类问题。在遇到这类问题时，则按算法的规定，用算筹计算（后来发展为算盘）。加上中国数字一字一音，形成关于各种算法的口诀，利用口诀可以布筹如飞，大大提高了计算速度和解决问题的能力。把算筹摆法记录下来就是中国的筹算数字，对零的概念和零号的产生起了很大的作用（见零号）。

中国古人对算术作了全面的发展，在《九章算术》中就有了完整的分数运算法则，给出了求最大公因数的一个算法，与《几何原本》的算法本质上是一致的；对比例问题，盈亏问题都作了研究并给出相应的算法；给出开方（开平方、开立方）运算的法则和具体的计算方法；给出正负数的加减法则等。后来刘徽为该书作注，进一步使用了十进小数，提出分数和比例计算的一些新方法。《张邱建算经》和《孙子算经》对不定方程进行了研究，由后者的一个问题发展出孙子定理这样举世闻名的成就和大衍求一术这种独特的算法。《数术记遗》则系统研究了各种大数进位法和计算方法，其中一种大数进位法与现代方法相近。用分数来逼近某个重要数值也是中国古代的一项著名的算术成就。例如刘徽用$\frac{157}{50}$逼近圆周率，5世纪何承天用$\frac{22}{7}$来逼近圆周率，稍后，祖冲之用$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$从两个方面来逼近圆周率，$\frac{355}{113}$（密率）是一项重大的数学成就（见中国数学）。

印度也很早就产生了算术，现代世界通用的印度-阿拉伯数码就起源于印度，零的概念的形成和零号的使用是印度人的一大贡献（见印度数学）。9世纪印度数学传入中亚阿拉伯地区，阿拉伯人进行了改造和发展，12世纪传入欧洲，促进了欧洲数学的发展（见阿拉伯数学）。

7世纪，古希腊数学发展中断，欧洲处于“黑暗时代”，数学出现大幅度的倒退。罗马人主要偏重于实际问题的计算，但古希腊数学的计算不发达，罗马人所使用的是与希腊人类似的非位值制十进数字，算术运算十分困难，多位数的乘法几乎无法进行，分数计算更难以想象地复杂。记数法限制了欧洲算术的发展。12世纪，阿拉伯数学传入欧洲，带来了印度-阿拉伯数码，使欧洲人从繁杂的计算中解放出来，算术得到新的发展。

在乘法运算方法上，一大成果是开始了笔算（欧洲人原来也使用各种“算盘”作计算）。首先发展的是

一种源于阿拉伯人的"格子"算法，在欧洲，它出现在最早出版的印刷本算术书中(1478年)。方法如图，表示 934×314，乘数和被乘数分别写在格子的上方和右方。每两个数的积写在格子里，斜行相加便得答数 293276。后来才出现现代通用的笔算乘法格式。

	9	3	4	
2	2/7	0/9	1/2	3
9	0/9	0/3	0/4	1
3	3/6	1/2	1/6	4
	2	7	6	

欧洲文艺复兴后，数学有了空前的发展，16世纪开始形成现代数学符号，17世纪创立了解析几何和微积分。这些都促进了算术的发展，一方面，由算术发展出代数、数论等新的数学分支；另一方面，算术自身也有了不断的发展。例如数的概念先后扩张到实数和复数(见数)，深入研究了数的运算的性质。1801年，高斯出版了他的名著《算术研究》，不仅开创了现代数论，而且开始了深入的算术理论研究。高斯证明了算术基本定理(大于1的任意自然数均可表成素数的乘积，如果不计次序的差别，表法是唯一的)，对算术理论的发展具有重大的意义。

19世纪非欧几何的创建是数学史上的一个转折点，人们从此开始了对数学基础的研究。随着这一研究的深入，人们不无惊异地发现，为了证明新建立的数学理论的"正确"——首先是无矛盾性，人们不得不借助于原来已有的数学理论；不仅如此，这个过程还要一再地"回顾"，把非欧几何的无矛盾性归结为欧氏几何的无矛盾性，把微积分和欧氏几何的无矛盾性归结为实数理论的无矛盾性，并把实数理论的无矛盾性归结为自然数算术的无矛盾性(见数学基础)，于是人们的数学研究划过一个巨大的圆圈——又回到人们的数学由之出发的地方：自然数算术。人们用数学发展的各种成果重新研究了自然数算术，给出了它的公理体系(例如皮亚诺，1889年)，后来还证明了自然数算术(纯数论系统)的无矛盾性(根岑，1936；阿克曼，1940；竹内外史，1955；哥德尔，1958)。这些都是现代称之为"理论算术"的学科内容。与此同时，人们还展开了数学基础诸方面的研究，取得许多重要的成果，例如算术系统的不完全性(哥德尔，1931；帕里斯等，1977)等。人们深刻地认识到，关于自然数及其性质的研究正处在一个新的起点上，算术又成为我们对数学新一层次研究的起点。

对计算方法和计算工具的研究由于计算机的发展(由机械式→电动式→机电式计算机直到电子计算机，见计算工具)而不断得到深入的发展，对运算性质及本质的研究也成为计算机科学的不可缺少的分支。现代算术为计算机的使用和发展提供着重要的理论基础。

几何学(geometry) 数学中较古老的一门分支学科，一般定义为：研究现实世界空间形式及其和数量

间的关系的一门学科。它起源于土地测量等活动，几何一词的拉丁文是 geometria，来自希腊文中“土地”和“测量”二字的合成词，因此几何学直接源于农业生产的需要。古代中国、埃及、巴比伦、印度、希腊等地都是几何学重要的发源地。

约公元前 320 年，希腊科学史家欧德莫斯编写了最早的几何学史著作，其中说：几何学由埃及人开创，产生于土地测量，由于尼罗河泛滥冲毁地界，所以这种测量对他们是必要的。从埃及金字塔的建造来看，古代埃及在四、五千年前就已懂得不少几何知识。莱因德纸草书（距今 3500 多年）上已有专门的几何计算问题，例如圆面积的计算方法等。巴比伦人的泥板中已有矩形、直角三角形、梯形等图形的面积计算法，还有平行六面体、柱体的体积计算问题，并知道了一般的勾股定理。希腊测量之祖泰勒斯曾利用两个三角形相似的性质测量了金字塔的高，并开始了命题的证明；毕达哥拉斯学派则以发现勾股定理而著称；智人学派提出几何作图三大问题等。古代印度约在公元前五世纪已知道圆与一个特殊矩形面积相等，该矩形的底等于圆的半周长，矩形的高等于圆的半径，他还求出正方形对角线的长度等几何问题。

欧几里得是希腊几何学的集大成者，他编写的《几何原本》将公元前 7 世纪以来希腊几何积累起来的丰富成果整理在严密的逻辑体系中，使几何学成为一门独立的演绎的科学。其中除了关于图形的知识外，还包含着关于量的一般理论和数论的知识，而这些知识的证明也都用了图形的理论。在古希腊时代，几何学意味着全部的数学，《几何原本》在问世后的两千多年里，一直被奉为几何学的经典教本。此外阿基米德在《圆的度量》中创用割圆术，第一次用科学方法确定圆周率的值，在《论球与圆柱》和《论螺线》中亦有多种几何学的创见。阿波罗尼奥斯在《圆锥曲线论》中将圆锥曲线的性质网罗殆尽，还使用了类似坐标的方法，给后世坐标几何的建立以很大启发。

中国战国时期的《墨经》中给出一些几何名词的定义和几何命题，《周髀算经》叙述了勾股定理和矩测量方法，东汉初年的《九章算术》给出许多种面积和体积的计算方法，263 年刘徽注释《九章算术》时用的是“析理以辞，解体用图”的方法，给出许多几何上的理论叙述，南北朝时期祖冲之用割圆术求得圆周率精确到 7 位小数的估值，还给出约率和密率两个近似值分数式。1606 年徐光启和利玛窦合译了欧几里得《几何原本》前 6 卷，创用“几何”一词，该书的思想体系及方法对中国数学发展有较大影响。

1637 年法国数学家笛卡儿的《几何学》发表，其中论述了数与图形之间存在的密切关系，在空间设立坐标后图形可用数量之间的关系来表示，反之，数量之间的关系也可以用图形来表示，这样利用坐标就能把图形的问题转化为数量之间的问题，用代数方法加以处理。这种方法被称为解析几何。解析几何使几何与代数相结合，为 17 世纪分析学

的产生和发展打下坚实的基础。到18世纪由于欧拉等人的努力，解析几何获得长足发展，许多几何上的经典成就纳入解析几何中重新加以整理和研究。例如阿波罗尼奥斯的圆锥曲线论被作为二次曲线用代数方法进行整理。

与解析几何几乎同时创立的新的几何分支是射影几何，以法国数学家德扎格1639年发表的《试图处理圆锥与平面相交情形的文稿》为标志。射影几何起源于绘画和建筑中的透视法，它不用坐标，而直接研究图形，与解析几何方法相对立，被称为综合几何或纯粹几何方法。射影几何由德扎格和帕斯卡奠定基础，18世纪后由庞斯列、施泰纳等人逐渐完善。综合几何方法的另一成果是画法几何，18世纪末由法国数学家蒙日创立。1798年蒙日出版《画法几何学》专著，系统叙述了在平面上绘制空间形体图象的一般方法，并讨论了几何变换理论的应用，曲线和曲面的若干性质等问题。画法几何在19世纪获得较大发展，并在20世纪应用于拓扑变换、列线图解和绘图机械化等方面，不断有新的成果。

与欧几里得几何学相对应的是非欧几里得几何学，起源于对欧氏几何中平行公理的探讨，在18世纪末19世纪初分别由德国数学家高斯、俄国数学家罗巴切夫斯基和匈牙利数学家J·波尔约独立创建。高斯1792—1816年研究的"星空几何"(后称非欧几何)、罗巴切夫斯基1816开始研究的"虚几何学"和J·波尔约1820年开始研究的"绝对几何"本质上是一致的，即以下述假设取代平行公理：在平面上，过直线外一点可以作不止一条直线与这直线不相交。由此推演出来一套无矛盾的几何学，被后人称为双曲的非欧几何学。1854年德国数学家黎曼又将平行公理改换为下述假设：在平面上、任何两条直线一定相交"，并将欧氏几何中的其他公理稍作改动，由此推演出另一套无矛盾的几何学，被称为椭圆的非欧几何学。

分析学的发展为几何研究开辟了广阔的领域。17世纪末和18世纪初已有许多数学家用分析的方法研究曲线和曲面理论。1745年欧拉的《无穷小分析引论》介绍了平面和空间图形的微分几何。1807年蒙日出版《分析学在几何中的应用》，是第一本独立的微分几何专著。1828年高斯发表《关于曲面的一般研究》奠定了曲面论的基础，并决定了微分几何发展的基本方向。1854年黎曼作了《关于几何基础的假设》的演说，首先提出n维流形概念，研究了作为n维流形的特殊情况的黎曼空间和黎曼几何学。黎曼几何学更进一步发展为一般的微分流形的几何学，为新的微分几何学的发展开拓了方向。

1872年德国数学家克莱因作了被称为"埃朗根纲领"的演说，论述了变换群在几何学中的主导作用，把到当时为止已发现的所有几何学统一在变换群的观点下，明确给出了几何的一种新定义。他把几何定义为一个变换群之下的不变性质，突出了变换群在研讨几何中的地位，使人们明确了古典几何所研

究的对象，同时显示出如何建立抽象空间所对应的几何方法，对以后几何学的发展起了指导性的作用。按照克莱因的观点，分别取变换群为运动群、仿射变换群、射影变换群，则隶属于各群的几何学分别是欧氏几何、仿射几何和射影几何。进一步很快发展起仿射微分几何学，射影微分几何学等分支，过去一对一的连续变换群所隶属的几何学也独立发展成为拓扑学。

1899年德国数学家希尔伯特出版《几何基础》一书，建立了三维欧氏几何的公理学，成为现代数学公理化的先驱。之后许多几何学也开始建立公理化体系，使得几何学逐步建立在严密的逻辑体系之上。另一方面由圆锥曲线论开始的代数曲线论发展成为一般代数流形的研究，即代数几何学，它与分析学及代数学进一步相结合，正在迅速发展着。

现代几何学的研究集中在微分几何领域。20世纪以来黎曼几何学应用于广义相对论获得重要发展，空间微分几何取得一系列成果。20年代以来整体微分几何发展迅速，40—50年代的许多结果已影响到数学其他分支的发展。60年代随着计算机的发展又创立了计算几何。70年代又兴起计算机证明，这些都为几何理论的深入研究和实际应用开辟了新的道路。

几何基础(**foundation of the geometry**)　几何学源于土地丈量，对象是图形，最初的方法是实验性和直观性的。随着几何研究问题的复杂化，需要进行推理，在明确规定定义和公理的基础上，排除直观，建立合乎逻辑的几何学思想，这就是几何基础问题。古希腊数学家欧几里得《几何原本》的历史意义就在于它是用公理法建立演绎体系的最早典范，曾长期被认为是完善的逻辑体系。但随着时代发展，人们注意到《几何原本》中的逻辑性存在许多缺陷，公理也不完备，于是相继提出一些新的公理体系。其中德国数学家希尔伯特提出的最典型。1899年希尔伯特出版了他的名著《几何基础》、建立起所谓希尔伯特公理体系。他将几何学的基本对象叫做点(用 $A,B,C,\cdots$表示)、直线(用 $a,b,c,\cdots$表示)和平面(用 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$表示)，又分别称之为直线几何的元素、平面几何的元素和空间几何的元素。然后设想它们之间存在“属于”(在……之上，关联)、“介于”(在……之间)，“合同于”(全合于、相等于)等关系。接着叙述了五组公理：结合公理(关联公理，从属公理)、顺序公理(次序公理)、合同公理(全合公理、全等公理)、平行公理和连续公理。其中结合公理共有8条，确立了点、直线、平面的结合关系，由此可以推出一系列定理，如两条直线至多有一个交点，两个平面或者没有交点，或者有一条相交直线等。顺序公理共有4条，确定了几何元素之间的顺序关系，叙述为“……在……之间”。合同公理共有5条，确定了线段或角的合同关系。由以上三种公理可以推出所有直角都相等，每个线段都有唯一中点等定理。平行公理也叫欧几里得公理，它等价于欧几里得第五公设，叙述为“若

a是任一直线，A是a外的任一点，则在a和A所确定的平面上，只有一条直线通过A，且不与a相交”。这一公理的引进，使几何基础大为简化，也使几何的构造容易得多了。用合同公理和平行公理可以推出关于圆的许多定理，例如通过不在同一直线上的三点能做一个圆，同一弦上的圆周角合同等。连续公理共有2条，第一条也叫度量公理或阿基米德公理，即若AB和CD是任意两线段，则必存在数n，使A到B的射线上，自A作首尾相接的n个线段CD，必将越过B点。第二条也叫直线完备公理，即一直线上的点在满足线性顺序定理，合同公理①，连续公理①的条件下，不可能再扩充。这一条后来常用康托尔公理或戴德金公理来代替。用以上五条公理可以推出欧几里得几何的全部内容。如果只将平行公理换成罗巴切夫斯基公理，就可以推出非欧几何中罗氏几何(双曲几何)的全部内容。希尔伯特的几何基础是三维欧几里得几何学的公理论，但很容易把它推广到n维情况，这一几何公理体系后来有多种表示方法。例如汤姆森利用对称变换将希尔伯特公理改写为群论的表示方法(1933)。希尔伯特的几何基础为整个数学基础的研究指明方向，成为现代数学公理化的先驱。

欧几里得几何学(**Euclidean ge-ometry**)　简称欧氏几何。相对非欧几里得几何学而言，以欧几里得平行公理为基础的几何学。由古希腊数学家欧几里得创始。在此之前，古希腊学者泰勒斯已开始了命题的证明，毕达哥拉斯学派已发现了勾股定理，不可通约量，并知道了五种正多面体的存在，雅典的智人学派提出三等分任意角、倍立方和化圆为方几何作图三大问题，安提丰和欧多克索斯提出改进了穷竭法，埃利亚学派的芝诺提出有关无穷的四个悖论，原子论学派的德谟克利特用原子法得出锥体的体积公式等。加之柏拉图学派提倡智力训练和逻辑思维的培养，欧多克索斯用公理法创立比例论，亚里士多德形式逻辑的奠基，使几何公理化水到渠成。约公元前300年，亚历山大学派的创始人欧几里得按照逻辑系统把几何命题整理起来，用公理法建立起演绎体系，完成巨著《几何原本》，使几何成为一门独立的、演绎的科学。欧几里得平行公理是《几何原本》的第五个公设，即“若一直线与两直线相交，所构成的同旁内角小于二直角，则把这两直线延长，一定在那两内角的一侧相交，”该公设与“平行线的唯一性”是等价的，也称为“欧几里得平行公设”，或简称为第五公设。又因为它在欧氏几何中的重要性，有时也称为“欧几里得公理”。欧几里得几何学意味着欧几里得公理成立的几何学。

《几何原本》是欧几里得几何学的奠基作，几乎包含了现在中学所学的平面几何、立体几何的全部内容。它是由定义、公设、公理、命题组成的演绎推理系统。每一个命题(相当于现在的定理)都是以公设、公理或它前面的命题作为证明的依据，按逻辑相关性排列而成。欧几里得的这种逻辑地建立几何的尝试，成

为现代公理法的源流，在历史上受到很高评价。但用现代标准去衡量，《几何原本》还有不少缺点，例如对点、线、面等原始概念的定义含混不清，个别公理可以从其它公理推出，没有运动、顺序、连续等公理，因此许多证明要借助于直观。

1899年德国数学家希尔伯特出版了他的名著《几何基础》，书中成功地建立起欧几里得几何学的完整的公理体系，即所谓希尔伯特公理体系。该体系首先抽象地把几何学的基本对象叫做点、直线、平面，又分别称之为直线几何的元素（用A、B、C…表示）、平面几何的元素（用a、b、c…表示）和空间几何的元素（用α、β、γ，…表示），再设想它们之间的关系，称做“属于”（在……之上，关联）、“介于”（在……之间）、“合同于”（全合于、相等于）等，这些基本概念叫原始的或不定义的，然后阐述了5组公理：组合公理（关联公理、从属公理）、顺序公理（次序公理）、合同公理（全合公理、全等公理）、平行公理、连续公理，以此作为确定基本几何对象性质和逻辑推理的基础，推出欧几里得几何学的一些基本定理，后人又证明了用这些公理可以推出欧几里得几何的全部内容。这使欧几里得几何学成为一个逻辑结构严谨而完善的几何体系，使数学的公理法基本形成，促进了20世纪整个数学的发展。同时也引起了人们对欧几里得几何基础的大量关注，并启发了相应的几门非欧几里得几何学的研究。许多人使用不同的不定义元素集或公理的变种描述欧几里得几何学：例如美国数学家维布伦就曾将公理体系建立在把点和序作为不定义概念的基础上（1904）。意大利数学家皮耶里将公理体系建立在把点和运动作为不定义概念的基础上。近几十年提出的欧几里得几何公理系统通常建立在不定义的点和向量的概念基础上，该方法是由德国数学家外尔倡导使用的（1918）。德国数学家C.F.克莱因则在1872年著名的“埃朗根纲领”中首次提出另一种方法，把对于在运动群下不变的仿射空间的性质的研究定义为欧几里得几何学，由此引发出n维欧几里得几何学和广义的n维欧几里得学的研究。直到今天欧几里得几何学在内容和方法上仍在不断地充实和提高。

坐标系（coordinate system） 用以确定数或数组与基本几何对象（常常是点）之间对应关系的参考系。最早用于数与形的结合，后来发展为一种数学结构。对于某个数学对象的集合，使其元素对应于数量的结构称为坐标系。用坐标系来确定点的位置这种思想古已有之，公元前4世纪，我国战国时代天文学家石申绘制恒星方位表时已利用了坐标方法。古希腊数学家阿波罗尼奥斯也曾用类于现在直角坐标系的轴线来研究圆锥曲线，写了《平面轨迹》一书。到17世纪，欧洲一些数学家已经开始考虑建立坐标几何学，代表人物是法国数学家费马和笛卡儿。费马用一种没有负数的倾斜坐标描绘曲线，由方程中的两个未知量得出轨迹图形。他还指出联系两个未知量的方程，如果是一次的就代表直线轨迹，如果是二次的就代

表圆锥曲线。笛卡尔则从建立一种使算术、代数和几何统一起来的普遍数学愿望出发，指出平面上的点与实数对(x,y)的对应关系，并考虑二元方程$F(x,y)=0$，当x变化时，y值也跟着改变，x,y的不同数值构成平面上的一条曲线。他实质上只建立了坐标横轴(x轴)，到1750年瑞士数学家克莱姆才正式引入坐标纵轴(y轴)。“坐标”一词由莱布尼兹于1692年创用，他还于1694年使用“纵坐标”一词。“横坐标”是在18世纪由德国数学家沃尔夫等人引入的。坐标系概念建立后发展很快，对于数学的各分支，坐标是多种多样的，一般可分为便于表示空间几何构造的标架类坐标(如射影坐标，仿射坐标等)，以n维欧氏空间中的函数类为基础的曲线坐标(如极坐标、椭圆坐标等)、和适应于拓扑空间的局部坐标等，在现代数学中显示出广泛的应用性。

圆周率(ratio of the circumference of a circle to the diameter 或 number π)　平面上圆的周长与直径之比。用符号π表示。中国古代有圆率、圜率、周等名称。英国数学家奥特雷德1647年用$\frac{\pi}{\delta}$表示圆周率，首次将π与圆周率联系起来。其中的π与δ分别为希腊文圆周和直径的第一个字母。英国另一位数学家琼斯于1706年第一个单用π表示圆周率。到1736年，大数学家欧拉提倡用π后，得到广泛响应，成为通用符号。

古希腊欧几里得《几何原本》(约公元前3世纪初)中提到圆周率是常数，中国古算书《周髀算经》(约公元前2世纪)中有“经一而周三”的记载，也认为圆周率是常数。历史上曾采用过圆周率的多种近似值，早期大都是通过实验而得到的结果，如古埃及纸草书(约公元前1700)中取$\pi=(\frac{4}{3})^4\approx3.1604$，古印度的《测绳经》(约公元前5世纪)取$\pi=18(3-2\sqrt{2})\approx3.088$等等。第一个用科学方法寻求圆周率数值的人是阿基米德，他在《圆的度量》(公元前3世纪)中用圆内接和外切正多边形的周长确定圆周长的上下界，从正六边形开始，逐次加倍计算到正96边形，得到$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$，开创了圆周率计算的几何方法(亦称古典方法，或阿基米德方法)，得出精确到小数点后两位的π值。中国数学家刘徽在注释《九章算术》时(263年)只用圆内接正多边形就求得π的近似值，也得出精确到两位小数的π值，他的方法被后人称为割圆术。南北朝时代的数学家祖冲之进一步得出精确到小数点后7位的π值(约5世纪下半叶)，给出不足近似值3.1415926和过剩近似值3.1415927，还得到两个近似分数值，密率355/113和约率22/7。其中的密率在西方直到1573才由德国人奥托得到，1625年发表于荷兰工程师安托尼斯的著作中，欧洲称之为安托尼斯率。阿拉伯数学家卡西在15世纪初求得圆周率17位精确小数值，打破祖冲之保持近千年的纪录。德国数学家柯伦于1596年将π值算到20位小数值，

后投入毕生精力，于 1610 年算到小数点后 35 位数，该数值被用他的名字称为鲁道夫数，至今德文中还有这种痕迹。1579 年法国数学家韦达给出 π 的第一个解析表达式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

此后，无穷乘积式，无穷连分数，无穷级数等各种 π 值表达式纷纷出现，π 值计算精度也迅速增加。1706 年英国数学家梅钦计算 π 值突破 100 位小数大关。1873 年另一位英国数学家尚可斯将 π 值计算到小数点后 707 位，可惜他的结果从 528 位起是错的。到 1948 年英国的弗格森和美国的伦奇共同发表了 π 的 808 位小数值，成为人工计算圆周率值的最高纪录。

电子计算机的出现使 π 值计算有了突飞猛进的发展。1949 年美国马里兰州阿伯丁的军队弹道研究实验室首次用计算机(ENIAC)计算 π 值，一下子就算到 2037 位小数，突破了千位数。以后的记录有，1959 年法国(IBM704)突破万位(16167 位)小数值，1961 年美国(IBM7090)突破 10 万位(100265 位)小数值，1973 年法国(CDC7600)突破 100 万位，到 1983 年日本已将 π 值算到 800 多万位小数。1986 年 1 月美国又推进到 2900 多万位小数值。1987 年 1 月日本东京大学金田康正副教授用计算机计算 π 值首次突破 1 亿位小数大关。1988 年他又用日立新型超级计算机将 π 值推进到 2 亿多位小数值。最近(1989 年)美国哥伦比亚大学研究人员用克雷—2 型和 IBM—VF 型巨型电子计算机计算出 π 值小数点后 4.8 亿位数，后又继续算到小数点后 10.1 亿位数，创下新的纪录。

除 π 的数值计算外，它的性质探讨也吸引了众多数学家。1761 年瑞士数学家兰伯特第一个证明 π 是无理数。1794 年法国数学家勒让德又证明了 π^2 也是无理数。到 1882 年德国数学家林德曼首次证明了 π 是超越数，由此否定了困惑人们两千多年的"化圆为方"尺规作图问题。还有人对 π 的数字特征及与其它数字的联系进行研究。如 1929 年苏联数学家格尔丰德证明了 e^{π} 是超越数等等。

割圆术(cyclotomic method)

利用圆内接或外切正多边形，求圆周率近似值的方法，其原理是当正多边形的边数增加时，它的边长和逐渐逼近圆周。早在公元前 5 世纪，古希腊学者安蒂丰为了研究化圆为方问题就设计一种方法：先做一个圆内接正四边形，以此为基础做一个圆内接正八边形，再逐次加倍其边数，得到正十六边形，正三十二边形等等，直至正多边形的边长小到恰与它们各自所在的圆周部分重合，他认为就可以完成化圆为方问题。到公元前 3 世纪，古希腊科学家阿基米德在《论球和圆柱》一书中利用穷竭法建立起这样的命题：只要边数足够多，圆外切正多边形的面积与内接正多边形的面积之差可以任意小。阿基米德又在《圆的度

量》一书中利用正多边形割圆的方法得到圆周率的值小于 $3\frac{1}{7}$ 而大于 $3\frac{10}{71}$，还说圆面积与外切正方形面积之比为 11∶14，即取圆周率等于 22/7。公元 263 年，我国古代数学家刘徽在《九章算术注》中提出"割圆"之说，他从圆内接正六边形开始，每次把边数加倍，直至圆内接正 96 边形，算得圆周率为 3.14 或 157/50，被后人称为徽率。注中还记载了圆周率更精确的值 3927/1250（等于 3.1416）。刘徽断言"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。"其思想与古希腊穷竭法不谋而合。割圆术在圆周率计算史上曾长期使用。1610 年德国数学家柯伦用 2^{62} 边形将圆周率计算到小数点后 35 位。1630 年格林贝尔格利用改进的方法计算到小数点后 39 位，成为割圆术计算圆周率的最好结果。分析方法发明后逐渐取代了割圆术，但割圆术作为计算圆周率最早的科学方法一直为人称道。

黄金分割（golden section） 在已知线段上求作一个点，使该点所分线段的其中一部分是全线段与另一部分的比例中项，这就是黄金分割问题。该点所形成的分割通常称为黄金分割，或者说将线段分成中末比、中外比或外内比。早在公元 6 世纪古希腊的毕达哥拉斯学派就研究过正五边形和正十边形的作图，因此可推断他们已经知道与此有关的黄金分割问题。公元前 4 世纪，古希腊数学家欧多克索斯第一个系统研究了这一问题，并建立起比例理论。公元前 300 年前后欧几里得撰写《几何原本》时吸收了欧多克索斯的工作，系统论述了黄金分割，成为最早的有关论著。1228 年，意大利数学家斐波那契在《算盘书》的修订本中提出"兔子问题"，导致斐波那契数列 1，2，3，5，8，13，21，34，…，它的每一项与后一项比值的极限就是黄金分割数，即黄金分割形成的线段与全线段的比值。中世纪后，黄金分割被披上神秘的外衣，意大利数学家帕乔利称中末比为神圣比例，并专门为此著书立说。德国天文学家开普勒称黄金分割为神圣分割。到 19 世纪黄金分割这一名称才逐渐通行。黄金分割数有许多有趣的性质，它的实际应用也很广泛。最著名的例子是优选学中的黄金分割法或 0.618 法，是由美国数学家基弗于 1953 年首先提出的，70 年代在中国推广，取得很大成绩。

正多面体（regular polyhedron） 多面体的各面是全等的正多边形，各多面角是全等的正多面角，这样的多面体叫正多面体。如果这样的多面体是凸的，就叫做凸正多面体。据考，早在古希腊时代，毕达哥拉斯学派的成员就已知道了正四面体，正六面体和正八面体的存在（约公元前 5 世纪初），柏拉图学派的先驱泰特托斯又发现了正十二面体和正二十面体，还可能指出只有这 5 种正多面体（约公元前 4 世纪上半叶）。柏拉图本人在他后期唯一一篇讨论自然哲学的对话《蒂迈欧篇》（Timaieos）中，将这 5 种正多面体与自然元素及宇宙联系在一起，阐发了他关于永恒不变观念与

无定形质料的观点。约公元前3世纪初，欧几里得在他的《几何原本》第13卷中论述了这5种正多面体内接于球的作图法，并称它们为柏拉图体。他在该卷的末尾证明了（凸）正多面体不能多于5个，第一次从数学角度讨论了正多面体。1635年法国数学家笛卡儿首次陈述了一般凸多面体的重要公式：面数＋顶角数－棱数＝2。1752年瑞士数学家欧拉又独立发现并证明了该公式，现在称为欧拉多面体定理。近代正多面体研究着眼于群论和高维空间等方面，相继取得一些成果。

解析几何学（**analytic geometry**） 借助坐标系，用代数方法研究几何对象之间的关系和性质的一门几何学分支，亦叫坐标几何。由法国数学家笛卡儿和费马等人创建，其思想来源可上溯到公元前两千年。美索不达米亚地区的巴比伦人已能用数字表示一点到另一固定点、直线或物体的距离，已有原始坐标思想。公元前4世纪中古希腊数学家门奈赫莫斯发现了圆锥截线，并对这些曲线的性质做了系统阐述。公元前200年左右阿波罗尼奥斯著有《圆锥曲线论》8卷，全面论述了圆锥曲线的各种性质，其中采用过一种“坐标”，以圆锥体底面的直径作为横坐标，过顶点的垂线作为纵坐标，加之所研究的内容，可以看作是解析几何的萌芽。14世纪法国数学家奥雷姆在《论质量与运动的结构》(1360)等书中提出一种坐标几何，用两个坐标来确定点的位置，用水平线上的点表示时间，称为径度；而所对应的速度则用纵线表示，称之为纬度。这是从天文、地理坐标向近代坐标几何学的过渡。他还通过图形来阐明函数关系。到16世纪末，法国数学家韦达提出了应用代数方法解几何问题的想法。韦达是符号代数的创始人，他在代数专著(1593)和几何专著(1600)中都使用代数方法研究几何问题，曾圆满解决了阿波罗尼奥斯等问题，他的思想给笛卡儿以很大启发。此外开普勒发现行星运动三大定律，伽利略研究抛射体运动轨迹，都要求数学从运动变化的观点研究和解决问题，促进了解析几何学的建立。

1637年笛卡儿出版了一部哲学著作《科学中正确运用理性和追求真理的方法论》，书中有三个附录，其中之一是《几何学》3卷。这是笛卡儿唯一的数学论著，阐述了他关于解析几何的思想，后人把它作为解析几何学的起点。书中第一次出现变量与函数概念，他所谓的变量是指具有变化长度和不变方向的线段，还指连续经过坐标轴上所有点的数字变量，因此他试图创建一种几何与代数互相渗透的学科。在卷Ⅰ中将几何问题化为代数问题，提出几何问题的统一作图法，将线段与数量联系起来，设立方程，根据方程的解所表示的线段间的关系进行作图。卷Ⅱ将平面上的点与一种斜坐标确定的数对联系起来，进一步考虑含两个未知数的二次不定方程，指出它代表平面上的一条曲线，并依据方程的次数将曲线分类。这样，一个代数方程可以通过几何直观方法去处理，反之可以用代数方法研究曲线的性质，体现了具有某

种性质的点之间有某种关系，构成解析几何的基本思想。从此人类进入变量数学时期。笛卡儿还改进了符号体系，用 x、y、z 等字母表示未知数，用 a、b、c 等字母表示已知数，这种表示法沿用至今。与笛卡儿同代的数学家费马独立发现了解析几何基本原理。费马在研究阿波罗尼奥斯著作时发现，如果通过坐标系把代数用于几何，轨迹的研究就易于进行，后为此写了一篇短文《平面与立体轨迹引论》(1679 年发表)，其中断言，两个未知量决定一个方程式，对应着一条轨迹，可以描绘一条直线或曲线。1643 年他又在一封信中描述了三维解析几何的思想。另一位数学家拉伊尔于 1679 年也对三维解析几何做过讨论。

解析几何建立后获得迅速发展，并广泛用于各个数学分支。意大利数学家卡瓦列里最先使用极坐标来求阿基米德螺线下的面积。牛顿则第一个把极坐标看成是确定平面上点的位置的一种方法。18 世纪克莱罗在《关于双重曲率曲线的研究》(1731)、欧拉在《无穷分析引论》(1748)中以及拉格朗日(1773)等都讨论了曲面和空间曲线的解析理论。19 世纪德国数学家普吕克发表《解析几何的发展》(1828—1831)和《解析几何系统》(1835)，以优美的方式证明了该领域中的许多结论和定理，在解析几何发展史上占有重要位置。解析几何学大大推动了微积分学的发展，也促进了几何本身的进步，它的直接推广还产生了代数几何分支。在解析几何中，"坐标"一词由莱布尼兹于 1692 年首先使用。"纵坐标"是他两年后正式使用，"横坐标"到 18 世纪由德国数学家沃尔夫引用。而"解析几何学"这个名称直到 18 世纪末才由法国数学家拉克鲁瓦正式使用。

二次曲线 (**curve of second degree**) 也称为圆锥曲线或圆锥截线，是直圆对顶锥面的两腔被一平面所截而得到的曲线。当截面不通过锥面顶点时，曲线可能是圆、椭圆、双曲线和抛物线。当截面通过锥面顶点时，曲线退缩成一点、一直线或两相交直线。圆锥曲线的研究最早是由倍立方问题引起的，公元前 5 世纪古希腊学者希波克拉底首先将倍立方问题归结为求线段 a 与 $2a$ 之间的两个比例中项，导致方程 $x^2=ay$ 与 $xy=2a^2$，在解析几何中被称为抛物线与等轴双曲线。公元前 4 世纪，古希腊数学家门内马斯第一个系统研究了圆锥曲线。他用平面去截三种直圆锥，令平面与母线垂直，如圆锥的顶角是直角，截口是抛物线；顶角是锐角，截口是椭圆；顶角是钝角，截口是双曲线。公元前 3 世纪末，古希腊数学家阿波罗尼奥斯首先证明了一个平面与同一个圆锥面相交，也可以得到这三种曲线。他比较了三种锥线的异同，设锥线方程是 $y^2=2px+qx^2$，证明了 $q<0$ 时是椭圆，$q>0$ 时是双曲线，$q=0$ 时是抛物线，并分别称之为"不足"、"过剩"和"贴合"，这些名称成为现代术语的根源。阿波罗尼奥斯在他的 8 卷本《圆锥曲线论》中将圆锥曲线的性质网罗殆尽，使希腊数学达到顶峰。到公元 4 世纪上半叶，古希腊数学家帕波斯在《数学汇编》中补

充了圆锥曲线的焦点准线性质，证明了下述命题：设一动点至一定点的距离与至一定直线的距离之比等于常数，则动点的轨迹是圆锥曲线。当这个常数等于1时是抛物线；小于1时是椭圆；大于1时是双曲线。这已成为现在教科书中的圆锥曲线的标准定义。11世纪末阿拉伯数学家奥马海亚姆利用圆锥曲线求解三次方程，16世纪德国天文学家开普勒指出行星按椭圆形轨道绕太阳运行，意大利科学家伽利略得出斜抛体运动轨道是抛物线，使人们对圆锥曲线的用途和实际意义有了更深的认识。1665年英国数学家沃利斯在《论圆锥曲线》中第一个将圆锥曲线定义对应于含 x 和 y 的二次方程的曲线，证明了其等同性，并开始用方程推导圆锥曲线的性质。1748年欧拉在他的名著《无穷分析引论》中从一般二次方程 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 出发，系统研究了圆锥曲线的各种情形，并将参数方程和极坐标引进对圆锥曲线的研究中。此后二次曲线(圆锥曲线)理论通过代数和分析方法得到完善，成为近代解析几何的重要组成部分。

二次曲面 (**surface of second degree**) 三维欧几里得空间里坐标 x、y、z 之间的二次方程 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0$（系数 a、b、c，…为实数，二次项系数不全为零）表示的曲面。早在公元前3世纪，古希腊数学家阿基米德就写过一本《论球和圆柱》的论著，从几个定义和公理出发，推出关于球与圆柱面积体积等50多个命题。阿基米德、阿波罗尼奥斯、海伦等人还研究过抛物镜面的反射问题，这是早期对一些特殊二次曲面的探讨，其中被研究的还有双叶双曲面和椭球面，都是由圆锥截线绕轴旋转产生的曲面。解析几何建立后，二次曲面研究在理论上有较大进展。1731年法国数学家克莱罗给出某些二次曲面的求积公式，并指出 x、y、z 的齐次方程表示顶点在原点的一个锥面。1748年大数学家欧拉在他的《无穷分析引论》研究了三个变量的一般二次方程，得到6种二次曲面：锥面、柱面、椭球面、单叶和双叶双曲面、双曲抛物面以及抛物柱面，并主张按方程的次数将二次曲面进行分类，认为次数是线性变换下的不变量。1802年法国几何学家蒙日及其学生证明了二次曲面的每一个平面截口是一条二次曲线，且平行截面截得的是相似的二次曲线。1832年瑞士数学家施泰纳用射影几何的方法构造了直纹二次曲面理论，到今天已日臻完善，成为解析几何学的重要组成部分。

几何度量 (**geometric measure**) 确定或表述几何量中长度、面积和体积的一种方法。最早人们依靠直观进行推演计算。公元前6世纪古希腊学者泰勒斯曾利用日影及比例关系算出金字塔的高。公元前3世纪，阿基米德利用圆内接与外切多边形计算圆周率的值，还求过抛物线被任一弦所围弓形的面积和几种圆锥曲线旋转体的体积，其中已开始用科学方法处理连续与无限的问题。欧几里得《几何原本》中应用的“阿基米德公理”成为近代几

何度量理论的基本公理之一。其原意是:如果两条线(或两个面、两个立体)不等,就可以在两者之差的上面加上差本身,一次一次加上去,使得每一个同类的量(线、面或体)都被超过。据阿基米德本人称,这是公元前 4 世纪的希腊数学家欧多克索斯最先提出的公理。17 世纪积分学建立后,给出面积计算的普遍方法,继而推广到求曲线的长度和立体体积。随着积分学的不断发展,度量概念也不断深化,例如 1890 年意大利数学家皮亚诺作出充满空间的曲线后,引入关于积分和区域的新概念。1899 年德国数学家希尔伯特建立起欧几里得几何学完整的公理体系,以下述方式定义了线段的长度 ρ,①若 $AB=A'B'$,则 $\rho(AB)=\rho(A'B')$;②若 B 是线段 AC 上一点,则有 $\rho(AB)+\rho(BC)=\rho(AC)$。类似地可以定义角的度量、简单多边形的面积和简单多面体的体积,以及圆的周长与面积、球的表面积和体积等。现在几何度量仍有许多种描述方法,一般将它作为抽象空间中的特例进行研究。

三角学(**trigonometry**) 以研究平面三角形和球面三角形的边和角的关系为基础,达到测量上的应用为目的的一门学科。同时还研究三角函数的性质及其应用。三角学的拉丁文拼法为 trigonometria,是三角形 triangulum 和测量 metricus 两字的合并,由德国人皮蒂斯楚斯于 1595 年创用,原意指三角形的测量,即解三角形。早期的三角学是天文学的一部分,后来研究范围逐渐扩大,变成以三角函数为主要对象的学科,一度隶属于分析学。现在一般将它归为几何学的一个分支。

早在公元前 300 年,古代埃及人已有了一定的三角学知识,主要用于测量。例如建筑金字塔、整理尼罗河泛滥后的耕地、通商航海和观测天象等。公元前 600 年左右古希腊学者泰勒斯游埃及,利用相似三角形的原理测出金字塔的高,成为西方三角测量的肇始。据中国古算书《周髀算经》记载,约与泰勒斯同时代的陈子已利用勾股定理测量太阳的高度,其方法后来称为"重差术"。公元前 2 世纪古希腊天文学家希帕霍斯为了天文观测的需要,作了一个和现在三角函数表相仿的"弦表",即在固定的圆内,不同圆心角所对弦长的表,他成为西方三角学的最早奠基者。公元 2 世纪,希腊天文学家数学家托勒密继承希帕霍斯的成就,加以整理发挥,著成《天文学大成》13 卷,包括从 0°到 90°每隔半度的弦表及若干等价于三角函数性质的关系式,被认为是西方第一本系统论述三角学理论的著作。约同时代的门纳劳斯写了一本专门论述球面三角学的著作《球面学》,内容包括球面三角形的基本概念和许多平面三角形定理在球面上的推广,以及球面三角形许多独特性质。他的工作使希腊三角学达到全盛时期。公元 6 世纪初,印度数学家阿耶波多制作了一个第一象限内间隔 3°45′的正弦表,依照巴比伦人和希腊人的习惯,将圆周分为 360 度,每度为 60 分,其中用同一单位度量半径和圆周,孕育着最早的弧度制概念。他在计算正弦值的时候,取圆心

角所对弧的半弦长，比起希腊人取全弦长更近于现代正弦概念。印度人还用到正矢和余弦，并给出一些三角函数的近似分数式。9世纪末到10世纪初，阿拉伯天文学家、数学家巴塔尼引入了正切和余切概念，约920年造出从0°到90°相隔1°的余切表，还发现了球面三角余弦定理 $\cos A=\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos A$。10世纪末艾布瓦法编制了每隔10′的正弦表和正切表，发明了一种计算方法，可求出sin30′精确到9位小数的近似值，首次引入正割和余割概念，证明了斜三角形的正弦定理，还运用正切定理解球面直角三角形。13世纪纳西尔丁在《论完全四边形》中第一次把三角学作为独立的学科进行论述，首次清楚地论证了正弦定理。他还指出，由球面三角形的三个角，可以求得它的三个边，或由三边去求三个角。这是区别球面三角与平面三角的重要标志。至此三角学开始脱离天文学，走上独立发展的道路。

14世纪英国学者布雷德沃丁将正切和余切引入三角计算，成为欧洲早期的三角学研究者。1464年欧洲第一本系统的三角学著作《论各种三角形》由德国数学家雷格蒙塔努斯完成，该书对平面三角学和球面三角学都做了全面阐述，成为在欧洲传播三角学的依据。他还制造了精密的正弦表，并应用三角学解决了一些几何问题。16世纪奥地利数学家、天文学家雷蒂库斯首次编制出六个三角函数表，包括第一张详尽的正切表和第一张印刷的正割表，重新给出三角函数的定义，用直角三角形的边长之比定义三角函数，脱离了过去必须依赖圆弧的作法。他于1562年着手编制更为精密的正弦、正切、正割表，但直到1596年才由他的学生、荷兰数学家奥托完成刊行。这一数学用表包含了每隔10″的6种三角量的值，并用10进小数表示出来。德国数学家皮蒂斯楚斯不仅首次引入三角学一词，还从1596年起开始校正、完善雷蒂库斯的三角函数表，经过长期努力，于1613年最后完成，他的表达到很高的精确度，有些正弦函数值计算到22位小数。1614年英国数学家纳皮尔发明了对数，大大简化了三角计算。1615年发表了法国数学家韦达在20年前得到的 $\sin n\theta$ 展开成 $\sin\theta$ 的公式。1707年法国—英国数学家棣莫弗得到三角学的著名定理 $(\cos\theta\pm i\sin\theta)^n=\cos n\theta\pm i\sin n\theta$，并证明了 n 是正有理数时该公式成立。1748年欧拉证明了 n 等于实数时公式也成立。他还给出另一公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，这些工作都丰富了三角学的内容。

近代三角学始于欧拉的《无穷分析引论》(1748)，他第一次以函数线与半径的比值作为三角函数的定义，并令圆的半径为1，使三角研究大为简化。欧拉创用 a、b、c 表示三角形三边，A、B、C 表示对应的三个角，大大简化了三角公式，这标志着三角学从研究三角形解法进一步转变为研究三角函数及其应用的一个数学分支。我国古代没有出现角的函数概念，只用勾股定理解决了一些三角学范围内的实际问题。1631西方三角学首次输入，以德国传教

士邓玉函、汤若望和我国学者徐光启合编的《大测》为代表。同年徐光启等人还编写了《测量全义》，其中有平面三角和球面三角的论述。1653年薛风祚与波兰传教士穆尼阁合编《三角算法》，以"三角"取代"大测"，确立了"三角"名称。1877年华蘅芳与英国传教士傅兰雅合译《三角数理》，引入近代三角学内容。在此之前戴煦等人对三角级数展开式等问题有过独立的探讨。现代的三角学主要研究角的特殊函数及其在科学技术中的应用，如几何计算等，多发展于20世纪中。

三角函数(trigonometric function) 亦称圆函数。是正弦、余弦、正切、余切、正割、余割等函数的总称。在平面上直角坐标系 $O-XY$ 中，与 x 轴正向夹角为 α 的动径上取点 P，P 的坐标是 (x,y)，$OP=r$，则正弦函数 $\sin\alpha=y/r$，余弦函数 $\cos\alpha=x/r$，正切函数 $\mathrm{tg}\alpha=y/x$，余切函数 $\mathrm{ctg}\alpha=x/y$，正割函数 $\sec\alpha=r/x$，余割函数 $\mathrm{csec}\alpha=r/y$。历史上还用过正矢函数 $\mathrm{vers}\alpha=r-x$，余矢函数 $\mathrm{covers}\alpha=r-y$ 等等。这8种函数在1631年徐光启等人编译的《大测》中已齐备。正弦最早被看作圆内圆心角所对的弦长，公元前2世纪古希腊天文学家希帕雷斯就制造过这种弦表，公元2世纪托勒密又造30°—90°每隔半度的正弦表。5世纪时印度最早引入正弦概念，还给出正弦函数表，记载于《苏利耶历数书》(约400)中。该书还出现了正矢函数，现在已很少使用它了。约510年印度数学家阿耶波多考虑了余弦概念，传到欧洲后有多种名称，17世纪后才统一。正切和余切函数由日影的测量而引起，9世纪的阿拉伯计算家哈巴什首次编制了一个正切、余切表。10世纪的艾布瓦法又单独编了第一个正切表。哈巴什还首先提出正割和余割概念，艾布瓦法正式使用。到1551年奥地利数学家、天文学家雷蒂库斯在《三角学准则》中收入正、余弦，正、余切，正、余割6种函数，并附有正割表。他还首次用直角三角形的边长之比定义三角函数。1748年欧拉第一次以函数线与半径的比值定义三角函数，令圆半径为1，并创用许多三角函数符号。至此现代形式的三角函数开始通行，不断发展至今。

综合几何学(synthetic geometry) 借助图形的直观形象，用公理方法或公设方法所研究的几何学。相对于解析几何而言，亦叫"纯粹几何学"(pure geometry)。综合法在数学中的意义是指，以某些基本名词和关系满足一套公理或公设，经过一定的逻辑推理，导出一系列定理的研究方法。综合几何学中的基本名词是点、直线、平面等，关系是衔接、顺序、合同等。初等几何一般是利用综合法来研究问题，欧几里得《几何原本》提出一套公理和公设，并在此基础上建立起演绎几何体系，可以看作是综合几何学的先声。到17世纪综合几何学的方法体现在射影几何学中，德国天文学家、数学家开普勒于1604年提出平行线的无穷远点概念，法国数学家德扎格于1636年提出两个三角形的透视定理，3年后又引入无穷远点、无穷远线概念，并给出"德扎格

定理”等一批结果，奠定了射影几何学的基础。另一法国数学家帕斯卡于1639年得到“帕斯卡六边形定理”(1640年完成)，并利用它推出数百条推论。这些定理的特点是概括性强，只涉及关联性质而不涉及度量性质(长度、角度、面积)，这种排除欧几里得几何的度量概念，利用综合法处理问题的几何学被称为综合射影几何。但不久，随着解析几何和微积分的兴起，综合法让位于解析法，综合射影几何的探讨也中断了。

18世纪末，法国数学家蒙日发表有关画法几何学的专著，重新用综合法研究几何学，取得重要成果。蒙日还培养了一大批优秀学生，其中做出突出贡献的是庞斯列。庞斯列是19世纪使射影几何学得以复兴的主要奠基人，他于1822年发表的《图形的射影性质》是射影几何学的第一部系统著作，其中研究了图形在投影下保持不变的性质，发展了对合与调合点列理论。他认识到射影几何将成为具有独特方法的新数学分支，并利用配极概念，确立了对偶原则的基础。1832年瑞士数学家施泰纳发表《几何形的相互依赖性的系统发展》，详细讨论了对偶原理，建立起射影几何的严密系统。他推崇综合几何方法，强调几何直观，提出二次曲线的射影产生方法，引入线素二次曲线概念。1847年德国数学家施陶特发表《位置的几何学》专著，完全摆脱了代数和度量关系，通过几何作图来建立直线上的点坐标系，以一种全新的方式建立起纯粹的几何理论，被誉为是近世几何学的创始人之一。至此综合射影几何学形成了一个较完美的体系，它以形象鲜明，论证直接而简洁受到人们的注意，但在应用上受到一定限制，因此数学家们亦采用其他方法来研究射影几何等学科。现代公理法则完全脱离了直观性的约束，以一系列公理形式规定出一些抽象的原始对象间的相互关系，并以此做为基础，导出整个几何学的一切概念和定理，综合几何学正是以这种形式规定的。

几何作图问题 (**problem of geometric construction**) 指只允许有限次地使用某种特定的工具，画出适合所给条件的图形的问题。由于几何作图所使用的工具受一定的限制，因此按指定的方法不一定能画出所求的图形。若按指定方法能画出所求图形时，称这个问题为作图可能问题。如果虽然所求的图形实际是存在的，但按指定的方法画不出图形，则称该问题是作图不可能问题，又所求图形实际上不存在，则称该问题是不成立的。

在几何作图问题中，最古老、最重要的是尺规作图问题，即作图只允许使用直尺(没有刻度，只能作直线的尺)和圆规，亦称为初等作图问题。历史上最早明确提出尺规限制的是古希腊数学家伊诺皮迪斯，以后逐渐成为一种公约。到公元前300年左右，欧几里得在《几何原本》中用公设的形式规定下来，沿用至今。最著名的几何作图问题是古希腊雅典智人学派提出的三大问题：①三等分任意角；②倍立方，求作一立方体，使其体积是一已知立

方体体积的两倍;③化圆为方,求作一正方形,使其面积等于一已知圆。2000多年来,许多数学家为了解决这些问题投入了大量精力,但收效甚微。直到17世纪建立解析几何学后,尺规作图的可能性才有了准则。尺规作图问题归结为通过两点作直线和以一点为圆心作通过另一点的圆,从而归结为确定若干个点的问题。因此把问题用解析方法表示可以明确作图的可能性与不可能性。1837年法国数学家旺策尔证明了三等分任意角和倍立方问题是尺规作图的不可能问题。1882年德国数学家林德曼证明了圆周率π的超越性,同时证明了化圆为方问题是尺规作图不可能问题。1895年德国数学家克莱因总结了前人的研究结果,出版了《几何三大问题》一书,给出三大问题不可能用尺规作图的简明证法,彻底解决了这三个问题。对于几何作图,人们追求用最少的工具画出尽可能多的图形,因此许多人研究只用直尺或只用圆规的几何作图,得到一系列结果,其中有代表性的有:丹麦数学家莫尔1672年证明了,如果把作直线解释为求直线上的两个点,则仅用圆规就可以解决一切尺规作图问题。1797年意大利数学家马斯凯罗尼重新发表了这一结果,流传开来,后人称为马斯凯罗尼圆规问题。1822年法国数学家庞斯列指出,给出一个圆与其圆心时,只用直尺就可以解决任何尺规作图问题。1833年瑞士数学家施泰纳完成了该定理的证明,后人称为施泰纳直尺问题。还有一些数学家研究限定其他条件的尺子和圆规的几何作图,例如1952年德国数学家比贝尔巴赫用直角尺和圆规解决了三等分任意角和倍立方问题;1979年美国数学家佩多提出"生锈圆规"(即开口固定的圆规)的两个作图问题,我国数学工作者张景中等人在这方面得到一系列成果。此外,有时图形虽是作图可能的,但作图法非常复杂。因此不实用,所以有许多种具有相当精度的近似作图法可以使用,如等分圆周等。

画法几何学 (**descriptive geometry**) 几何学的一个分支,研究在适当的规则下把三维空间的图形表现在平面上的方法及规律,以及利用平面图形解决和探讨空间问题的方法的学科。最早由建筑实践提出,后来为机器的制造技术的需要而发展。公元前1世纪古罗马建筑师和工程师维特鲁维厄斯所写的《建筑学》是这方面最古老的著作之一,其中包括水平投影、正面投影、中心投影和透视作图法的一些早期问题。文艺复兴时期透视理论有较大发展。意大利学者阿尔贝蒂在写生画数学原理中采用了灭点,并提出利用网格作透视的方法;达·芬奇在作品中有很多应用透视图的例子,除线性透视外,还补充了绘画中的减色透视和外形减明透视;乌巴尔奇的著作汇总了有关透视的所有主要问题及解答,被认为是理论透视学的奠基作。1636年法国数学家德扎格首先应用坐标法作透视图,为画法几何学中的轴测法奠定了基础。

将画法几何发展成一门科学的关键一步是法国几何学家蒙日迈出

的。1798年他的《画法几何学》出版了,该书是第一本系统叙述在平面上绘制空间形体图象的一般方法的著作。其中的基本构想约始于1765年,1795年曾在巴黎高等师范学校作为课文宣讲过,但因涉及军事防御工程,对外保密,1798年才准于公布。其中对于以正投影法为根据的斜投影法,通过研究立体的截线、光线的阴影和中心投影法而作出贡献,因此正投影法也称为蒙日法。《画法几何学》的目的不仅在于以平面图形准确表达立体物体,还在于根据准确图形,推导出物体的形状和物体各组成部分的相互位置。该书还首次提出下述问题:①几何变换理论的应用;②标高投影某些理论问题的研究;③曲线和曲面的详细研究等。

19世纪以来画法几何学在欧洲一些国家得到进一步发展。1871年德国几何学家菲特涅尔论述了画法几何学与射影几何学在本质上的联系,1853年波尔克发表了轴测投影的基本定理,此后又被许多人进行了推广。19世纪中叶还产生了多维空间画法几何学。19世纪末完成了照象测量法。20世纪初期又建立起圆点投影法。到近现代,在画法几何中拓扑变换和其他变换的应用,列线图解法和绘图机械化等方面仍不断有新的成果。有关画法几何学的各类教科书也层出不穷,内容日渐丰富。

仿射几何学(**affine geometry**) 研究图形在仿射变换下不变性质的几何学。所谓仿射变换是仿射平面(或空间)到自身的一类变换,它最重要的特性是保持点的共线性(或共面性)以及保持直线的平行性。其中仿射空间是这样定义的:设V是一个n维向量空间,A是一个集合,其中的元素称为点,如果对A中每两个点P、Q都唯一对应着V中的一个向量$\vec{PQ}\in V$,并且这种对应规则还满足:①$\vec{PP}=0$(V中零向量);②任给P点和V中向量α,总唯一存在点Q使$\vec{PQ}=\alpha$;③对A中任意三点P、Q、M,成立$\vec{PM}=\vec{PQ}+\vec{QM}$,则称$A$为一个$n$维仿射空间。$n=2$时,称为仿射平面。由此可见仿射几何是一般欧氏几何的一种扩展,在仿射变换下,直线变成直线,平行直线变为平行直线,但长度与角的大小要改变。这种变换最先由18世纪瑞士数学家欧拉注意到,他在论述解析几何与微分几何的坐标变换时涉及到仿射坐标变换问题。19世纪初,德国数学家麦比乌斯在《重心的计算》(1827)一书中引入仿射几何的若干基本概念,并以浅显易懂和清晰严格的论述表达了这一新理论。他同时论述了射影几何理论,在仿射空间中引入无穷远点,并且将它们与原有点不加区别,就成为射影空间。由此可见仿射空间是作为射影空间的一个特例进行讨论的。麦比乌斯用它来计算物体的重心,后人将它用于形变力学的研究。麦比乌斯引入的直射变换就是将直线变为直线的仿射变换,他证明了每一个直射变换都是一个射影变换。1872年德国数学家克莱因用变换群的观点研究几何学,将几

何学看作是某种元素对于变换群的不变量理论。据此，射影几何学就是图形元素关于射影群不变量的理论，而仿射变换构成的群就成为射影变换群的一个子群。20 世纪 20 年代仿射几何学再发新支，由研究曲线和曲面在仿射变换群下不变的性质而建立起仿射微分几何学，丰富了仿射几何学的内容。

射影几何学(**projective geometry**) 研究图形的射影性质，即它们经过射影变换不变的性质的几何学。一度也叫投影几何学。起源于绘画和建筑学中的透视法，也就是投影和截影。公元前 200 年左右古希腊数学家阿波罗尼奥斯在《圆锥曲线论》中把二次曲线作为正圆锥面的截线来研究。公元 4 世纪，帕波斯在《数学汇编》中记载了射影几何学的一些基本概念，如对合、非调合比（即交比）等，还得到“帕波斯定理”：A、B、C 和 A'、B'、C' 分别是两条直线上的三点，则 AB' 与 $A'B$、BC' 与 $B'C$、CA' 与 $C'A$ 的交点共线。文艺复兴时期，绘画艺术的盛行促进了理论的发展，透视法成为一门几何与绘画结合的热门学科。意大利数学家阿尔贝蒂于 1435 年发表《论绘画》一书，阐述了最早的数学透视法思想，他引入投影线和和截景概念，提出在同一投影线下和景物的情况下，任意两个截景间有何种数学关系或何种共同的数学性质等问题，这些问题是射影几何发展的起点。意大利学者、艺术巨匠达·芬奇（1452—1519）在《绘画专论》(1651 年出版）中坚信，数学的透视法可以将实物精确地体现在一幅画中，它是绘画的舵轮和准绳。他认为大自然是按照数学规律发展的，自然界的运动必须通过数量的研究来探索，他本人在绘画中就大量使用比例、透视、构图等知识，还对其他数学内容有所论述。意大利另一画家、数学家弗兰切斯卡约于 1478 年著有《透视画法论》，推进了阿尔贝蒂的投影线和截景的思想，把透视法的数学原理以相当完整的形式表述出来。

17 世纪数学家们重新研究古希腊的圆锥面截线问题和文艺复兴的透视法原理，积累了射影几何的原始素材，同时开始作系统的综合整理工作。1604 年德国天文学家、数学家开普勒在《天文学的光学部分》中提出平行线的无穷远点概念。1636 年法国数学家德扎格出版《论透视截线》的小册子，1639 年又出版《试图处理圆锥与平面相交情形的文稿》。他引入无穷远点、无穷远线等概念，将直线看作具有无穷大半径的圆，论述了“德扎格定理”，即如果两个三角形对应顶点的联线共点，则它们对应边的交点共线，反之亦然，这已成为射影几何学的基本定理。此外他还引入交比、调和比以及对于二次曲线的极点和极线等概念，证明了交比经过透视不变的性质。但由于他在著作中借用许多植物学名称，使人不易理解，因而在当时影响不大。19 世纪中叶他的著作被重新发现，才引起人们的注意，并将他誉为射影几何的奠基人之一。1640 年法国数学家帕斯卡完成他的第一篇数学论文《圆锥曲线论》，其中给出“帕斯卡六边形定

理”：内接于圆锥曲线的六边形的三组对边的交点共线（亦为射影几何的基本定理）。据载他曾由此定理推导出400多条推论。1673—1685年法国另一学者拉伊尔发表了几篇射影几何方面的论文，他运用射影法研究圆的配极性质，并将结论推广到其他的二次曲线，他还利用综合法研究了几乎全部圆锥曲线理论，得到一些重要定理。上述成果构成射影几何学的基本框架，其特点是用综合方法处理几何问题，而不涉及度量性质，被称为是“综合射影几何”。可是不久解析几何和微积分盛行，射影几何的探讨中断100多年。

19世纪初射影几何开始复兴，数学家们从综合法和解析法两个方面使射影几何趋于完善。在综合法方面，法国数学家庞斯列的《图形的射影性质》(1822)是射影几何学的第一部系统论著，其中引入了连续原理，研究了图形在投影下保持不变的性质，发展了对合与调和点列理论，通过几何方法引进无穷远虚圆点，还研究了配极对应并应用它来确立对偶原理。1832年瑞士数学家施泰纳发表《几何图形相互依赖性的系统发展》，详述对偶原理，建立射影几何的严密系统，并引入线素二次曲线概念。1847年德国数学家施陶特发表《位置的几何学》，1856—1860年又出版《位置几何学论文》，首次完善了虚点、虚线、虚平面的理论，以一种摆脱代数和度量关系的全新方法建立射影几何学，至此综合射影几何学形成一个较完美的体系。此外在解析法方面，德国数学家麦比乌斯在1827年出版的《重心的计算》中创建齐次坐标表示空间的点，引入直射变换，并证明每一个直射变换都是射影变换。他还指出线束中的四条线的交比可以用顶点处各角的正弦来表示，得到交比的度量公式，并由此证明了交比在投影与截影下的不变性。另一德国数学家普吕克于1831年在《解析几何的发展》第二卷中解析地阐述了对偶性原理，引入三角形坐标，属于另一种齐次坐标。1839年又在《代数曲线理论》中考察了无穷远点邻域内代数曲线的性质，得到平面上无穷远线的方程，无穷远圆的坐标等结果，还引进线坐标概念，并得到了关于一般线素曲线的一些概念。到1882年，德国数学家帕施在《新几何学讲义》中给出射影几何的一些公理，建立起第一个直线上点的顺序公理集，引进射影变换的代数表示，提出“帕施定理”：在同一平面内，如果一条直线与一个三角形的一条边相交，则它也要与该三角形的另一条边相交。从而建立了第一个严格的射影几何演绎体系。

1872年克莱因在“埃朗根纲领”提出，将几何学看作是图形对某种变换群的不变性质的学问，即关于这种群的不变量理论。他于第二年发表《论所谓欧几里得几何》(1873)，指出欧氏几何、非欧几何均可用纯射影的办法构造出来。他还将几种经典几何看作是射影几何的子几何，其研究方法在以后几十年里产生巨大影响。

对偶原理（**principle of**

duality） 射影几何学的基本理论之一。对偶是关联关系的一种，在射影几何中直线与点在逻辑上处于平等地位，因此被称为平面上的对偶元素。将平面上一个以点和直线构成的图形中的点和直线对换，得到另一个图形，叫做所给图形的对偶。在射影几何中，如果一个命题成立，则它的对偶命题也成立，称为对偶原理。最早论及对偶原理的是法国数学家庞斯列，他在1822年《图形的射影性质》中提出"互反极法则"，给出从极点到极线和从极线到极点的变换的一般表述。两年后他又完成《论配极的一般理论》(1829年发表)，进一步应用了这一方法，促进了对偶原理的建立。同时期的另一位数学家热尔岗于1825—1826年提出"对偶"概念，将对偶原理扩充到除涉及度量性质外普遍适用的原理。他研究了射影几何的先驱德扎格提出的定理：如果两个三角形对应顶点的联线共点，则它们对应边的交点共线。给出其对偶原理：如果两个三角形对应边的交点共线，则对应顶点的联线共点。原定理的逆定理，被称为自对偶定理。热尔岗发明了把对偶的定理写成两栏的格式，把对偶的命题并排写在原命题的旁边。1832年瑞士数学家施泰纳在《几何图形相互依赖性的系统发展》中将圆锥曲线的定义对偶化，通过把图形分类和注重对偶命题而系统地发展了射影几何学。第一个建立对偶原理逻辑基础的是德国数学家普吕克，他在《解析几何的发展》第二卷（1831）中利用线坐标给出对偶原理的代数表述和证明。后来对偶原理推广到三维空间，点和面是对偶元素，直线是自对偶元素。

交比（**cross ratio**） 射影几何学中基本的射影不变量之一。一般是用共线的四个点来定义，设A、B、C、D为共线的四个点，则交比（A，B；C，D）定义为（AC/CB）/（AD/DB），亦称非调和比。早在古希腊，数学家和天文学家就注意到这一比值的特性。约公元100年，门纳劳斯在《球面学》中用到了球面上的大圆弧相交的一个性质，类似于截线的交比不变性，用圆弧所对角的正弦比值来表示。公元4世纪，帕波斯在《数学汇编》中明确阐述了一种交比的性质，设有4条线交于一点，则从一条线上的一点出发的截线所截点间的交比相等。到19世纪，施泰纳、施陶特等数学家已将交比做为他们射影几何理论的基本工具，证明了四个共线点的交比在射影变换下不变的特性。施陶特还改革了交比的定义方法，不依靠长度和迭合概念，而使用点的坐标，设四点坐标为x_1，x_2，x_3，x_4，则它们的交比定义为$\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}/\frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}$，这种表示法在现代几何学中已普遍采用。1853年法国数学家拉盖尔最先探讨复射影平面理论，建立了用交比定义的角的度量公式。此外德国数学家麦比乌斯于1827年开始使用类于现在的符号（A，B，C，D）表示交比$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$，后来又有多种表示方法，直到20世纪中期才统一成（A，B；C，D）。

非欧几里得几何学（**non-**

Euclidean geometry） 不同于欧几里得几何学的几何体系。简称非欧几何。一般是指罗巴切夫斯基几何（双曲几何）和黎曼的椭圆几何。它们与欧氏几何最主要的区别在于公理体系中采用了不同的平行公理。非欧几何起源于对欧几里得平行公设的讨论。公元前3世纪初，欧几里得《几何原本》问世，开篇列出定义、公理和公设，其中第五公设是：同一平面内一条直线与另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角之和小于二直角，则这二直线经过无限延长后在这一侧相交。它不象其他公设那样显然，因此很快就引起人们的争议，认为欧几里得把它放在公理（公设）之列，不是因为它不能证明，而是找不到证明，这是欧几里得几何体系的唯一“污点”。两千多年来，许多几何学家用不同的方法试图证明第五公设，可是都失败了，因为在他们的每一个所谓“证明”中都引进一个新的假定，而这个假定等价于第五公设。

公元2世纪，古希腊数学家托勒密试图从欧几里得其他9个公理公设以及与平行公设无关的欧几里得定理1到28来证明平行公设，但假设了两直线平行后，另一与之相交直线一侧内角成立的东西也必在另一侧同样成立。公元5世纪的普洛克洛斯基于亚里士多德用于证明宇宙有限的公理来证明平行公设，实际上是把一个有问题的公理用另一个来代替。9世纪阿拉伯数学家塔比伊本库拉在《欧几里得著名的公设证明》中假设：如果两条直线与第三条直线相交，并且它们在（第三条直线的）某一侧靠近或相离，则它的（在第三条直线的）另一侧就相离或靠近。13世纪的纳西尔丁在《平行线问题释疑》中也应用了这样的假设：同一平面上的若干直线，若在一个方向上是分离的，则它们在这个方向上就不会靠近。他在此基础上证明了垂线与斜线一定相交、自角内任一点必可作一直线与角的两边都相交等命题，这些都与第五公设等价。纳西尔丁的工作于1663年由英国数学家沃利斯重新阐发，引起欧洲人的重视。1769年丁·芬恩提出一个简单的代替公理：两条相交直线不能同时平行于第三条直线，它对等于英国数学家普莱费尔1795年在《几何原理》中提出的公理：过线外一点，只能作一条直线与已知直线平行，现在称为普莱费尔公理。1794年法国数学家勒让德也出版过一部名为《几何原理》的教科书，其中详细讨论了平行公设问题。他先后又发表过许多有关论著，应用的假设有：任意给定三个不共线的点，存在一个圆通过这三个点；若任何一个三角形内角之和等于两直角，则第五公设成立。

另一方面，数学家尝试从其他9条公设推导出欧几里得的论断。托勒密曾试过直接证明法，更多的人采用间接证明法，就是反证法，即从第五公设不成立的情况下着手，追究它能否得出与已知定理矛盾的结果，如果得不出，又会产生什么事实。这样的思想方法开辟了一条通往非欧几何的道路。1733年意大利数学家萨凯里在《免除所有污点

的欧几里得几何》中率先做出尝试。他从一个四边形 $ABCD$ 开始，其中两个相邻角 A、B 是直角，且 $AC=BD$。欧几里得平行公理相当于另外两个角 C 和 D 是直角，他考虑两种可能的选择，一是 C 和 D 都是钝角，导出矛盾，二是 C 和 D 都是锐角，可以在逻辑上无矛盾地导出许多有趣的定理，但不合于习惯，于是判定也不真。最早认识萨凯里工作意义的是德国数学家克吕格尔，他于 1763 年在博士论文中指出：公理的实质在于符合经验而并非其不证自明，人们之所以接受欧几里得平行公理的正确性是基于经验，他认识到萨凯里没有得出矛盾，只是得到似乎异于经验的结果。1766 年德国数学家兰伯特完成《平行线理论》(1786 年出版)，其中继续萨凯里的探索，考虑到一个三个角都是直角的四边形，研究第四个角是直角、钝角和锐角的可能性，他认识到任何一组假设如果不导致矛盾的话，一定提供一种可能的几何，断言平行公理不成立的那种几何应该可以发生在半径是虚数的球面上。在他之后，施外卡特于 1807 年出版《平行线定理》，陶林努斯发表《平行线理论》(1825) 和《几何原理》(1826)，他们都指出欧几里得平行公理不能证明，同其他公理是互相独立的，并相信有可能选取与欧氏平行公理相矛盾的其他公理建立逻辑上相容的几何，还推导出称为"星空几何"的一些公式。不过他们认为这些非欧几何不能应用于物质空间，只有欧氏几何才是唯一能描述物质空间性质的几何学。

最先认识到非欧几何可以描述物质空间的数学家是高斯，从这一点讲，他被认为是非欧几何学的创始人之一。高斯从 1792 年 15 岁时就认识到能够存在一种逻辑几何的思想，在其中欧几里得平行公理不成立。1799 年底他已开始相信平行公理不能从其余的公理中推出来。1813 年起发展他的新几何，最初称之为反欧几里得几何，后称为星空几何，最后称为非欧几里得几何。他深信它在逻辑上是相容的，且有些确信它是能够应用的。高斯生前关于非欧几何的信件和笔记一直没发表，只是在他 1855 年去世后出版时才引起人们的注意。非欧几何的另外两个创始人是俄国数学家罗巴切夫斯基和匈牙利数学家 J·波尔约。罗巴切夫斯基从 1816 年开始尝试第五公设的证明，他把全部几何命题按是否依赖第五公设分为两部分，不依靠平行公设得到的几何命题现通称为"绝对几何"，其中有这样的命题：在一个平面内，过直线 AB 外一点，至少可以作一条直线与 AB 不相交。如果只能作一条直线与 AB 不相交，就导致欧几里得几何学，即平行公设成立的几何学。罗巴切夫斯基着重从第二种情况出发，即可以作不止一条直线与 AB 不相交，如果推出与绝对几何矛盾的命题，则相当于证明了第五公设。可他不但没有发现任何矛盾，而且在严密推导下得到一系列命题，由此构成逻辑上无矛盾且与绝对几何不冲突，但又与欧氏几何不相同的新几何体系，他称之为"虚几何学。"1826 年他在喀山大学第一次公开

发表这一新学说，1829—1830年又陆续发表《论几何基础》等有关文章，成为世界上最早发表的非欧几何文献。以后几十年虽然他的学说反响甚微，甚至得到嘲讽，但他一直执著地进行研究和著述，1837年用法文写成《虚几何学》，1840年用德文写成《平行线理论的几何研究》，去世前又口述完成《泛几何学》(1855)。J·波尔约在1820年前后开始研究平行线理论，发现第五公设不可能证明。1823年得到非欧几何的基本原理，后写成论文，于1832年附在他父亲的一本初等数学书中发表出去。其中十分简洁概括地论述了一个完整且无矛盾的非欧几何体系，称之为“绝对几何学”。有关非欧几何发明权的确立争议颇多，一般认为高斯，罗巴切夫斯基和J·波尔约在前人大量工作的基础上都做出一定贡献。罗巴切夫斯基和J·波尔约的论著发表时间有前后，但都是各自独立完成的。在这种几何里，三角形的内角和小于两直角，一般称为罗巴切夫斯基几何学，简称罗氏几何。1871年德国数学家F·克莱因改称为“双曲几何学”，沿用至今。

1854年德国数学家黎曼宣读《关于几何基础的假设》(1867年发表）的演说，其中又提出另一种既不是欧氏几何又不是罗氏几何的非欧几何，这种几何采用公理“同一平面上的任何两条直线一定相交”代替欧几里得平行公理，并对欧氏几何中其余的公理稍作改动，被称为“椭圆几何”。其中三角形的内角和大于二直角。它和球面几何学相差无几，如果把球面的对顶点看成同一点，就得到这种几何学。1868年意大利数学家贝尔特拉米发表《非欧几何解释的尝试》，证明了非欧平面几何（局部）实现在普通欧氏空间里，作为伪球面，即负常数高斯曲率的曲面上的内在几何，指出如果非欧几何中如有矛盾，也将在曲面的欧氏几何中出现。他后来又把非欧几何的表示推广到$n>2$维流形，并研究了某些特殊的伪球面。通过他与黎曼等人的工作，明确了在常曲率曲面上可以得到三种几何—负常曲率曲面上的非欧几何、正常曲率曲面上的球面几何以及零曲率曲面上的欧氏几何，这三种几何彼此不相矛盾，各构成一个完整的体系。1871年德国数学家F·克莱因首次认识到从射影几何中可推导出度量几何，并在欧氏几何中建立了非欧平面几何（整体）的模型。这样非欧几何的相容性问题就归结为欧氏几何的相容性问题，这些结果最终使非欧几何获得了普遍的承认。克莱因还注意到有两种椭圆几何：双重椭圆几何与单重椭圆几何。在双重椭圆几何中两个点并不总是确定唯一的直线，例如球面模型中直径的两个端点，而在单重椭圆几何中两个点总确定唯一一条直线。他又从变换群的观点对各种几何学进行了分类，从根本上革新和拓广了人们对几何学观念的认识，并导致人们对几何学基础的深入研究。

1899年希尔伯特在《几何基础》中建立了欧氏几何的公理体系，开创数学公理化的先河。他在书中

指出，用罗巴切夫斯基和J·波尔约的公理代替欧几里得平行公理，而其余的公理保持不变，马上就得到双曲型非欧几何的公理体系。然而椭圆型几何公理体系的建立比较复杂。1904年美国数学家霍尔斯特德在《有理几何》中建立了双重椭圆几何的公理系统。1905年G·赫森伯格作出了单重椭圆型几何的公理体系。至此非欧几何有了严密的基础。非欧几何学首先提出了弯曲的空间，为更广泛的黎曼几何学的产生创造了前提。黎曼几何后来成为爱因斯坦广义相对论的数学工具，按照相对论的观点，宇宙结构的几何学不是欧氏几何而接近于非欧几何，因此许多人采用了非欧几何学作为宇宙的几何模型。非欧几何还在数学的一些分支中有重要作用，它们互相渗透促进着各自的发展。例如法国数学家庞加莱利用复平面上作出的罗巴切夫斯基几何模型证明了自守函数的基本区域是一些互相合同的多边形。这个结果对于建立自守函数理论有重要作用。

微分几何学 (**differential geometry**) 用分析方法研究空间几何性质的数学分支。在古典意义下，微分几何学研究三维欧几里得空间中的曲线和曲面在一点邻近的性质，其发展与分析学和解析几何的发展不可分割。它起源于17世纪发现微积分之时，函数与函数的导数概念实质上等同于曲线与曲线的斜率，函数积分在几何上解释为一曲线下的面积。牛顿、莱布尼茨对此做了奠基性的工作。法国数学家费马还较早地研究了光滑平面曲线作切线的方法，成为微积分的先驱之一。曲线的法线、拐点、曲率、曲率圆、渐屈线、包络线等平面曲线的微分几何都做为微积分的一部分发展起来，其中荷兰惠更斯的渐屈线研究（1673)、牛顿的曲率中心概念的引入（1671)、约翰伯努利的包络成果（1691）颇具代表性。1696年法国数学家洛必达的《阐明曲线的无穷小分析》出版，帮助完成并传播了平面曲线的理论。1731年法国数学家克莱罗开创空间曲线理论，称之为“双曲率曲线”，研究了空间曲线的切线、弧长表达式等问题。1736年欧拉首先引进平面曲线的内在坐标概念，即以曲线弧长作为曲线上点的坐标，开始曲线的内在几何研究。1745年欧拉出版《无穷分析引论》,介绍了平面和空间图形的微分几何。他将曲率描述为曲线的切线方向和一固定方向的交角相对于弧长的变化率，引进曲面上的法曲率、总曲率、法曲率的欧拉公式及球面映射等。他还于1775年给出关于扭曲线理论的完整论述，并与约翰·伯努利、丹尼尔·伯努利一起探讨测地线，将测地线描述为某些微分方程的解。1760年欧拉在《关于曲面上曲线的研究》中建立了曲面理论，得到欧拉定理等结果,成为微分几何发展的里程碑。后来蒙日不仅创立了画法几何学，还于1807年出版关于曲线和曲面的第一部独立的著作《分析学在几何中的应用》,他还独立研究了可展曲面的课题，将同一个问题分别置于几何和分析领域进行讨论，并肯定了这样做的好处，振兴了综合几何

学。蒙日的学生迪潘在《几何学的发展》(1813)中论述了曲面上的共轭渐近线和迪潘指标线，在《几何学和力学的应用》中推广了蒙日的线汇结果。19世纪中期，弗雷内得出曲线的基本微分方程，被称为弗雷内公式。1887—1898年达布创造空间曲线的活动标架概念，详细讨论了曲面理论和曲线坐标，从而完整地建立起曲线理论。

1827年高斯的《关于曲面的一般研究》发表了，它奠定了曲面论的基础，并决定了这一学科发展的基本方向。高斯自1816年起就在大地测量和地图绘制方面做了大量工作，激起他对微分几何的兴趣。在这篇文章里他提出一个全新的概念，将一张曲面本身看作是一个空间，建立了曲面的内在几何学。他强调曲面上只依赖于第一基本形式的一些性质，例如曲面上曲线的长度、两条曲线的夹角、曲面上一区域的面积、测地线、测地曲率和总曲率等等,称之为曲面的内在性质。他证明了由曲面的第一基本形式就确定了曲面的总曲率,即高斯方程，所以总曲率通常称为高斯曲率，它使微分几何有了作为一个数学分支的巩固地位。1854年黎曼在格丁根大学作了就职演说，题为《关于几何基础的假设》(1868年发表)，推广了空间的意义，将曲面本身看作一个独立的几何实体，而不把它仅仅看作欧氏空间中的一个几何实体。首先提出几维流形概念，定义了流形上无限邻近两点的距离并以此作为几何学的出发点，后来称为黎曼度量。以此为基础的几何学称为黎曼几何学。1869年德国数学家克里斯托费尔给出两个n元变量的P阶代数形式等价的充分必要条件,并为此引入克里斯托费尔符号。李普希茨从扩展几维几何概念入手，讨论了多重微分与子流形的性质,并开创微分不变量理论的研究，被认为是协变微分的奠基人。1886年意大利数学家比安基的《微分几何教程》是第一本定名为微分几何的专著。从此“微分几何”一词开始通行。意大利数学家G·里奇于1884—1896年间发展了张量分析方法，通过研究黎曼的代数形式不变量和李普希茨、克里斯托费尔的成果，创立了绝对微分理论，还对任意黎曼簇上的线汇和绝对微积分的应用做了进一步的工作，发现了广义相对论中有重要作用的缩短张量(即里奇张量)。他与他的学生列维—齐维塔合著的《绝对微分法及其应用》给出绝对微分算法的系统设想，该方法适合于黎曼曲线空间中的几何原理与物理定律，为张量分析和拓扑学的发展开辟了道路，也为爱因斯坦广义相对论等问题的解决提供了工具。列维—齐维塔还于1917年引入以他的名字命名的弯曲空间中的平行概念，由此使黎曼空间具有明显的几何意义而易于理解。1918年外尔在《时间、空间、物质》中引入仿射联络的概念，推广了列维—齐维塔的结果，提出所谓规范不变几何用以概括万有引力和电磁场，作出建立统一场论的第一次尝试。

1872年克莱因在埃朗根大学做就职演说时阐述了“埃朗根纲

领”,将几何学定义为研究变换群所用的空间，几何学所研究的对象是在相应变换群下不变的性质。这种用群论统一几何学的思想把几何学与李群结合起来，成了几何学的指导原理，推动了几何学的发展，导致射影微分几何、仿射微分几何、共形微分几何的建立。后经过基灵和E·嘉当的努力，使李群成为微分几何的有力工具，而李群本身也成为微分几何的研究对象，它的推广就是齐性流形即容有可迁变换群的微分流形，是埃朗根纲领所设想的几何空间的最一般形式。

整体微分几何兴起于20世纪初。德国数学家H·霍普夫约于1925年起对黎曼空间的微分几何结构与拓扑结构的关系进行研究，后比利时数学家德拉姆和英国数学家霍奇对流形上局部性质与整体性质的联系进行了研究，建立了流形上微分结构、拓扑结构及黎曼结构的深刻制约关系。在研究黎曼流形的曲率与拓扑结构之间的联系方面，美国数学家艾伦多弗和法国数学家韦伊与陈省身用不同方法将紧致曲面上的高斯一博内公式扩充到高维曲面和紧致黎曼流形上去。陈省身等人还在纤维丛理论中做出突出贡献。法国数学家阿达马和E·嘉当发现单连通的、曲率非正的完备黎曼流形必同胚于欧氏空间R^n，这些都是极富启发性的成果。另外嵌入问题也引起数学家们的兴趣。美国数学家惠特尼于1936年证明了微分流形的嵌入定理，指出每一个n维的微分流形可以嵌入到一个$2n+1$维的欧氏空间。另一英国数学家莫利证明了对紧致的实解析流形这个结果也成立。到50年代，黎曼流形的整体等距嵌入问题也已解决，并对非线性分析和非线性偏微分方程的求解产生重要影响。

现在微分流形是在微分几何与拓扑学两者的观点下发展起来的重要课题，因此，微分几何学可看作是给定二次微分形式、复结构、联络等特殊结构的微分流形的理论，包括中国学者在内的一大批数学家正致力于这方面的研究工作。

曲线（curve）微分几何学研究的主要对象之一。直观上，曲线可看作空间质点运动的轨迹。数学中的严格定义有：区间$[a,b]$到E^3中的映射$r:[a,b]\to E^3$。有时也把这种映射的像称为曲线。人类很早就有曲线的概念，例如圆周、弧等。较早将曲线用于数学问题研究的是公元前300年欧几里得在《几何原本》中给出的线的定义：线只有长度而没有宽度，一线的两端是点。这虽然是对于线的概念的最早说明，但“长度”、“宽度”等都还没有定义，实质上并没有给出线的完全定义。一般来说线分为直线与曲线，不是直线的线称为曲线。但在现代数学中，曲线有包含直线的意义。欧几里得之后，曲线作为几何中自明的概念一直在使用着。在古希腊时代，大部分曲线都被看作是静态的，例如阿波罗尼奥斯论述的圆锥曲线，只有少数曲线用运动来定义，例如阿基米德螺线。公元4世纪帕波斯首次对曲线进行分类，称从直线和圆作出的曲线是平面曲线；圆锥曲线是立体曲线；割圆线、蚌线、蔓

叶线和螺线等特殊曲线为第三类曲线。第三类曲线被希腊人称为机械曲线，因为需要用某些特殊机械来画它们。到 17 世纪，法国数学家笛卡儿又提出几何曲线的概念，指那些可用一个唯一的含 x 和 y 的有限次代数方程来表示的曲线，并进一步按方程的次数将几何曲线进行了分类。意大利科学家伽利略将抛物线看作是物体向上斜抛时运动的轨迹，这种思想被数学家接受，逐渐将曲线看作是动点的轨迹。17 世纪还开始了求曲线长度的研究，1668 年英国数学家丁·格雷戈里在《几何的通用部分》中给出计算曲线长度的方法。此外，1748 年欧拉对所研究的曲线引进参数表示，成为近代向量表示法的基础。

19 世纪末随着数学各分支基础的严密化，曲线概念的严密化也引起人们的重视。1887 年法国数学家若尔当在《分析教程》中给出曲线的定义：由连续函数 $x=f(t)$，$y=g(t)$（$t_0\leqslant t\leqslant t_1$）表示的点集，并要求对每一个 (x, y) 只存在一个 t，这种曲线现在称为若尔当曲线。1890 年意大利数学家皮亚诺发现符合若尔当定义的曲线能填满一个正方形，1891 年希尔伯特将他的例子简化，作出了从单位线段到正方形上的连续映射的另一个例子，成为数学分析中著名的反例。这种情形反映出若尔当曲线定义的缺陷。20 世纪 20 年代数学家重新定义曲线，门格（1926）等人利用拓扑学工具定义曲线为一维连续流，排除了填满空间的曲线，并反映了曲线在同胚下不变这一性质。对曲线的研究是许多数学分支的基本内容，由此建立和发展了相关学科，促进了数学的发展。

曲面（**surface**） 微分几何研究的主要对象之一。直观上，曲面可以看作是空间具有二个自由度的点的轨迹。数学中通常称曲面是二维拓扑流形，即满足于第二可数公理，且各领域与欧几里得平面的圆的内部同胚的拓扑空间。约公元前 300 年欧几里得在《几何原本》中给出面的定义：面只有长度和宽度，面的边缘是线，是对面的最早说明。但同线的概念一样，“长度”、“宽度”等都还没有定义，因此是不完全的定义。古希腊流传下来的朴素概念认为曲线移动可以形成曲面、或立体的表面是曲面等。也有人称不是平面的面为曲面，但在现代数学中曲面有包含平面的意义。

最早研究曲面性质的是古希腊科学家阿基米德，他得到旋转抛物面的一些有趣性质。系统的曲面理论的研究始于 17 世纪末，最先讨论的是曲面上的测地线。1697 年约翰·伯努利提出一凸曲面上求两点间的最短弧问题，第二年雅各布·伯努利解决了柱面、锥面和旋转曲面上的测地线问题。1728 年欧拉给出曲面上测地线的微分方程，1760 年又在《关于曲面上曲线的研究》中建立了曲面的理论，1771 年发表《论表面可以展平的立体》中首次讨论了可展曲面。他的工作由法国数学家蒙日等人进行了发展。蒙日在 1802 年发表的《代数在几何中的应用》一文中证明了二次曲面的每一个平面截口是一条二次曲线，还证

明了单叶双曲面和双曲抛物面是直纹曲面。19 世纪射影几何复兴，曲面理论随之发展。1832 年瑞士数学家施泰纳利用射影原理造出直纹二次曲面，后英国数学家凯莱(1849)、德国数学家库默尔(1864)先后给出三次和四次曲面的特别例子。

1827 年高斯发表《关于曲面的一般研究》，奠定了曲面论的基础。他研究了曲面的曲率，提出曲面作为一个空间的概念，使曲面的几何可以集中在曲面本身上进行研究。这种思想由黎曼继承并发展，推广到任何空间，其中关于任意 n 维流形的曲率概念就是高斯关于曲面的总曲率概念的推广。以后匈牙利数学家拉多给出黎曼曲面的一种精确定义，还于 1925 年证明了曲面一般可进行单形剖分，从而可与二维多面体同胚的结论。在曲面的整体性质方面德国数学家麦比乌斯最早发现单侧曲面，将长方形扭成 180°后对边粘合得到的麦比乌斯带是不可定向曲面中最著名的例证。曲面理论的进一步结果体现在微分几何与拓扑学等学科中，其研究正方兴未艾。

极小曲面 (minimal surface) 面积在法向变分下达到临界值的曲面，也即平均曲率为零的曲面。通俗的说法是由给定的空间曲线界住的面积最小的曲面。18 世纪由变分法的发展而提出。欧拉在 1744 年《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》中用变分的方法处理了极小旋转曲面的例子，得到的结论是由悬链线旋转而生成的悬链面。1760—1761 年拉格朗日给出极小曲面的积分式 $\iint(1+p^2+q^2)^{1/2}dxdy$，其中取极小的函数必须满足微分方程 $(1+q)^2r-2pqs+(1+p^2)t=0$，这是极小曲面理论的一个主要的分析结果。1785 年法国数学家梅斯尼埃在《曲面的曲率》一文中以更加精细的公式给出极小曲面等问题的分析结论，指出拉格朗日给出的方程表示：在极小化曲面上任一点的主曲率（平均曲率）为零。

引起极小曲面研究热潮的是著名的普拉托实验。普拉托是比利时物理学家和数学家，他的实验是把围成封闭曲线的金属丝放入肥皂液中，然后取出来，由于表面张力的作用，在它上面就蒙有表面积最小的薄膜，即极小曲面，记载于 1873 年写的一本书《遵从单一分子模型的流体静力学实验与理论》中。因为边界曲线或曲线组可以非常复杂，所以很难得到解的表达式。从数学上求膜曲面（极小曲面）的问题称为普拉托问题，实质上是一个非线性的椭圆型边值问题。1930 年匈牙利数学家拉多在封闭曲线可求长的情形下，用极限过程证明了普拉托问题解的存在性。1931 年美国数学家道格拉斯引进关于边界值的新泛函代替面积泛函，使普拉托问题解的存在性得到完全解决。他们得到的定理为：给定任一可求长的空间若尔当曲线 Γ，总存在一张以 Γ 为边界的广义极小曲面。1970 年 R・奥斯曼证明了上述存在的解是处处内部正则的，即不会有分支点。

后来丘成桐从极小曲面出发研究微分流形的拓扑学，解决了何时浸入化为嵌入的问题。在唯一性方面，苏联数学家伯恩斯坦证明了 E^3 中完备的极小图必是平面。1960 年以后许多数学家将伯恩斯坦定理推广到高维空间，得到一系列结果。

张量分析（**tensor analysis**） 微分几何中研究张量场的微分运算的一个分支。是用共变微分表示各种几何量和微分算子性质的运算方法，可以看作是微分流形上的“微分法”，是研究流形上的几何和分析的一种重要工具。它起源于德国数学家格拉斯曼的超复数理论和英国数学家哈密顿 1843 年建立的四元数理论。格拉斯曼于 1844 年在《线性扩张论》中独立给出 n 个分量的超复数，称之为扩张的量，论述了超复数作为向量的运算法则及几何意义，1855 年又做了总结。19 世纪 50 年代后黎曼、贝尔特拉米、克里斯托费尔和利普希茨等人建立并发展了微分不变量理论，为张量分析提供了基础。1884—1894 年意大利数学家 C·G·里奇创立绝对微分学理论，并应用于微分几何和物理学的某些问题中。里奇还引入“张量”概念，论述了张量分析中的许多基本理论。有一类二阶共变张量场叫做里奇张量。里奇与他的学生列维—齐维塔合著的《绝对微分法及其应用》(1901) 成为张量分析的经典著作，其中指出了如何把某些偏微分方程及物理规律表示成张量的形式，以便使它们与坐标系无关。1916 年爱因斯坦成功地达到这一目标，用数学不变式表达了广义相对论。另一方面爱因斯坦的工作也促进了张量分析的发展，“张量分析”这一名称就是他于 1916 年开始使用的。

黎曼几何学（**Riemannian geometry**） 德国数学家黎曼在 19 世纪中期提出的一种几何理论。若 n 维空间 R^n 中有一组函数 $g_{ij}(x^i)=g_{ji}(x^i)$ 使得两邻点 x_i，x_i+dx_i 之间的距离 ds 由一个正定二次型 $ds^2=g_{ij}(x)dx_idx_j$ 决定，则称空间 R^n 为黎曼空间。黎曼空间中的几何学称为黎曼几何学。19 世纪初非欧几何学的建立使人们重新认识几何学。1854 年黎曼在格丁根大学发表就职演说，题目是《关于几何基础的假设》(1868 年发表)，其中阐述了曲率和流形的概念，推广了空间的概念。他首先认识到几何学中所研究的对象是一种“多重广延量”，为用抽象空间描述自然现象打下了基础，成为黎曼几何学的开端。他提出黎曼度量概念，认识到距离只是加到流形上的一个结构。黎曼几何在每一点周围非常小的区域里面勾股定理近似成立，但在大一点的范围里一般就和欧几里得几何学有很大的区别了。

黎曼之后，意大利数学家贝尔特拉米、德国数学家克里斯托费尔和利普希茨等人进一步发展了黎曼几何。贝尔特拉米明确了在常曲率曲面上可以得到非欧几何、球面几何和欧氏几何三种几何，论证了微分参数在曲面论中的作用，成为微分几何中不变式理论应用的起点。克里斯托费尔 1869 年给出两个 n 元变量的 p 阶代数形式等价的充分

必要条件，引入克里斯托费尔符号，1880年得到黎曼曲面上第一类线性独立积分类数等于亏格 p^* 的结论等，引导了张量分析和协变微分理论的发展。利普希茨自1869年起发表一系列论著。他从扩展 n 维几何概念入手，讨论了多重微分子流形的性质，同样被认为是微分不变量和协变理论的奠基人之一。之后，意大利数学家C·G·里奇创立绝对微分几何理论（1884—1894），发展了张量分析方法，成为爱因斯坦广义相对论的基石。广义相对论也使几何在物理学中发挥了重大作用，对黎曼几何学的发展产生巨大影响。

1917年意大利数学家列维—齐维塔引进向量的平行位移概念，丰富了黎曼几何的内容。1918年德国数学家外尔开创仿射联络空间的几何，将黎曼几何作为其中一个特例加以研究。此外，1922年美国数学家艾森哈特和维布伦，1918年瑞士数学家芬斯勒分别研究非黎曼几何，得到各自的结果。20—30年代法国数学家E·嘉当开创并发展了外微分形式与活动标架法，建立起李群与黎曼几何之间的联系，也为黎曼几何的发展开辟了道路。黎曼几何的研究已从局部发展到整体，产生了许多深刻的并在其他数学分支（如偏微分方程等）和现代物理学（如规范场理论等）中有重要作用的结果。

闵可夫斯基空间(**Minkowski space**)　爱因斯坦狭义相对论的时空模型。20世纪初由德国数学家闵可夫斯基提出，一般来说 n 维闵可夫斯基空间 $R^{n-1,1}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 的一个变种，其中的基本几何元素是点和向量，亦有直线和各种不同维数的平面等几何图形。狭义相对论中采用的是四维时空 $R^{3,1}$。

1899年荷兰物理学家、数学家洛伦茨在《运动物体中光电现象的简明理论》中对他的电动力学理论作了数学上的处理，引入一种新的坐标变换。1904年又专门为此发表一篇论文，题目就是《洛伦茨变换》。第二年爱因斯坦创立了狭义相对论，所用数学工具就是洛伦茨变换。1907年闵可夫斯基得到完美表述狭义相对论的数学空一时观，1908年在德国科隆举行的科学年会上以《空间和时间》为题进行了演讲，宣告闵可夫斯基空间的建立。根据闵可夫斯基的思想，同一现象的不同描述能用极其简单的数学方式表出，洛伦茨变换只是一种把标准正交基变到另一组标准正交基的线性变换。他通过公式 $ds^2=c^2d^2t^2-dx^2-dy^2-dz^2$（$c$ 为光速）对狭义相对论给予巧妙的几何学意义，因此这一空间被人们称为“闵可夫斯基世界”。不久爱因斯坦以此为基础进一步研究引力场理论，最终于1915年创立广义相对论。

广义相对论（**general theory of relativity**）　爱因斯坦提出的一种引力理论。它将引力场和时空结构联系起来，引入四维洛伦茨流形作为现实时空的模型，其目的是把引力场及其作用加以几何化，因此广义相对论被认为是引力的几何理论。

广义相对论应用的数学工具有

荷兰物理学家、数学家洛伦茨提出的有关空间坐标的洛伦茨变换，德国数学家闵科夫斯基于1860年在《数的几何》中引入的闵可夫斯基空间和1907年在《空间和时间》中引入的数学空一时观，意大利数学家C·G·里奇创立的绝对微分几何和里奇张量等。匈牙利—瑞士数学家格罗斯曼是爱因斯坦的同学，1912年爱因斯坦在创建广义相对论时遇到数学上的困难，格罗斯曼将上述数学成果介绍给他。1913年两人合作了《广义相对论和引力理论纲要》，其中物理学部分由爱因斯坦执笔，数学部分由格罗斯曼执笔。这一工作为广义相对论的建立扫清了道路。

1915年爱因斯坦完成广义相对论的创建工作，并于1916年初在《物理年鉴》上发表长达50页的总结性论文《广义相对论基础》，标志着广义相对论的建立。其基本思想是：四维时空的几何结构和其中的物质分布与运动是互相联系的，这种联系可以用引力场方程 $R_{ij}-\frac{R}{2}g_{ij}=8\pi GT_{ij}$ 来表示，这里 R_{ij} 是里奇张量，R 是数量曲率，G 是引力常数，T_{ij} 是表示物质分布和运动的能量动量张量。特别是在真空区域中就应成立 $T_{ij}=0$。广义相对论提出后很快得到验证，首先根据计算值解释水星近日点的进动与实际观测相符合；1919年英国天文学家爱丁顿等人通过对日全食的观察又证实了广义相对论提出的引力场所引起的光线的弯曲；1924年亚当斯通过对天狼星伴星的观察又证实了广义相对论提出的引力移，这些使广义相对论的地位得以巩固。广义相对论近年的发展受整体微分几何的影响，同时它也促进了黎曼几何等数学分支的发展。

射影微分几何学（**projective differential geometry**） 微分几何学的一个分支，从属于射影变换群。其思想来源于克莱因1872年的著名演说"埃朗根纲领"，在那里将几何学归结为可递变换群的几何不变量理论加以分类。研究的对象主要是曲线、曲面、共轭网等在射影变换群下的不变量、协变图形及其性质。19世纪末法国数学家达布在《曲面通论教程》(1887—1896）和《正交系与曲线坐标》(1898）中系统介绍了近百年来曲线和曲面微分几何学方面的成就，其中蕴含了射影微分几何学的萌芽。同代的数学家阿尔方也对射影微分几何作过系统研究。1906年德国—美国数学家维尔钦斯基发表论著《曲线和直纹曲面的射影微分几何》，将曲线的射影微分几何理论推广到曲面上，成为现代射影微分几何的创始人之一。其后意大利数学家富比尼用一种射影不变的方法获得"富比尼规范坐标"，详尽阐述了系统研究曲线和曲面的过程。他与捷克数学家切赫合著的《射影微分几何》(2卷，1926，1927）与《曲面射影微分几何引论》(1931）已成为该学科的经典著作。

1937年法国数学家E·嘉当出版《射影联络空间理论教程》，创立新的活动标架法，重新建立起射影曲面论，振兴了微分几何学。他

引入一般纤维丛理论，构造了仿射、射影及保形的广义联络空间，他的外形法为现代高维射影空间共轭网理论提供了依据。此外意大利数学家邦皮亚尼和中国数学家苏步青都对射影微分几何做过系统研究工作。苏步青从20世纪30年代末开创并发展起结构式射影微分几何，用几何作图法建立协变的构图和不变量，特别是用平面曲线在某种奇异点的不变量以表达其他几何不变量，是一项具有代表性的显著成果。有关著作有《射影曲线概论》(1954)、《射影曲面概论》(1964)、《射影共轭网概论》(1978)等。

仿射微分几何学 (**affine differential geometry**) 微分几何学的一个分支，从属于仿射变换群。内容包括曲线和曲面在仿射变换群下的不变量、协变图形及其性质。兴起于20世纪20年代初，由德国数学家布拉施克等人创建。布拉施克的《微分几何讲义》(1921—1945)第2卷专论仿射微分几何，得到仿射长度、仿射曲率、仿射挠率、仿射主法线、仿射副法线等与欧几里得几何同样的结果，还论述了仿射极小曲面，曲线、曲面的大范围性质等问题，其方法同射影微分几何的富比尼方法相类似，分别使用了自然方程和基本微分形式，从而导出空间曲线和曲面论的基本定理。其基本思想源于克莱因的“埃朗根纲领”，即将几何学归结为可逆变换群的几何不变量理论加以分类，而讨论方法则依赖于高斯对曲面论所采取的基本形式。

20年代末期，仿射微分几何学的研究主要集中在仿射曲面论的几何结构、仿射铸曲面与仿射旋转曲面论的引进、仿射曲面论和射影曲面论间的若干关系等方面，使这门学科趋于完善。较早的专著有萨尔科夫斯基 (E. Salkowski) 的《仿射微分几何》(1934)。到60年代苏联父子数学家希罗科夫 (Широков) 出版专著《仿射微分几何学》(1962)，汇总了这几十年的研究成果，并附有详细的文献表。中国数学家苏步青从20年代后期从事仿射微分几何学研究，发现了仿射铸面、仿射旋转面和某些特殊族的曲面，并发展了仿射曲面论，70年代又在计算几何中创造了仿射不变量理论，并应用于造船工业中的船体数学放样，收到显著效果。1982年出版专著《仿射微分几何》，较完整地论述了这一学科的全貌，其中关于仿射曲面论的几何结构、仿射旋转面论及其在高维仿射空间的拓广和规范直线成为仿射法线的曲面族的研究成果颇具特色。

积分几何学 (**integral geometry**) 通过各种积分考察图形性质的一门学科，本质上属于整体微分几何范畴。它起源于几何概率的研究，其发展也始终和几何概率相联系着。积分几何的研究从欧氏平面和三维空间开始，逐步拓广到高维欧氏和非欧空间，然后概括到满足一定条件的齐性空间。一般认为最早的几何概率问题是18世纪法国自然科学家比丰提出并解决的投针问题。他于1777年出版《能辩是非的算术试验》一书，其中主要研究几何概率，提出并解决了将圆

形薄片、正方形薄片和针形物品投在平面域上与边界相交的概率计算问题。最著名的是“比丰投针问题”（见比丰投针问题）。此后拉普拉斯、巴比埃等法国数学家对这类问题都有论述。1868年英国数学家克罗夫顿专文论述几何概率问题，1885年在为不列颠百科全书第9版撰写“概率”条目时又重新阐发他的观点。他称这种概率为“区域概率”，给出求解的“克罗夫顿公式”，得到一系列积分公式，其特点是概括性高而推导简洁，至今仍是积分几何中很基本的公式。

1899年法国数学家J·L·F贝特朗出版《概率计算》一书，提出有名的“贝特朗悖论”，即对于同一个几何概率问题，对有关测度的不同要求会导致互相矛盾的解答。后来庞加莱指出，只须要求所采用的测度在一定变换群下不变，那样的矛盾就不会出现。从此，几何概率同变换群相结合，形成积分几何的理论基础，成果日渐丰富。1935年德国数学家布拉施克创用“积分几何学”这个术语，并与其他合作者在这个总标题下发表一系列论文（1935—1955），得到“积分几何的重要公式”等许多成果，使积分几何开始作为几何学的一个分支获得系统而深刻的发展。

积分几何建立以后立即得到推广，布拉施克给出n维欧氏空间及球空间中R维平面的位置密度。陈省身于1940—1966年将积分几何的主要公式推广到n维欧氏空间。他与法国数学家韦伊建立齐性空间积分几何的理论，得到E_n里紧致流形的一般运动公式等结果。布拉施克最早的合作者之一是桑塔洛，他在1935年就利用庞加莱公式得到等周问题的一个解答，后长期致力于积分几何研究，成果累累。他把欧氏平面的各种结果推广到二维常曲率空间，导出类似的公式（1942—1943），并借此解决该空间的等周问题。1952年又仿照陈省身的方法进一步推出n维常曲率空间公式，还研究了仿射空间、射影空间及埃尔米特空间的积分几何学，他所著的《积分几何与几何概率》是积分几何的经典著作。中国较早从事积分几何研究的还有吴大任等人，获得三维椭圆空间的一些积分几何成果，还证明了关于E_2和E_3在凸体弦幂积分的一系列不等式。随着电子计算机的发展，积分几何的应用日益广泛，已出现了“随机几何学”等新学科，其中积分几何提供了理想的工具。

代数几何学（algebraic geometry） 现代数学的一个分支。其名称最早等同于解析几何和射影几何，指所有将代数方法用于几何研究的工作，19世纪后半叶把代数不变量和双有理变换的研究称为代数几何，而现在的定义是：关于高维空间中由若干个代数方程所确定的点集和从这些点集通过一定的构造方式导出的对象即代数簇的数学。从观点上说它是多变量代数函数域的几何理论，也与从一般复流形来刻划代数簇有关，进而它通过自守函数，不定方程等与数论深刻地结合起来。从方法上说，则和变换环论及同调代数有密切的联系。它起

源于平面中代数曲线的研究，主要是19世纪上半叶关于三次或更高次的平面曲线的研究。挪威数学家阿贝尔于1827—1829年发现椭圆函数的双周期性，从而奠定了椭圆曲线的理论基础。德国数学家雅可比于1827—1835年研究椭圆函数，发展了复变量椭圆函数论，将椭圆函数论应用于数论研究，得到同余式和型的理论中的一些结果，成为今天代数几何中许多重要概念的基础。法国几何学家沙勒于1837年开始用低次曲线族来构造代数曲线。英国数学家布尔于1841年开始代数不变量的研究。其后凯莱改进了n次齐次函数不变量的计算方法，首创代数不变式符号，将代数形式给予几何解释，然后再用代数观点去研究几何。西尔威斯特系统地把线性微分算子用于生成不变量和共变量，给出“不变式”术语和零化子名称及其相关理论。此外德国的阿龙霍尔德、哥尔丹、默滕斯和希尔伯特等人对代数不变量理论都有创建。这一切构成代数几何学的初期内容。

1857年黎曼引入并发展了代数函数论，从而使代数曲线的研究获得一个关键性的突破。他将能够互相双有理变换的曲线汇集为一个族，用双有理变换代替射影变换作为研究的基础，把函数定义在复数平面的某种多层复迭平面上，从而引入黎曼曲面概念。他引入亏格概念，以此刻划代数曲线的数值不变量，成为代数几何历史上第一个绝对不变量，即不依赖于代数簇在空间中嵌入的不变量。他还首次考虑了亏格相同的所有黎曼曲面的双有理等价类的参量簇问题，并运用解析方法证明了“黎曼不等式”。另一德国数学家M·诺特用几何方法获得了代数曲线的许多深刻性质，他研究了属于双有理变换的代数簇的不变性质，建立了关于二次变换的若干定理，证明了任意平面代数曲线都能双有理地变换为除了二次结点外没有其他奇点的曲线，从而巩固了黎曼的基础。另一方面，克莱布什与哥尔丹合作于1866年出版《阿贝尔函数论》，被称为是黎曼代数函数理论到纯粹代数几何理论之间的阶梯，也使他们成为现代代数（不变量理论）和现代几何（代数几何）的创始人。19世纪末意大利数学家继承了M·诺特的传统，在代数曲面论方面发展了代数几何的方法，如卡斯泰尔诺沃建立有关曲面和曲线交换的克罗内克—卡斯泰尔诺定理（1937发表），恩里夫斯的代数曲面论研究（1949发表），塞韦里完善了代数曲面上的双有理不变量理论，并推广到任意维的代数簇上去。同时法国数学家亦有许多成果。庞加莱于1901年开创有理数域上的代数几何学，皮卡于1897—1906年发表二元代数函数论专著，开创两个变量的代数函数论。后莱夫谢茨于1924年出版《位置几何与代数几何》，深入研究了复代数曲面理论。这些工作有的不太严密，但非常富有启发性，特别是代数曲面的分类理论被认为是代数几何中最漂亮的理论之一。

非常严密且形式上一般化的代数曲线理论由德国数学家用纯代数

方法或算术方法进行研究。1882年戴德金和韦伯在《单变量代数函数论》论文中把单变量代数函数和数论平行地进行研究。亨泽尔于1902年完善了这一方法。E·诺特将拉斯科和麦考利的形式多项式理想的研究抽象化，在她的影响下，F·K·施密特等人建立抽象域上的算术代数几何。范德瓦尔登应用抽象理想论引进交换代数方法奠定代数几何的新基础(1939),在此基础上，法国数学家于1946年将几何思想引进抽象代数理论中，利用抽象代数方法建立了抽象域上的代数几何理论，把单变量代数函数理论的算术化推广到多变量情形，从而开辟一个新方向。此外，苏联—美国数学家扎里斯基将广义赋值论应用于代数几何,特别是双有理变换上,阐明了双有理对应的性质，从这方面奠定了代数几何的基础。

借助分析方法研究代数几何也取得很大进展。50年代比利时数学家德拉姆证明了用拓扑方式引进的同调和微分形式的上同调之间的对偶原理，建立解析上同调理论。英国数学家霍奇发展了调合积分论。日本数学家小平邦彦推广了黎曼—罗赫定理，利用调和积分论将这一定理由曲线推广到曲面。60年代美国数学家芒福德创立几何不变式理论,由此掀起研究不变式的热潮。他还证明了代数曲面与代数曲线和高维代数簇的不同之处，对代数曲面的分类和性质做了详尽阐述。代数几何与数论、解析几何、微分几何、交换代数、代数群、K理论、拓扑学等许多学科有广泛的联系，它的发展与这些学科的发展起着相互促进的作用。近年来它还应用于控制论和现代粒子物理中的超弦理论等学科，对现代科学的发展起了重要作用。

拓扑学(topology)　研究几何图形在一对一的双方连续变换下保持不变性质的一门数学分支。这种性质称为拓扑性质。最初属于几何学，叫做“位置分析”或“形势分析”，1847年德国数学家利斯廷改称为“拓扑学”，暗指和地形、地势相类似的学科。现在已发展成为研究连续性现象的数学分支，常指与拓扑有关的研究领域。19世纪末已出现点集拓扑学与组合拓扑学两个方向，前者把几何图形看作是点的集合，又常把这个集合看作是一个空间,后来演化成为一般拓扑学。后者把几何图形看作是由较小的部分组成的，研究这些部分的性质，后来发展成为代数拓扑学。在历史上组合拓扑学的研究要先于点集拓扑学。

1679年莱布尼茨发表《几何特性》一文，试图阐述几何图形的基本几何性质，采用特别的符号来表示它们，并对它们进行运算来产生新的性质。他把他的研究叫作位置分析或位置几何学，并另外宣称应建立一门能直接表示位置的真正几何的学问,这是组合拓扑学的先声。

1736年欧拉解决了著名的柯尼斯堡七桥问题（见柯尼斯堡七桥问题）。这原来是一个智力游戏题，问能否在散步中连续地经过七座桥且每座桥只走一次。欧拉解决问题的方式却具有拓扑意义。他简化了

这一问题的表示法，用点代表陆地，用线段或弧代表桥，将问题改变成：能否一笔画出这个图。欧拉证明了这一图形是不能画出的，并作了推广，给出任何一组给定的点和线(弧)能否一笔画出的判别法则，成为组合拓扑学的先声。1750年欧拉又得到了以他名字命名的凸多面体定理：面数＋顶角数－棱数＝2，第二年给出一种简单的归纳证明，1752年发表出来。后人发现笛卡儿约在1635年就已在手稿中表述过这一公式，但他的结果直到1860年才被整理发表出来。欧拉多面体定理表述了几何图形的一个基本组合性质，其目的是利用这一关系将多面体进行分类，这类问题成为19世纪后半叶拓扑学研究的主要问题。长期以来讲述欧拉定理的证明一般采用柯西1811年给出方法，去掉一个面的内部，将剩下的图形铺在一个平面上，把图形割分为三角形，然后在一个个地抹掉三角形时计算这个数的改变，得到所需的结论。该证明假设了任一闭的凸多面体同胚于球面，有不足之处。只因其简单直观而被广泛引用。另一个较简单的证明利用的是球心投影法，据说是法国数学家勒让德最先给出的。1833年高斯在电动力学中用线积分定义了空间中两条封闭曲线的环绕数，为拓扑学研究又提供了一个实例。

1851年以后黎曼在复变函数的研究中提出了黎曼曲面的几何概念，并强调要研究函数和积分，就需要位置分析学的定理。他解决了可定向闭曲面的同胚分类问题，开始了拓扑学的系统研究。1858年德国数学家麦比乌斯和利斯廷各自独立发现了单侧曲面，即将一长纸条的短边扭转180°，然后与对边粘贴而成的曲面，后人称之为麦比乌斯带。1852年英国数学教授格思里提出地图着色的四色问题，1878年由数学家凯莱重新提出后引起广泛注意。1882年克莱因引进“克莱因瓶”这一曲面，它无边，无内外，是亏格为1的单侧曲面。这些工作促进了拓扑学的深入探讨。

19世纪末拓扑学的研究分为两个方向：点集拓扑学和组合拓扑学。点集拓扑学来源于分析学的严密化。德国数学家G·康托尔从19世纪70年代系统展开了欧氏空间中点集的研究，得到许多拓扑概念，如聚点、开集、闭集、稠密性、连通性等。在这种思想影响下，意大利数学家阿斯科利和阿尔泽拉将点集论推广到函数集合上，把函数看成空间的点，引起泛函数的观念，并将函数集看成一种几何对象，讨论其中的极限。法国数学家弗雷歇提出抽象空间的第一个定义，建立了紧致性、完备性、可分离性等基本概念。德国数学家豪斯多夫提出一般度量空间和拓扑空间的集合理论，使用了邻域概念，其著作《点集论纲要》(1913)对拓扑学的发展有重要意义。20年代后波兰数学家谢尔品斯基等人和苏联数学家亚历山德罗夫等人对拓扑空间的基本性质做了系统的研究。30年代后由法国布尔巴基学派作了补充，使一般拓扑学趋于成熟。

组合拓扑学的奠基人是法国数

学家庞加莱，他从1894年开始发表一系列拓扑方面的文章，创立了用剖分研究流形的基本方法，引入许多不变量，探讨三维流形的拓扑分类问题，提出著名的“庞加莱猜想”，其思想和方法被后继者沿用到20世纪30年代。1910—1912年荷兰数学家布劳威尔提出用单纯映射逼近连续映射的方法，证明了不同维的欧氏空间不同胚，引进了同维流形之间的映射的度以研究同伦分类，并开创不动点理论，使组合拓扑学达到概念精确，论证严密的标准。1922年美国数学家D·伯克霍夫和凯洛格共同将不动点定理推广到无穷维函数空间。1925年德国数学家E·诺特提议把组合拓扑学建立在群论的基础上，在她的影响下，H·霍普夫1928年定义了同调群，从此组合拓扑学逐步演变成利用抽象代数的方法研究拓扑问题的代数拓扑学。霍普夫与亚历山德罗夫于1935年合著的《拓扑学》一书流传很广。1945年美国数学家艾伦伯格与斯廷罗德开始以公理化的方式总结当时的同调论，1952年合著成《代数拓扑基础》，对代数拓扑学的传播、应用和进一步发展起了推动作用。1950年前后法国数学家塞尔和勒雷为研究纤维丛的同调论而发展起谱序列这个代数工具，在同伦群的计算上取得突破，为其后拓扑学的发展开辟了道路。50年代末在代数几何和微分拓扑学的影响下产生了K理论，解决了关于流形的一系列拓扑问题，出现了好几种广义同调论，成为代数拓扑学研究的新的工具。

除一般拓扑学和代数拓扑学蓬勃发展外，50年代初法国数学家托姆对高维流形的分类理论进行深入研究，1953年创立配边理论（亦称协边理论），从而使微分拓扑学获得长足进展。1956年美国数学家米尔诺发现七维球面上除了通常的微分结构外，还有不同寻常的微分结构，显示出拓扑流形与微分流形等的巨大差别，从此微分拓扑学被公认为一个独立的拓扑学分支。

此外拓扑学与其他学科的结合产生了一系列新学科。如大范围变分法、规范场理论、拓扑度理论等。拓扑学应用于其他学科更是取得大量成果。近几十年来，拓扑学在经济学、物理学、化学、生物学也有直接和间接应用，它与各数学领域，各科学领域之间的边缘性研究方兴未艾。

一般拓扑学（**general topology**） 亦称点集拓扑学，拓扑学的一个分支，主要研究拓扑空间的自身结构及其间的连续映射的学科。起源于数学分析基础的严密化。19世纪70年代由德国数学家G·康托尔系统开始了欧氏空间中的点集研究，得到极限点、开集与闭集、稠密性、连通性等后来应用于拓扑的概念。在这种思想指导下，意大利数学家阿斯科利于1883年，阿尔泽拉于1889年把点集论推广到函数集合上。1897年法国数学家阿达马又提出将曲线看成一个集合的点。这些都引起泛函的观念。1906年法国数学家弗雷歇引进泛函的一般概念，利用G·康托尔的集合论思想，对函数空间概念加以一般化，引进

一类函数空间，建立导集、闭集、完全集、紧集、列紧集等一系列概念，奠定了抽象空间的理论基础。进一步建立了度量空间、紧致性、完备性、可分离性等抽象空间拓扑理论的重要概念。1914年德国数学家豪斯多夫提出一般度量空间和拓扑空间的集合理论，引入一套公理建立起被称为豪斯多夫空间的一种拓扑空间。弗雷歇和豪斯多夫被认为是一般拓扑学的创始人。

1915年波兰数学家谢尔品斯基、亚尼谢夫斯基、马祖尔克维奇等人一起组织数学讨论班，集中研究拓扑学和集合论，得到几何结构中的“谢尔品斯基曲线”，亚尼谢夫斯基定理、欧氏平面的拓扑结构等一系列重要结果。1920年共同创办《数学基础》杂志，在上面继续发表研究结果。1922年库拉托夫斯基给出拓扑空间的一般定义，后苏联数学家乌雷松创立维数论，深化了一般拓扑学的研究。Π·C·亚历山德罗夫与乌雷松共同创建并发展了紧与列紧空间理论，建立了本质映射定理和同调维数论，并由此导出一系列对偶性原理的基本规律。亚历山德罗夫与德国数学家霍普夫合著的《拓扑学》(1935)一书流传很广。

30年代以后法国布尔巴基学派的成员提出数学的拓扑结构问题，并为此写了《数学原理》中《一般拓扑学》2册，补充了一致性空间，仿紧性等理论，使一般拓扑学趋于成熟。其中的紧拓扑空间和完备度量空间理论对数学发展产生较大影响。50年代以来一般拓扑学发展起许多新分支：由皮亚诺曲线的研究引起维数的研究有了较大发展；由连续统假设独立性的证明引起集论拓扑学的兴起；由模糊集论的提出形成不分明拓扑学（模糊拓扑学）的研究等等，此外，型论研究和无限维流形理论亦很活跃。一般拓扑学在与其他分支相互作用中不断发展。

拓扑空间 (**topological space**)
欧几里得空间的一种推广，给定任意一个集，在它的每一个点赋予一种确定的邻域结构便构成一个拓扑空间。拓扑空间是一种抽象空间，这种抽象空间最早由法国数学家弗雷歇于1906年开始研究。1913年他考虑用邻域定义空间，1914年德国数学家豪斯多夫给出正式定义。豪斯多夫把拓扑空间定义为一个集合，并使用了“邻域”概念，根据这一概念建立了抽象空间的完整理论，后人称他建立的这种拓扑空间为豪斯多夫空间(即现在的T_2拓扑空间)。同时期的匈牙利数学家F·里斯还从导集出发定义了拓扑空间。20年代苏联莫斯科学派的数学家Π·C·亚里山德罗夫与乌雷松等人对紧与列紧空间理论进行了系统研究，并在距离化问题上有重要贡献。1930年该学派的吉洪诺夫证明了紧空间的积空间的紧性，他还引进了拓扑空间的无穷乘积（吉洪诺夫乘积）和完全正规空间（吉洪诺夫空间）的概念。

20世纪30年代后法国数学家又在拓扑空间方面作出新贡献。1937年布尔巴基学派的主要成员H·嘉当引入“滤子”、“超滤”等重要概念，使得“收敛”的更本质的

属性显示出来。韦伊提出一致性结构的概念，推广了距离空间，还于1940年出版了《拓扑群的积分及其应用》一书。1944年迪厄多内引进双紧致空间，提出仿紧空间是紧空间的一种推广。1945年弗雷歇又提出抽象距的概念，他的学生们进行了完整的研究。布尔巴基学派的《一般拓扑学》亦对拓扑空间理论进行了补充和总结。

此外，美国数学家A·H·斯通研究了剖分空间的可度量性，1948年证明了度量空间是仿紧的等结果。捷克数学家切赫建立起紧致空间的包络理论，为一般拓扑学提供了有力工具。他的著作《拓扑空间论》于1960年出版。近几十年来拓扑空间理论仍在继续发展，不断取得新的成果。

度量空间（**metric space**） 设X是一个集合，d是定义在$X \times X$上的非负实值函数，使得对任何$x, y, z \in X$有：①$d(x, y)=0$的充要条件是$x=y$；②$d(x, y)=d(y, x)$；③$d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z)$，则称$X$是一个度量空间。它是欧几里得空间的推广，被称为最基本、最重要的抽象空间。起源于德国数学家G·康托尔创立的集合论，由法国数学家弗雷歇于1906年首先给出定义的。弗雷歇同时给出其他抽象空间的一些基本概念。1914年豪斯多夫在度量空间的理论方面增添了许多成果，特别是证明了每一个度量空间能够并且只能够按一种方式扩展成一个完全的度量空间。1925年苏联数学家乌雷松在去世后发表的论文中证明了每一个正规的拓扑空间是可度量的，还证明了每一个可分离的度量空间同胚于希尔伯特方体的一个子集等重要结果。此后度量空间理论随着拓扑学的发展而相应地前进，其中拓扑空间的度量化问题是一个较重要的问题，50年代日本、苏联和美国数学家获得一系列重要结果，得到拓扑空间可度量化的充要条件。

维数（**dimension**） 刻画几何图形拓扑性质的一种数。通俗地说，它是确定整个图形中点的位置所需要的坐标（或参数）的个数。点的维数设为0，直线、平面和日常所指的空间的维数依次为1，2，3。19世纪以前的几何学仅从事三维或低于三维图形的研究。19世纪以来高维研究兴起，如闵可夫斯基空间就是3维欧氏空间加上时间变量的4维空间。1878年德国数学家G·康托尔证明了一条线段上的点能够和正方形的点建立一一对应，1890年意大利数学家皮亚诺根据法国数学家若尔当的曲线定义构造出能填满一个正方形的曲线，这些都使数学家认真考虑维数的定义。

1912年法国数学家庞加莱给出维数的一个归纳定义：一个连续统叫做n维的，如果它能分成两部分，其公共边界是由n-1维的连续统组成的。1913年荷兰数学家布劳威尔改进了庞加莱的定义，给出大归纳维数定义。此后门格（1923）和乌雷松（1925）得到另一种小归纳维数定义，并定义曲线为一维连续统。连续统是闭的连通集，由此排除了填满平面域或空间的曲线。门格的《维数论》（1928）给出有关维

数的许多基本定理。此外捷克数学家切赫定义了覆盖维数，由于应用了法国数学家勒贝格提出的方法，因此这种维数也称为勒贝格维数。苏联数学家П·С亚历山德罗夫定义了同调维数（1928—1929），建立起同调维数论。以后波兰数学家胡雷维奇对维数理论作出较大贡献，他与沃尔曼合著的《维数论》（1941）是维数理论的经典著作。近年来无限维空间的维数论得到重视，已开始成为维数论的中心课题。

代数拓扑学（algebraic topology） 拓扑学的一个分支，主要依赖代数工具来解决拓扑问题的学科。起源于组合拓扑学，由法国数学家庞加莱奠基。庞加莱由复函数的单值化和微分方程决定的曲线的研究中引出拓扑学问题，于1895—1904年间创用剖分研究流形的方法，引进基本群、同调、贝蒂数、挠系数等许多不变量，并提出具体计算的方法。1910—1912年荷兰数学家布劳威尔提出了用单纯映射逼近连续映射的方法，证明了不同维的欧氏空间不同胚，引进了同维流形之间的映射的度以研究同伦分类，开创不动点理论。1915年美国数学家J·W·亚历山大证明了贝蒂数与挠系数的拓扑不变性，发展了同调论，推广了庞加莱的对偶定理。至此代数拓扑学的两大支柱同调论和同伦论已初具规模，成为该学科的主要工具。

1925年德国女数学家E·诺特提议将组合拓扑学建立在群论的基础上，1928年德国数学家H·霍普夫定义了同调群，使组合拓扑学逐步演变成利用抽象代数的方法研究拓扑问题的代数拓扑学。20—30年代苏联数学家П·С·亚历山德罗夫与庞特里亚金等人在对偶原理等方面取得大量成果，更新了代数拓扑学的内容。1935—1936年波兰数学家胡雷维奇引进拓扑空间的n维同伦群，建立群的同伦理论。同年美国数学家惠特尼给出微分流形的一般定义，1937年又证明了微分流形的嵌入定理，正式创立微分拓扑学。为研究微分流形上的向量场，提出纤维丛概念，从而使许多几何问题都与同调（示性类）和同伦问题联系起来。1945年美国数学家艾伦伯格与斯廷罗德倡导用公理法来引进同调群，1952年写成《代数拓扑学基础》，其中把代数拓扑学的基本精神概括为：把拓扑问题转化为代数问题，通过计算来求解。斯廷罗德还发现一类上同调运算，使代数拓扑学有重大变革，并于1951年出版了《纤维丛的拓扑》一书。1945年法国数学家勒雷建立了谱序列的理论，并用谱序列对纤维空间的同调计算得到深刻结果。1949—1954年法国数学家赛尔发现了纤维丛理论，得出一般纤维空间概念。他利用谱序列等工具解决了纤维、底空间、全空间的同调关系问题，并引进局部化方法把求同伦群的问题加以分解，得出一系列重要结果。

50年代末由于代数几何和微分拓扑的影响产生了K理论，并出现好几种广义同调论，成为代数拓扑学的有力工具。英国数学家J·F·亚当斯等人于60年代初在解决r标架场等问题上取得成功。70年代

后，代数拓扑学中的广义同调论、变换群作用下的共变同调与同伦论、有理同伦论等方面都有进展，在其他学科中的应用也日趋广泛和深入，显示出了强大的生命力。

同调论（homology theory） 代数拓扑学中研究与同调概念有关的课题，是代数拓扑学的一个主要组成部分。同调概念建立在定向图形之间的边缘关系上。1870 年意大利数学家贝蒂对任意 n 维流形都定义了 r 维同调群（$o \leqslant r \leqslant n$）。1895 年法国数学家庞加莱对同调概念做一般的讨论，引进单纯复形和闭链等概念，并定义了同调群，成为最早在拓扑学中引入代数或组合方法的数学家。1915 年美国数学家 J·W·山历山大证明了多面体的同调群的拓扑不变性，推出贝蒂数与挠系数的拓扑不变性，使同调论得到重视，获得较大发展。1927 年奥地利数学家菲托里斯定义了复形的同调群。1928 年苏联数学家 П·C·亚历山德罗夫定义了射影同调群，1932 年捷克数学家切赫又将此推广到紧空间。苏联数学家科尔莫戈罗夫（1936）与 J·W·山历山大（1938）共同发展了菲托里斯同调群，得到科尔莫戈罗夫—山历山大同调群。美国数学家斯帕尼尔于 1948 年又建立了科尔莫戈罗夫—斯帕尼尔同调群。为解决同调理论发展的多头局面，美国数学家艾伦伯格与斯廷罗德从 1945 年起倡导用公理法引进同调群，他们把 n 个同调群的基本性质作为公理，对同调论进行刻划，使同调论在此公理基础上统一起来，并证明了在多面体的情形下满足公理的同调群、上同调群是唯一的。1952 年合作出版《代数拓扑基础》，大大丰富了同调论的内容。

同伦论（homotopy theory） 代数拓扑学中研究与连续映射的连续形变有关的各种课题，是代数拓扑学的一个主要组成部分。同伦概念的直观解释就是连续变形，以此为基础定义的基本群称为同伦群。最早论及同伦群的是法国数学家庞加莱，他于 1895 年引进的复形基本群被称为第一同伦群。1912 年荷兰数学家布劳威尔引入同维流形之间映射的度以研究同伦分类，开创不动点理论。20 年代德国数学家 H·霍普夫探讨了球面同伦理论。30 年代波兰数学家胡雷维奇建立了群的同伦理论，引进拓扑空间的 n 维同伦群。另一波兰数学家博苏克于 1936 年定义了从拓扑空间到 n 维球面的映射类的和，由此得到博苏克上同伦群。40 年代苏联数学家庞特里亚金给出从 $(n+k)$ 维球到 n 维球的映射同伦分类，被称为庞特里亚金类，50 年代初，法国数学家塞尔提出了研究同伦群的新方法，利用纤维化的谱序列，取得了球面同伦群计算的突破性进展。50 年代末英国数学家 J·F·亚当斯提出新的谱序列，成为研究同伦论的重要工具。60 年代初广义同调论的发展使同调的问题可以转化为同伦的问题，从此代数拓扑学的这两个主要分支统一起来，共同获得重大发展。

纤维丛（fibre bundle） 拓扑乘积的推广，产生于微分几何研究，系统研究始于 20 世纪 30 年代。

1936年瑞士数学家施蒂费尔考虑以微分流形的每一点为原点的有限个线性独立向量场，引入流形的微分同胚不变量。1937年美国数学家惠特尼把流形及以其上每一点为原点的线性独立的切向量组全体总括在一起而得到纤维丛的概念。他还证明了微分流形的嵌入定理，正式创立微分拓扑学。1946年陈省身认识到E·嘉当的联络的几何学思想与纤维丛理论有密切关系，从而把微分几何推进到大范围的情形。50年代初法国数学家塞尔在E·嘉当指导下，在代数拓扑学方面作出重要贡献。他发展了纤维丛概念，得出一般纤维空间概念。1951年美国数学家斯廷罗德出版《纤维丛的拓扑》一书，系统总结了纤维丛理论。纤维丛的截面的存在性问题与阻碍理论有关，由此得到底空间的某些上同调类，称为示性类。施蒂费尔、惠特尼、陈省身和苏联数学家庞特里亚金、中国数学家吴文俊都在示性类研究中做出重要贡献。近几十年来纤维丛理论在示性类、纤维丛上的同调与同伦等方面继续获得发展，并在微分几何学、代数几何学、复变函数与复流形理论以及大范围分析学等方面有广泛深刻的应用，还成为物理学中表达规范场的合适的数学语言。

不动点理论（**fixed point theory**）　对于空间 X 到 X 自身的映射 f，满足 $f(x)=x$ 的点 $x\in X$，称为 f 的不动点。起源于求解方程的代数问题，后转化为几何理论中研究不动点的存在、个数、性质与求法的理论，成为拓扑学和泛函分析中的重要内容。较早的不动点定理是压缩映射原理，1890年由法国数学家皮卡提出，后由波兰数学家巴拿赫（1922）发展，成为许多方程的解的存在性、唯一性及迭代解法的理论基础。1910年荷兰数学家布劳威尔证明了多面体的不动点定理，设 X 是欧氏空间中的紧凸集，则 X 到自身的每个连续映射都至少有一个不动点，称为布劳威尔不动点定理。1926年美国数学家莱夫谢茨发展了布劳威尔的定理，得到不动点指数中的莱夫谢茨不动点定理。1913年，G·D·伯克霍夫证明了前一年法国数学家庞加莱关于三体问题的一个猜想，得到庞加莱—伯克霍夫不动点定理。伯克霍夫还与另一美国数学家凯洛格于1922年共同把不动点定理推广到无穷维函数空间，并应用于证明微分方程解的存在性。1930年波兰数学家绍德尔将布劳威尔不动点定理推广到线性赋范空间中的凸紧集、巴拿赫空间中的凸紧集等到自身的映射上，得到绍德尔不定点定理。1935年苏联数学家吉洪诺夫将布劳威尔的结果推广到局部凸拓扑线性空间中凸紧集到自身的映射上，得到吉洪诺夫不动点定理。1941年日本数学家角谷静夫又将布劳威尔结果推广到点列集映射上去。

以上所有不动点定理的证明都是存在性证明。60年代中期逐渐发展起构造性证明，其方法正在不断发展和改进。

微分拓扑学（**differential topology**）　研究微分流形和可微映射的一个数学分支。1936年由美

国数学家惠特尼开创。惠特尼证明了微分流形的嵌入定理，还研究了n维流形的可微结构。另一美国数学家S·S·凯恩斯同期证明了三角形剖分定理、微分流形的可单形剖分性等结果。1940年英国数学家J·H·C·怀特海得到组合流形的正则邻域定理，他还第一次给出了整体微分流形概念的严格而精确的定义。50年代初，法国数学家托姆创立配边理论，完成多维流形的粗分类工作。1958年美国数学家米尔诺出版《微分拓扑学》，其中有许多该学科的重要成果。60年代初，美国数学家斯梅尔证明了微分拓扑学中最重要的定理之一——广义庞加莱猜想，即维数$n\geqslant5$时庞加莱猜想成立，为此荣获1965年的维布伦奖和1966年的菲尔兹奖。同时期的凯瓦雷、塞曼、马祖尔等人亦在微分流形研究中得到许多结果。微分拓扑学还集中研究微分映射的性质，组合结构与微分结构之间的关系，组合流形的光滑化问题，嵌入问题等等，60年代取得较大发展。近一、二十年来，微分拓扑学仍在微分浸入、微分嵌入、协边等理论方面不断发展。例如美国数学家M·弗里德曼利用拓扑流形的剜补术于1981年证明了4维的庞加莱猜想，并因此引起关于4维流形拓扑的一系列研究。

流形（**manifold**） 一类特殊的连通、豪斯多夫仿紧的拓扑空间，在此空间每一点的邻近预先建立了坐标系，使得任何两个（局部）坐标系间的坐标变换都是连续的。n维流形的概念在18世纪法国数学家拉格朗日的力学研究中已有萌芽。19世纪中期英国数学家凯莱(1843)、德国数学家格拉斯曼(1844，1861)、瑞士数学家施勒夫利(1852)分别论述了n维欧几里得空间理论，把它视为n个实变量的连续统。1854年德国数学家黎曼在研究微分几何时用归纳构造法给出一般n维流形的概念：n维流形是把无限多个（n-1）维流形按照一维流形方式放在一起而形成的，从此开始流形的拓扑结构及其局部理论的研究。法国数学家庞加莱在19世纪末期把n维流形定义为一种连通的拓扑空间，其中每一点都具有和n维欧氏空间同胚的邻域（被称为庞加莱流形），从而开辟了组合拓扑学的道路。

对流形的深入研究集中在：流形上的微分结构，组合结构的存在性、唯一性问题，微分结构与组合结构的关系，流形的各种意义下的分类等问题，20世纪50—60年代做出许多重要结果，近几十年来出现有限维带边流形和无限维流形概念。流形理论在与其他拓扑理论的相互结合发展中也提出许多问题，其研究仍在继续。

纽结理论（**knot theory**） 拓扑学中研究绳结、链锁等几何现象的一个分支。三维欧几里得空间中的简单闭曲线称为纽结。1833年德国数学家高斯在研究电动力学时引进闭曲线之间的环绕数，成为纽结理论的基本工具之一。约1880年出现纽结表。1910年德国数学家德恩在刻划拓扑结构的基本群时引进了纽结的群的概念。1928年美国数学

家J·W·亚历山大引进纽结的多项式概念，后人称之为亚历山大多项式。1932年德国数学家赖德迈斯特出版《纽结理论》一书，系统总结了这一理论，成为该分支的经典著作。

1934年德国数学家赛费特在对纽结理论大量研究的基础上提出纽结的亏格概念和赛费特曲面、赛费特不变量等纽结理论中的新成果，他还与特雷法尔合著《拓扑学》(1934)一书，1950年又合作发表《纽结的新旧结果》一文，再次综述该理论的发展。1947年奥地利数学家阿廷等人对研究纽结的工具"辫的理论"进行了论述。1950年福克斯发表《纽结理论在普林斯顿的最新发展》，再次总结了纽结理论。近几十年来高维纽结成为研究热点，相继出现一批结果。纽结的发展与其他拓扑学分支的发展相辅相成，已成为群论、数论、代数几何、微分几何等众多学科与拓扑学的交汇处。它还能应用于化学中大分子空间的结构研究，引起了更多人的兴趣。

突变理论（**catastrophe theory**） 研究自然现象或技术过程在发展变化过程中，从一个状态跳跃式地变到另一个状态的数学学科。涉及拓扑学、奇点理论和结构稳定性等数学分支。始于20世纪60年代中期，由法国数学家托姆开创。托姆最初研究微分流形的配边理论，并因此荣获1958年菲尔兹奖，60年代转向奇点理论研究，完成从 R^n 到 R^n 映射的奇点分类问题。在此基础上，他从1966年起，从事用数学解释自然现象的工作，1968年在"走向理论生物学"的国际会议上开始系统阐述他的突变论观点。1969年在《拓扑学》杂志上发表有关的数学理论，1972年出版专著《结构稳定性与形态发生》，标志突变理论正式诞生。他用突变理论研究事物的状态在时空中表现的变化类型，利用奇点理论将突然变化分为7种基本类型，并在数学上加以严格证明。在此基础上，他对银河结构、胚胎发育、生命起源、语言现象等模型加以说明。1975年该专著的英译本出版，扩大了突变理论的影响。许多数学家用它来研究自然科学、经济学、心理学乃至政治、社会科学，成果累累。另一位数学家E·C·塞曼（或译泽曼）也为突变理论的建立及发展做出重要贡献。他为突变理论提供了丰富多彩的例子，引入控制空间和状态空间等基本术语，并在"基本突变"研究中取得进展。近年来突变理论研究仍不断发展，相继发表和出版的论著日益丰富着这一学科的内容。

莫尔斯理论（**Morse theory**） 微分拓扑学的一个重要分支。通常指两部分内容：一是微分流形上可微函数的莫尔斯理论，即临界点理论；二是变分问题的莫尔斯理论，即大范围变分法。H·M·莫尔斯(1892—1977)是美国数学家，其主要贡献是把拓扑方法用于变分法等数学分支，得到一系列重要结果。1925年推广了G·D·伯克霍夫的工作，得出莫尔斯不等式。1934年出版《大范围变分法》；1969年与S·S·凯恩斯合作，出版《全局分

析和微分拓扑中的临界点理论》,都成为莫尔斯理论的经典著作。

1938年德国数学家赛费特和特雷法尔合著《大范围变分法》一书，以较简明的形式阐述了莫尔斯的工作。同时代的苏联数学家柳斯捷尔尼克和施尼雷尔曼在估计临界点个数方面开辟另一条途径，建立重数定理。随着拓扑学的发展，莫尔斯理论本身也有很大飞跃，到60年代出现一批成果。美国数学家斯梅尔于1960年利用改进的莫尔斯不等式证明了广义庞加莱猜想；另一美国数学家米尔诺于1963年出版专著《莫尔斯理论》，对这一理论作了较完美的总结和提高，为该理论的广泛流传作出贡献；同一年R·S·帕莱斯发表《希尔伯特流形上的莫尔斯理论》,第二年他又与斯梅尔合作发表《广义莫尔斯理论》,开创无限维流形上的莫尔斯理论。近年来莫尔斯理论的研究仍在继续，80年代以来创立分层莫尔斯理论等新的分支。

分析学(**analysis**) 17世纪以来围绕微积分学发展起来的数学分支。一般认为它是数学中最大的一个分支。分析学所研究的内容随着数学的发展而不断变动。17—18世纪的分析学，以微积分学和无穷级数为主，包括变分法、微分方程、积分方程和复变函数论的基本内容。到了19世纪，变分法、微分方程和积分方程得到很大发展。但在这一时期，随着微积分基础的严密化，函数论得到极大发展，并在分析学中占据特殊地位。在20世纪，由于变分法和积分方程一般理论的需要，产生了泛函分析。20世纪以来，由于数学其它分支的发展和相互渗透，推动了近代微分方程的发展，它已成为分析学的一个最大分支。虽然它的内容仍属于分析学,但我们把它作为数学的一个独立分支与概率论和数理统计等分支并列。分析学的近代发展，还包括大范围变分法、遍历理论、位势论和流形上的分析，这些分支又与数学的其它分支相互渗透和综合。

早期的微积分学也叫无穷小分析。这是因为在创立微积分的过程中,主要研究对象是无穷小量。1669年，牛顿发表了题为《运用无穷多项方程的分析学》的小册子，称微积分学为分析学，他把无穷级数也纳入了分析学的范围。当时微积分的名称还没有出现，牛顿称这门新学科为分析学，以示其区别于几何学和代数学。最早把“分析”与“无穷小”联系起来的是法国数学家洛必达。他的著作《无穷小分析》(1696)是第一本系统的微积分教科书。

极限和定积分的思想，在古代已经萌芽。在中国，公元前4世纪桓团、公孙龙等提出的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”,以及刘徽所创割圆术，都反映了朴素的极限思想。在古希腊，德谟克利特提出原子论思想，欧多克索斯建立了求面积和体积的穷竭法，阿基米德对面积和体积问题的进一步研究，这些工作都孕育了近代积分学的思想。

在17世纪,研究运动成为自然科学的中心课题。微积分的出现,最初是为了处理几何学和力学中的几

种典型问题。成批的欧洲学者围绕面积、体积、曲线长、物体重心、质点运动的瞬时速度，曲线的切线和函数极值等问题做了大量的工作，穷竭法被逐步修改，并最终为现代积分法所代替。有关微分学的工作，大体上是沿着两条不同路径进行的，一条是运动学的，一条是几何学的，有时也是交叉在一起的。在这一时期，出现了大量的极成功的并且富有启发性的方法，有关微积分学的大量知识已经积累起来。

17 世纪末，英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼茨各自独立地在前人工作的基础上创立了微积分学。他们分别从力学和几何学的角度建立了微积分学的基本定理和运算法则，从而使微积分能普遍应用于自然科学的各个领域，成为一门独立的学科，并且是数学中最大分支“分析学”的源头。

微积分学的建立，使分析数学得到迅速的发展。在 18 世纪，微积分学成为数学发展的主要线索。微积分本身的内容不断地得到完善，其应用范围日益扩大。

由于围绕微积分发明权所产生的争议，使微积分在英国和欧洲大陆沿着完全不同的路线发展。在英国，数学家们出于对牛顿的崇拜和狭隘的民族偏见，拘泥于牛顿的流数法，故步自封。在泰勒和马克劳林之后，数学发展陷于长期的停滞状态。而在欧洲大陆，伯努利家族的数学家们和欧拉继承了莱布尼茨的微积分，使之发扬光大。特别是欧拉开始把函数作为微积分的主要研究对象，使微积分的发展进入了新的阶段。

在这一时期的数学家大都忙于获取微积分的成果与应用，较少顾及其概念和方法的严密性。尽管如此，也有一些人对建立微积分的严格基础作出重要尝试。除了欧拉的函数理论外，另一位天才的分析大师拉格朗日采用所谓“代数的途径”，主张用泰勒级数来定义导数，以此来作为微积分理论的出发点。达朗贝尔则发展了牛顿的“首末比方法”，用极限概念代替含糊的“最初与最末比”说法。

微积分在物理、力学和天文学中的广泛应用，是 18 世纪分析数学发展的一大特点。这种应用使分析学的研究领域不断扩充，形成了许多新的分支。

1747 年，达朗贝尔关于弦振动的著名研究，导出了弦振动方程及其最早的解，成为偏微分方程的发端。通过对引力问题的深入探讨，获得了另一类重要的偏微分方程——位势方程。与偏微分方程相关的一些理论问题也开始引起注意。

常微分方程的发展更为迅速。从 17 世纪末开始，三体问题、摆的运动及弹性理论等的数学描述引出了一系列的常微分方程，其中以三体问题最为重要，二阶常微分方程在其中占有中心位置。约翰·伯努利、欧拉、黎卡提、泰勒等人在这方面都做出了重要工作。

变分法起源于最速降线问题和与之相类似的其他问题。欧拉从 1728 年开始从事这类问题的研究，最终确立了求积分极值问题的一般方法，奠定了变分法的基础。拉格

朗日发展了欧拉的方法，首先将变分法建立在分析的基础之上，他还用变分法来建立其分析力学体系。

这些新的分支与微积分共同构成了分析学的广大领域，它与代数、几何并列为数学的三大分支。

18 世纪末到 19 世纪初，为微积分奠基的工作已迫切地摆在数学家面前。19 世纪分析严格化的倡导者有高斯、波尔查诺、柯西、阿贝尔、狄利克雷和外尔斯特拉斯等人。1812 年，高斯对超几何级数进行了严密研究，这是最早的有关级数收敛性的工作。1817 年，波尔查诺放弃无穷小量的概念，用极限观念给出导数和连续性的定义，并得到判别级数收敛的一般准则。但是他的工作没有及时被数学界了解。柯西是对分析严格化影响最大的学者，1821 年发表了代表作《分析教程》，除独立得到波尔查诺的基本结果外，还用极限概念定义了连续函数的定积分。这是建立分析严格理论的第一部重要著作。阿贝尔一直强调分析中定理的严格证明，在 1826 年最早使用一致收敛的思想证明了一个一致收敛的连续函数项级数之和在其收敛域内连续。1837 年，狄利克雷按变量间对应的说法给出了现代意义下的函数定义。从 1841 年起，外尔斯特拉斯开始了将分析奠基于算术的工作，他采用明确的一致收敛概念，使级数理论更趋完善。他把柯西的极限方法发展为现代通用的 ε-δ 说法。但是直到 19 世纪 70 年代，算术中最基本的实数概念仍是模糊的。1872 年，外尔斯特拉斯、康托尔、戴德金和其他一些数学家在确认有理数存在的前提下，通过不同途径（戴德金分割、有理数基本序列等）给出无理数的精确定义。又经过不少数学家的努力，最终在 1881 年，由皮亚诺建立了自然数的公理体系。由此可从逻辑上严格定义正整数、负数、分数和无理数。从此微积分学才形成了严密的理论体系。

单复变函数论在 19 世纪分析学中占据特殊地位，几乎相当于 17—18 世纪微积分在数学中所处的位置。在 18 世纪，欧拉、达朗贝尔和拉普拉斯等人联系着力学的发展，对于单复变函数已经做了不少的工作。但函数论作为一门学科的发展，是 19 世纪的事。复变函数论的理论基础主要由柯西、黎曼和外尔斯特拉斯建立起来（见复变函数论）。

19 世纪以来偏微分方程和常微分方程的理论也有很大发展。特别应该指出的是，与偏微分方程密切相关的傅立叶分析也在这一世纪发展起来。傅立叶在 1811 年的论文中采取把函数用三角函数展开的方法来解热传导方程，从而产生了傅立叶级数和傅立叶积分的概念。由此而建立了傅立叶分析的理论。这一理论很快得到发展和广泛的应用（见傅立叶分析）。

20 世纪初，由于 19 世纪以来对于函数性质的一系列发现，打破了自从微积分学发展以来形成的一些传统理解。又由于对傅立叶分析的进一步研究，显示了黎曼积分的局限性。这两方面的原因，都促使对积分理论的进一步探讨。1902 年

勒贝格在前人工作的基础上出色地完成了这项工作，建立了后来人们称之为勒贝格积分的理论，奠定了实变函数论的基础（见实变函数论）。

泛函分析的发展反映了20世纪数学发展的一个特点，即对普遍性和统一性的追求。在泛函分析中，函数已不作为个别对象来研究，而是作为空间中的一个点。与几何学结合起来，对整个一类函数的性质加以研究。泛函的抽象理论是1887年由意大利数学家沃尔泰拉在他关于变分法的工作中开始的，但泛函分析的开端还与积分方程有密切联系。在建立函数空间和泛函的抽象理论的卓越成就中，应首推法国数学家弗雷歇的著名工作。希尔伯特、施密特、巴拿赫、冯·诺伊曼、迪拉克、盖尔范德等在发展泛函分析理论的工作中都做出了杰出的贡献（见泛函分析）。

函数逼近论也是在19世纪末至20世纪初发展起来的分析学的一个分支。它的中心思想是用简单的函数来逼近复杂的函数。1859年切比雪夫考虑了最佳逼近问题，1885年外尔斯特拉斯证明了连续函数可用多项式在固定区间上一致逼近。他们的工作至今仍有影响。函数构造论的基础是由美国数学家杰克逊和苏联数学家伯恩斯坦奠定的(1912)。1957年，柯尔莫戈洛夫关于用单变量函数表示多变量函数的工作，进一步发挥了函数逼近论的中心思想。在函数逼近中，逼近的方式和所选用的工具直接影响逼近程度。柯尔莫戈洛夫、美国数学家沃尔什、洛伦茨等在这方面都有重要工作。函数逼近论的思想已经渗透到分析学的许多领域（见函数逼近论）。

20世纪发展起来的多复变函数论是近代分析学中很有发展前途的分支之一。早在19世纪，外尔斯特拉斯、庞加莱和库辛就把单复变函数论中的一些重要结果向多复变量的情形推广，得到了多复变全纯函数的一些基本结果。20世纪以来，特别是30年代以后，多复变函数的研究十分活跃。法国数学家H·嘉当、日本数学家冈·潔取得了显著成果。50年代以后，在多复变函数的研究中，出现了用拓扑和几何方法研究多复变全纯函数整体性质的趋势。而近代微分几何与复分析的相互溶合导致了复流形概念的建立，以及对多复变函数的自守函数的研究。这些都表明近代多复变函数的发展更趋于综合。它除了联系着分析学的许多分支外，还紧密联系着几何学、代数学以及代数几何的发展，体现了近代数学发展的特点（见多复变函数论）。

微积分学(differential and integral calculus) 微积分学是研究函数的导数和积分的性质、运算和应用的一个数学分支。

微积分思想的萌芽可以追溯到古希腊时代。公元前5世纪，德谟克利特创立原子论，把物体看成由大量的不可分割的微小部分（称为原子）叠合而成，从而求得物体体积。公元前4世纪，欧多克索斯建立了确定面积和体积的新方法——穷竭法，从中可以清楚地看出无穷

小分析的原理。阿基米德成功地把穷竭法、原子论思想和杠杆原理结合起来，求出抛物线弓形面积和回转锥线体的体积，他的种种方法都孕育了近代积分学的思想。在古代中国,《庄子·天下篇》记载的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。以及刘徽所创割圆术，用圆内接正多边形与圆接近，谓“割之弥细，所失弥少。割之又割以至于不可割,则与圆合体而无所失矣”,都包含着极限和积分概念的萌芽。9—15 世纪，中东和近东的学者们在研究古希腊著作的基础上，也建立了某些计算体积的方法。

到了 17 世纪,解析几何的创立成为数学发展的转折点。自然科学研究的中心问题转向自然界的运动和变化。在数学中自然而然地引入了变量与函数的概念。微积分的出现，最初是为了处理人们所关注的几类典型的科学问题。计算曲线所围的面积、曲面所围成的体积、曲线长、物体的重心等问题是积分学的典型问题；研究物体运动的瞬时速度、曲线的切线、函数的极值等问题是微分学的典型问题。

在这一时期，最早研究体积问题的是德国天文学家、数学家开普勒。他把体积分成许多微小部分,建立了所谓“无限小元素法”，求出近百个旋转体的体积。意大利几何学家卡瓦列里把开普勒的“无限小元素法”发展为纯粹的几何方法，提出了著名的“不可分原理”，从而确定出一些面积的比值。他的工作实际上相当于计算定积分 $\int_0^a x^n dx$ ($n=1, 2\cdots, 9$)。意大利数学家托里切利、英国数学家沃利斯、法国数学家帕斯卡、费马和罗贝瓦尔等都围绕积分学的问题做了大量工作，提出了许多具有启发性的方法，他们的工作使卡瓦列里的“不可分原理”趋于算术化。随着有关面积、体积、弧长及重心位置等众多问题的解决，人们逐步意识到所有可归结为求面积的这类问题之间的共同性。

在 17 世纪,关于求曲线切线的问题，最先发表的是法国数学家笛卡儿关于法线的作法。后来他又给出另一种方法，其实质是把切线看成割线的极限位置。费马建立了求函数极值的原理，相当于给出可微函数取极值的必要条件。他还利用同样方法确定平面曲线的切线。法国数学家罗贝瓦尔和意大利数学家托里拆利同时从运动学的角度来考虑曲线的切线，把曲线视为质点的运动轨迹，运动看成是两个简单运动的合成。他们提出“平行四边形法则”来确定质点运动瞬时速度的方向——曲线在该点的切线方向。牛顿的老师巴罗利用“微分三角形”,把切线的斜率定义为两个无穷小的比值，他已经得到了现代微分法的要领。

事实上，17 世纪早期的数学家们围绕微积分学所做的大量工作还只停留在某些具体问题的细节之中，他们缺乏对这门科学的普遍性和一般性的认识。微积分学的最终创立要归功于英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼茨。

据牛顿自述，他于1665年11月发明流数（微分）法，次年5月创反流数（积分）法，但他当时只是以手稿形式在朋友中传播自己的发现。牛顿微积分思想的发展大体可分为四个阶段：流数论的初建，向几何不可分量观点的摇摆，成熟的流数法，首末比的提法与改进。

1669年，牛顿完成了他的第一篇微积分论文《运用无穷多项方程的分析学》。在该文中，他称变量的无穷小增量为"瞬"，给出了求一个变量（关于时间的）瞬时变化率的普遍方法，并且证明了面积可以由求变化率的逆过程得到。这一事实就是我们现在所谓的微积分学基本定理。牛顿对于流数法的系统论述是在他1671年发表的小册子《流数法与无穷级数》中给出的。在这篇文章中，牛顿从运动学的角度来考虑问题，认为变量就是量的连续运动，因此他称变量为流量，称其变化率为流数。他阐明了流数法的基本问题是从已知流量间的关系求它们的流数间的关系，以及其逆运算。在第三篇论文《曲线求积法》（1676）中，牛顿放弃了无穷小量（即"瞬"）的提法，而试图把流数法建立在极限概念的基础上。为此，他引进了最初比和最末比的概念，并给出它们的几何解释。

牛顿关于微积分的基本论文完成后，经过很长时间才发表出来。他的第一本包括流数法的书是发表于1687年的巨著《自然哲学的数学原理》。但在3年前，即1684年，莱布尼茨就发表了他的第一篇微分学论文，他与牛顿共享创立微积分学的荣誉。

牛顿建立微积分学主要从运动学的角度出发，而莱布尼茨则是从几何学的角度考虑问题。他很早就意识到，求曲线的切线依赖于纵坐标与横坐标的差值（当它们变成无穷小时）的比，而求面积则依赖于在横坐标的无穷小区间上的纵坐标之和或无限窄矩形之和。并且这种求差与求和的运算是互逆的。这就是说，莱布尼茨的微分学是把微分看作变量相邻二值的无限小的差，而他的积分则以变量分成的无穷多个微分之和的形式出现。莱布尼茨关于积分学的首篇论文发表在1686年，以后又陆续发表了各种积分法的结果。

莱布尼茨是历史上最大的符号学家之一，他所创立的微积分符号对微积分的传播和发展产生了很大的影响，并且一直沿用至今。

微积分名称的由来牛顿称微积分为流数法（fluxions），这个名称后来被逐渐淘汰。莱布尼茨使用"差的计算"（Calculus differentialis）与"求和运算"（Calculus Summatorius）的术语。"差的计算"后来变成专门术语"微分学"（differential calculus）。莱布尼茨的朋友，瑞士数学家约翰·伯努利主张把"求和运算"改为"求整运算"，它就成为专门术语"积分学"（integral Calculus）的来源。两者合起来叫微积分学，英文里简称为"calculus"。

我国第一本微积分学的汉译本，是李善兰和伟烈亚力合译的《代微积拾级》十八卷，1859年在上海墨海书馆发行。原书是罗密士

（今译卢米斯）著的《Analytical Geometry and Calculus》(1850)。译名中的“代”指“Analytical Geometry”，“微积”指“Calculus”。序中说：“我国康熙时，西国来本之（今译莱布尼茨），奈端（今译牛顿）二家又创微分、积分二术，……其理大要：凡线面体皆设为由小渐大，一刹那中所增之积即微分也。其全积即积分也”。这就是我国微积分名称的由来。

穷竭法（the method of exhaustion） 古希腊学者创立的一种确定面积和体积的方法。

古典希腊时期智人学派成员安提丰在研究化圆为方时，提出了一种求圆面积的方法：在圆内作一内接正方形后，不断将其边数倍增，希望得到一个与圆重合的正多边形，从而来“穷竭”圆的面积。欧多克索斯受其影响，试图把这种方法建立在科学的基础之上，建立了下列著名原理：“对于两个不相等的量，若从较大量中减去大于其半的量，再从所余量中减去大于其半的量，继续重复这一步骤，则所余之量必小于原来较小的量”。如果反复运用原理中指出的步骤，则所余之量将会小于任何事先指定的量。这个原理是近代极限思想的雏形。分析学中盛称的阿基米德公理“对任意二正实数 a、b，必存在正整数 n，使 $na>b$”就由欧多克索斯原理变形而来。欧多克索斯本人和阿基米德都利用这一原理和双重归谬法确定了一系列平面图形的面积和立体的体积。

在17世纪初期，阿基米德关于面积、体积的工作在欧洲被重新研究。这一时期的学者称上述由安提丰提出、欧多克索斯发展、被阿基米德广泛应用的方法为“穷竭法”。这一名词最早出现在比利时学者圣樊尚1647年的一本著作中。穷竭法对积分概念的发展产生了强烈的刺激作用，求长度、面积、体积和重心的工作成了17世纪数学研究的重要课题，成批的学者围绕这些课题做了大量的工作，穷竭法被逐步修改，并最终为现代积分法所代替。

不可分原理（the principle of indivisibles） 意大利几何学家卡瓦列里提出的一种求积方法。

17世纪初期，许多欧洲学者围绕求面积、体积等课题做了大量工作。最先研究体积问题的是德国天文学家、数学家开普勒。他把被测量的量分成许多非常小的部分，并称之为“无限小元素”，然后利用几何论证求这些无限小元素之和。在开普勒的方法影响下，卡瓦列里开始研究几何问题，他把开普勒的无限小元素法发展成为著名的“不可分原理”。在他的《不可分量几何学》中阐明这一原理的要旨：平面图形的面积是由无数个平行线段构成的，体积是由无数个平行平面构成的。他分别把这些个体叫做面积和体积的不可分元素，并引入“全体不可分元素之和”的概念。从比较两个立体的不可分元素出发，卡瓦列里得到下列著名定理：如果两个立体等高，且它们的与底有相等距离的平行截面面积恒成定比，则这两个立体的体积之比就等于这个定比（我国数学家祖暅早在公元6

世纪就提出了同样内容的定理)。根据不可分原理，卡瓦列里计算出相当于定积分

$$\int_0^a x^n dn \quad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

的值。他的工作是希腊人的穷竭法向牛顿、莱布尼茨微积分的一种过渡，对17世纪上半叶微积分思想的发展有很大影响。但是由于他的论证多依赖于几何直观，忽视逻辑的严密性，因此受到同时代人的批评。不久，帕斯卡以“无穷小矩形”取代了“不可分元素”，托里切利、沃利斯等人也都力图把不可分原理算术化。

变量(Variable) 通常认为，变量的概念是由法国数学家笛卡儿引入数学的。恩格斯说：“数学中的转折点是笛卡儿的变数”。变量的引入，使数学发生了巨大的变革。但事实上，笛卡儿并没有使用过变量这个词。在他的《几何学》中，所谓变量，是指“未知的和未定的量”。具体地说，指具有变化长度和不变方向的线段，还指连续经过坐标轴上所有点的变化着的数。正是变量的这两种形式使笛卡儿创立了解析几何学。

在数学上最早使用变量这个词的是瑞士数学家约翰·伯努利，他在1718年写道：“变量的函数就是变量和常量以任何方式组成的量”。

汉语“变数”这个词，是清代数学家李善兰最先使用的。他在《代微积拾级》的译本(1859)的序中说：“中法之四元，即西法之代数也。……代数以甲、乙、丙、丁诸元代已知数，以天、地、人、物诸元代未知数。微分积分以甲、乙、丙、丁诸元代常数，以天、地、人、物诸元代变数”。

函数(function) 函数是数学中最基本最重要的概念之一。在历史上，函数概念的出现与解析几何的产生有密切联系。14世纪的法国数学家奥雷姆用图线表示依时间 t 而变化的量 x，并称 t 为“经度”，x 为“纬度”，在平面上建立了点与点之间的对应。在16世纪，英国数学家哈里奥特用直角坐标的概念求出曲线的代数方程。后来费马取两相交直线，并以到两直线的距离来规定点的位置，从而导出圆锥曲线的方程。17世纪上半叶，笛卡儿把变量引入了数学，他指出了平面上的点与实数对 (x,y) 之间的对应关系。当动点作曲线运动时，它的 x 坐标和 y 坐标相互依赖并同时发生变化，其关系可由包含 x、y 的方程式给出。相应的方程式就揭示了变量 x 和 y 之间的关系。以上这些工作都孕育了函数的思想。

“函数”作为数学术语是莱布尼茨首先采用的。他在1692年的论文中第一次提出函数这一概念。起初他用函数一词表示 x 的幂(即 $x, x^2, x^3, \cdots$)，后来他又用函数表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长等几何量。现在一般把莱布尼茨引用的函数概念的最初形式看作是函数的第一个定义。把函数理解为幂的同义语，可以看作是函数概念的解析的起源；用函数表示某些几何量，可以看作是函数概念的几何的起源。

随着数学的发展，函数的定义不断地改进和明确。以下按时间顺

序列举一些有代表性的函数概念的原始定义,从中我们可以看出函数的概念是如何随着数学的发展而不断扩张的。

约翰·伯努利(1718):"一个变量的函数是指由这个变量和常量以任意一种方式组成的一种量。"

欧拉(1748):"一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何一种方式构成的解析表达式。"

欧拉(时间不详):"在 xy 平面上徒手画出来的曲线所表示的 y 与 x 间的关系。"

欧拉(1775):"如果某些量以如下方式依赖于另一些量,即当后者变化时,前者本身也发生变化,则称前一些量是后一些量的函数。"

拉格朗日(1797):"所谓一个或几个量的函数是指任意一个适于计算的表达式,这些量以任意方式出现在表达式中。表达式中可以有(也可以没有)其它一些被视为具有给定和不变的值的量,而函数的量值可以取所有可能的值。因此,在函数中,我们仅考虑那些假定是变化的量而不去关心可能包含在其中的常数。……一般地,我们用字母 f 或 F 放在一个变量的前面以表示该变量的任意一个函数,即表示依赖于这个变量的任何一个量,它按照一种给定的规律随着那个变量一起变化。"

傅立叶(1822):"一般地,函数 $f(x)$ 代表一系列的值或纵坐标,它们中的每一个都是任意的。对于无限多个给定的横坐标 x 的值,有同样多个纵坐标 $f(x)$。所有的纵坐标都有具体的数值,或是正数,或是负数,或是零。我们不假定这些纵坐标要服从一个共同的规律;它们以任意一种方式一个接一个地出现,其中的每一个都象是作为单独的量而给定的。"

柯西(1823):"如果在一些变量之间有这样的关系,使得当其中之一的值被给定时,便可得出其它所有变量的值。此时,我们通常认为这些变量由它们之中的一个表出,于是这一个量称为独立变量,其它被独立变量所表示的量就称为这个变量的函数。"

狄利克雷(1837):"让我们假定 a 和 b 是两个确定的值,x 是一个变量,它顺序变化取遍 a 和 b 之间所有的值。于是,如果对每个 x,有唯一的一个有限的 y 以如下方式与之对应:即当 x 连续地通过区间到达 b 时,$y=f(x)$ 也类似地顺序变化,那么 y 称为该区间中 x 的连续函数。而且,完全不必要求 y 在整个区间中按同一规律依赖于 x;确实没有必要认为函数仅仅是可以用数学运算表示的那种关系。按几何概念讲,x 和 y 可想象为横坐标和纵坐标,一个连续函数呈现为一条连贯的曲线,a 和 b 之间的每个横坐标,曲线上仅有一个点与之对应。"(著名的狄利克雷函数:

$$y=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\0, x\text{ 为无理数}\end{cases}$$
)

黎曼(1851):"我们假定 z 是一个变量,它可以逐次取所有可能的实数值。若对它的每一个值,都有未定量 W 的唯一的一个值与之对应,则称 W 为 Z 的函数,……。"

汉克尔(1870):"$f(x)$ 称作 x 的

一个函数，如果对于某个区间内的每一个 x 的值都有唯一的和确定的 $f(x)$ 的一个值与之对应。而且，$f(x)$ 从何而来，如何确定，是否由量的解析运算或其它什么方式得到，这些都无关紧要，所需的只是 $f(x)$ 的值在各处都是唯一确定的。”

戴德金(1887)：“系统 S 上的一个映射蕴含了一种规则，按照这种规则，S 中每一个确定的元素 s 都对应着一个确定的对象，它称为 s 的映象，记作 $\Phi(s)$。我们也可以说，$\Phi(s)$ 对应于元素 s，$\Phi(s)$ 由映射 Φ 作用于 s 而产生或导出；s 经映射 Φ 变换成 $\Phi(s)$。”

皮亚诺(1911)：“函数是一种特殊的关系。根据这种关系，变量的每一个值都对应着唯一的一个值。我们可以用符号来定义它：定义：函数=关系 $\cap u \ni [y;x\in u,z;\ x\in u.\ \wp_{x,y,z}.\ y=z]$ 这就是说，一个函数是一个关系 u，使得当两对数 $y;x$ 和 $z;x$（第二个元素相同）满足 u 时，必然有 $y=z$，无论 x,y,z 可能是什么。”

凯里(1917)：“一般而论，两类数之间的一个对应可称做一个函数关系，如果第一类中的每一个数都有第二类中的一个数与之对应。跟第一类中的数相应的变量称为独立变量，跟第二类中的数相应的变量称为应变量。因此，我们可以说，独立变量和应变量之间存在一个函数关系，或象通常所说，称应变量是独立变量的函数……”

库拉托夫斯基(1921)：“集合 $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$ 称为一个序偶。设 f 是一个序偶的集合，如果当 $(x,y)\in f$ 且 $(x,z)\in f$ 时 $y=z$，则 f 称为一个函数。”

布尔巴基(1939)：“设 E 和 F 是两个集合，它们可以不同，也可以相同。E 中的一个变元 x 和 F 中的变元 y 之间的一个关系称为一个函数关系，如果对每一个 $x\in E$，都存在唯一的 $y\in F$，它满足跟 x 的给定关系。”

极限(limit) 分析数学中最基本的概念之一，用以描述变量在一定的变化过程中的终极状态。

朴素的、直观的极限思想在古代的文献中就有记载。例如中国古代的《墨经》中记有“穷，或有前，不容尺也”，《庄子·天下篇》中载有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。公元三世纪的中国数学家刘徽所创割圆术，从圆内接正六边形出发割圆，得到圆内接正 6×2^n 边形序列，并指出割得越细，正多边形与圆面积之差越小，“割之又割以致于不可割，则与圆合体而无所失矣”。其中包含了深刻的极限思想。

在古希腊，安蒂丰提出求圆面积的“穷竭法”，后来由欧多克索斯发展为一种较为严格的理论，提出现在分析中通称的“阿基米德公理”。阿基米德把穷竭法成功地应用于面积计算。这些工作都可以看作是近代极限理论的雏形。

随着微积分学的诞生，极限作为数学中的一个概念也就明确地提出来，但最初提出的极限概念是含糊不清的。例如牛顿称变量的无穷小增量为“瞬”，有时令它非零，又时又令它为零，莱布尼茨的 dx、dy 也不能自圆其说。因此有人称牛顿和莱布尼茨的极限思想为神秘的极限

观。这曾引起18世纪许多人对微积分的攻击，对分析数学的发展带来了危机性的困难。

从19世纪初开始，数学家们转向微积分基础的重建，极限概念才置于严密的理论基础之上。现今普通微积分课本中函数的极限定义是由柯西和外尔斯特拉斯等人给出的。柯西在1821年提出函数极限定义的ε方法（后来又改写成δ），即所谓极限概念的"算术化，"他把整个极限过程用不等式来刻画，使关于无穷小，无穷大的运算化为一系列不等式的推导。后来外尔斯特拉斯将ε与δ联系起来，完成了极限的$\varepsilon-\delta$方法。

关于序列极限的正确概念早在1655年由英国数学家沃利斯给出，但是未被人们采用。捷克数学家波尔查诺在1817年也给出了序列收敛条件的正确表述，可惜他的工作没有广泛为人所知。柯西后来重新得到了这些结果，现在把序列（级数）收敛的判别准则归功于柯西，称为柯西收敛准则。

极限概念被推广到多元函数和复变量函数时，极限的过程复杂了，但大体上保持了固有的特征。后来，一些数学家发现，有些变量的极限过程比较特殊，例如，给出定积分定义的达布和的极限，极限过程与区间的分割发生了联系，很难用$\varepsilon-\delta$语言来描述。曲线弧长的定义也有类似的情形。因此有必要建立极限的一般观点，或称为广义极限理论。苏联数学家沙图诺夫斯基、美国数学家穆尔、斯密斯在半序有向集上给出一种极限定义，这种广义的极限概念在现代拓扑学和分析数学中起到重要作用。

函数的连续性（**continuity of functions**） 19世纪，随着函数概念的不断明确和扩展，数学家们开始研究函数的性质。捷克数学家波尔查诺首先（1817）给出连续性的恰当定义：在区间内任一点x处，只要w（的绝对值）任意小，就能使差$f(x+w)-f(x)$（的绝对值）任意小，那么就说$f(x)$在该区间上连续。他还证明了多项式是连续的。法国数学家柯西在他的《分析教程》（1821）中，给出函数连续性的定义：如果在（自变量的）两限之间，变量的一个无穷小增量总产生函数自身的一个无穷小增量，那么函数$f(x)$在给定限之间对于x保持连续。现代一般分析教科书中关于函数连续性的定义是由德国数学家外尔斯特拉斯给出的：如果对于给定的任何一个正数ε，都存在一个正数δ使得对于区间$|x-x_0|<\delta$内的所有x都有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则说$f(x)$在$x=x_0$处连续。

级数（**series**） 级数理论是分析学的一个分支，它从离散的角度来研究函数关系，是分析学的基础知识和研究工具，在其余各分支中有重要应用。

在数学史上级数出现得很早。古希腊时期，亚里士多德就知道公比小于1（大于零）的几何级数可以求出和数。阿基米德在计算抛物弓形面积时，实际上求出了公比为$\frac{1}{4}$的无穷几何级数的和。14世纪法国数学家奥雷姆证明了调和级数的和

为无穷，他还把一些收敛级数与发散级数区别开，给出级数收敛的某种判别法则。但是直到微积分的发明的时代，人们才把级数作为独立的概念，把级数运算作为一种算术运算并正式使用收敛和发散两个术语。

在微积分的初创时期，就为级数理论的建立提供了基本素材。许多数学家通过微积分的基本运算与级数运算的纯形式的结合，得到了一批初等函数的幂级数展开式。例如，牛顿在1666—1669年得到arcsin$x$、arctg$x$、sin$x$、cos$x$和e^x的级数；格雷戈里在1670年得到tg$x$、sec$x$的级数；莱布尼茨也在1673年独立地得到sin$x$、cos$x$和arctg$x$的级数，等等。这些工作表明，在17世纪下半叶数学家们在研究超越函数用它们的级数来处理方面是极富成效的。在这个时期，级数还被用来计算一些特殊的量，如π和e（牛顿、莱布尼茨、格雷格里、欧拉等）以及求隐函数的显式解（牛顿、泰勒、斯特灵、马克劳林等）等。

在17世纪末至18世纪，为适应航海、天文学和地理学的发展，要求各种数学用表有较大的精确度，因而数学家们开始寻求较好的插值方法。布里格斯、牛顿和格雷戈里等都深入研究了有限差分法，并得到以后二人名字命名的著名插值公式。这个公式由泰勒发展成一个把函数展成无穷级数的普遍方法，即建立了著名的泰勒定理，与其等价的现代形式为

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

从此以后，级数作为函数的分析等价物，用以计算函数的值，代表函数参加运算，并以所得结果解释函数的性质。在运算过程中，级数被视为多项式的直接的代数推广，在许多情形下就当作通常的多项式来对待。这些基本观点的运用，一直持续到19世纪初期，并取得了丰硕的成果。例如，雅可布·伯努利证明了调和级数的和是无穷，还成功地应用了比较判别法；欧拉把级数看作无穷次的多项式，利用根与系数的关系，计算出许多常数项级数的和，他还研究了伯努利数，建立了递推关系和伯努利多项式，给出调和级数的渐近表达式（引进欧拉常数）等；斯特材考察了log$n$!和n!的展开式，德·莫根给出现称斯特灵逼近的表达式；拉格朗日和傅立叶也都做出了许多贡献。

同时，悖论等式的不时出现促使数学家们逐渐意识到级数的无限多项之和有别于有限多项之和这一事实，注意到函数的级数展开的有效性表现为级数的部分和收敛于函数值。级数收敛时其运算才具有合法性。在1810年前后，数学家们开始确切地表述无穷级数。柯西在1821年给出级数收敛和发散的确切定义，并建立了判断级数收敛的柯西准则以及正项级数收敛的根值判别法和比值判别法，推导出交错级数的莱布尼茨判别法，然后他研究函数项级数，给出确定收敛区间的方法，并推广到复变函数的情形。函数项级数的一致收敛性概念最初

由斯托克斯和德国数学家赛德尔认识到，而确切的表述是由外尔斯特拉斯(1842 前后)给出的，他还建立了逐项积分和微分的条件。狄利克雷在 1837 年证明了绝对收敛级数的性质，他和黎曼分别给出例子，说明条件收敛级数通过重新排序使其和不相同或等于任何已知数。到 19 世纪末，无穷级数收敛的许多判别法则都已建立起来。由傅立叶的工作引出的对三角级数的研究已发展成分析学的一个重要分支(见傅立叶分析)。

在 19 世纪初期，随着分析基础的严密化，发散级数已作为不可靠的东西而被摒弃。但是仍有一些数学家继续研究发散级数，天文学家也发现，这种级数可以提供很好的数值逼近。到 19 世纪后期，发散级数这个课题又被重新研究。数学家们对那些给函数很好逼近值的发散级数进行了认真的考察，得到有关级数渐近性的一些结果(庞加莱、勒让得等)。对发散级数研究的另一个课题是可和性问题，这个概念可以看作是收敛概念的推广或扩大，泊松、弗罗贝尼乌斯、波莱尔、德国数学家赫尔德、意大利数学家切萨罗、法国数学家斯蒂尔杰斯等都有很深入的工作。对发散级数理论的研究，扩大了分析学严密理论的适用范围，在傅立叶分析、函数构造论和微分方程等广面有许多应用。

微分学(differential calculus) 见微积分学。

导数(derivative) 一个变量随某个变量变化时的速度或变化率。若变量 y 随变量 x 变化的函数关系记为 $y=f(x)$，则它在一点 x 处的导数定义为

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}。$$

求变量的导数是微分学的核心问题。在 17 世纪上半叶，许多数学家围绕着求物体的瞬时速度，求曲线的切线、求函数的极值等典型问题做了大量的工作。但是，甚至在牛顿和莱布尼兹的工作中，也没有发现导数的明确定义。法国数学家达朗贝尔首先在著名的《百科全书》中指出，导数必须建立在应变量的差与自变量的差的比的基础上。捷克数学家波尔查诺第一个(1817)把 $f(x)$的导数定义为当 Δx 经由负值和正值趋于 0 时，比$[f(x+\Delta x)-f(x)]/\Delta x$ 无限接近地趋向的量 $f'(x)$。1823 年，法国数学家柯西用与波尔查诺同样的方式定义导数。从此以后，导数概念的精确函义就确定下来。

微分(differential) 一个变量在某个变化过程中的改变量的线性主要部分。

历史上，在 18 世纪以前，关于微分的概念都不十分明确。微分的概念最早出现在莱布尼茨的著作中，他把微分视为变量的微差，用 dy 和 dx 来表示，并考虑它们的商$\frac{dy}{dx}$，即导数。到了欧拉时期，他拒绝无穷小，认为微分本身为“绝对的零”，而两个微分之比是有限数。欧拉还指出，当 dx 与 dx^2 同时出现时，可以略去 dx^2。法国数学家达朗贝尔在著名的《百科全书》中，把微分定义为“无穷小量或者至少小于任何给定值的

量”。

在法国数学家拉克鲁瓦的论著(1810)中,对微分已经开始有较明确的思想,他引进了用导数表示的微分形式 $dy=f'(x)dx$, 并称导数 $f'(x)$为微分系数。

现代微积分中微分的概念是由法国数学家柯西建立起来的。他在《无穷小分析教程概论》(1823)中,把导数和微分两个概念统一起来。他首先给出函数 $y=f(x)$的明确定义(见导数),然后定义自变量的微分 dx 为任一有限量,而函数的微分 dy 则定义为 $f'(x)dx$。

微分中值定理(mean value theorem for derivatives) 微分中值定理在微积分理论中具有重要作用,它有许多不同的形式。

1691 年,法国数学家罗尔在关于代数方程解法的论著中,证明了:在多项式方程 $f(x)=0$ 的两个相邻的实根之间,$f'(x)=0$ 至少有一个实根。后来人们把这个定理推广到可微函数,并称为罗尔定理。

微分学中最重要的中值定理是拉格朗日定理:可微函数 $y=f(x)$的平均变化率,必定等于变化区间的某个中间点处的瞬时变化率。1797 年,法国数学家拉格朗日在研究泰勒级数时,得到下述形式的中值定理

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \quad (a<c<b)。$$

然后他用这个定理来推导泰勒定理。柯西在他的《无穷小分析教程概论》(1823)中定义导数时也利用这个结果,他称之为平均值定理,形为

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)。$$

后人把这个定理推广到更一般的情形:对于$[a,b]$上连续,(a,b)内可微的函数 $f(x)$、$g(x)$,存在 $a<\xi<b$,使得

$$f'(\xi)[g(b)-g(a)]=g'(\xi)[f(b)-f(a)],$$

称为柯西中值定理。

现代微积分中的洛必达法则和泰勒公式都属于不同形式的微分中值定理,前者由法国数学家洛必达在他的《无穷小分析》(1696)中给出,但来源于约翰·伯努利,后者由英国数学家泰勒在 1712 年得到。

微积分学基本定理(fundamental theorem of calculus) 也称牛顿—莱布尼茨公式。现行的数学分析教科书中一般表述为:若 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有原函数。设在$[a,b]$上连续的函数 $F(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)。$$

在 17 世纪下半叶,牛顿和莱布尼茨分别在前人大量工作的基础上先后发现了微分和积分的上述关系。他们的发现标志着微积分的最终创立。牛顿发现微积分是在 1664—1667 年间。他在 1666 年 10 月的一篇总结性的论文中,阐明了流数计算的两个基本问题。其一是如何根据所给流量间的关系来确定流数间的关系,他对多项式的情形给出了这类问题的解法。然后他指出第二个基本问题是依据含流数的方程来求流量间的关系,特别讨论了如何借助于第一类基本问题解法的反运

算(即反微分)来求面积,第一次以明显的形式给出了微积分学基本定理。莱布尼茨在1677年的一份手稿中,用 $\int ydx$ 表示一条已知曲线(纵坐标为 y)下的面积,指出面积应该等于每一个 y 与相应的 dx 构成的所有矩形之和。他把求积问题化为反切线问题,即为了求得纵坐标为 z 的曲线下的面积,只须求出一条纵坐标为 y 的曲线,使它的切线满足

$$\frac{dy}{dx}=z。$$

如果在区间$[a,b]$上考虑问题,经过简单运算便得到

$$\int_a^b zdx = y(b) - y(a)。$$

积分学(**integral calculus**) 见微积分学。

积分(**integral**) 定积分和不定积分的总称。它们作为对函数的运算,是求导数和微分运算的逆运算。在微积分的初创时期,牛顿通常是以几何的方式来解决求积问题——必须通过微分法的逆运算求得。而莱布尼茨把积分看作是变量的无穷多个微元之和的思想也并不严谨。1823年,法国数学家柯西在他的著作中开始把定积分定义为和的极限。他对连续函数 $f(x)$的定积分给出如下的定义:如果区间$[x_0,X]$为 x 的值 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 所分割($x_n=X$),则它的积分是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

其中 ξ_i 是 x 在$[x_{i-1},x_i]$中的任一值。定义中还假定 $f(x)$在$[x_0,X]$上连续且上述分割的最大子区间的长度当 $n\to\infty$时趋于零。柯西还证明,无论如何选取 x_i 和 ξ_i,积分都存在。

对于不定积分,柯西首先证明了函数 $f(x)$的全体原函数彼此只差一个常数,然后定义 $f(x)$的不定积分为

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + c。$$

柯西的这些论述是对积分概念最系统的开创性工作。

以上所说的函数都是有穷区间上的有界函数,对于积分区间为无穷和在积分区间的某些值处函数变为无穷时的情形,作为定积分的极限,有无穷积分和瑕积分(见广义积分)。这些积分概念都推广到多元函数,更进一步的推广是实变函数论中的勒贝格积分。

广义积分(**improper integral**) 包括无穷积分和瑕积分两种。黎曼积分是在被积函数有界且积分区间为有穷的限制下定义的,但在应用时需要取消这些限制,这就导致广义积分概念的产生。

法国数学家柯西在他的《无穷小分析教程概论》(1823)中论述了在积分区间的某些值处函数变为无穷(瑕积分)或积分区间趋于∞时(无穷积分)的反常积分,他还结合物理意义提出积分主值的概念,例如对于瑕积分,他定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right],$$

其中 $c\in[a,b]$且 $f(x)$在 $x=c$ 时无界。后人称这两种反常积分为广义

积分。

多元微积分学（**differential and integral calculus for functions of several variables**） 关于多元函数的微积分学，是微积分学的一个组成部分。

多元微积分是在一元微积分的基本思想的发展和应用中自然而然地形成的。其基本概念都是在描述和分析物理现象和规律中，与一元微积分的基本概念合为一体而产生的。

早在微积分建立的初期，牛顿就从 x 和 y 的多项式 $f(x,y)=0$ 中导出 f 关于 x 或 y 的偏微商的表达式。雅各布·伯努利在他关于等周问题的著作中(1701)使用了偏导数，尼古拉·伯努利在 1720 年关于正交轨线的工作中也用到了偏导数。而偏导数理论是由方丹、欧拉、克莱罗和达朗贝尔建立的（见偏导数）。

重积分的概念，牛顿在他的《原理》中讨论球与球壳作用于质点上的万有引力时就已涉及到。但他是用几何形式论述的。在 18 世纪上半叶，牛顿的工作被以分析的形式加以推广。例如，二重积分被用来表示偏微分方程的解。欧拉在 1738 年用累次积分算出积分

$$\delta_c\iint\frac{cdxdy}{(c^2+x^2+y^2)^{3/2}},$$

其中积分区域是由 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ 围成的椭圆。这个积分表示厚度为 δ_c 的椭圆薄片作用在椭圆中心正上方 c 个单位处一个质点上的引力。1769 年，欧拉建立了平面有界区域上二重定积分理论，他给出了用累次积分计算二重积分的方法。1773 年，拉格朗日在研究旋转椭球的引力时，用到了三重积分。为了克服计算中的困难，他转用球坐标，建立了有关的积分变换公式。与此同时，拉普拉斯也使用了球坐标变换。

在多元微积分中，相当于微积分学基本定理的公式是在 19 世纪建立的。俄国数学家奥斯特罗格拉茨基在 1828 年研究热传导理论的过程中，证明了关于三重积分与曲面积分之间关系的公式，现称奥斯特罗格拉茨基－高斯公式（高斯也曾独立地证明过这个公式）。英国数学家格林也是在 1828 年，在研究位势方程时得到了著名的格林公式。上述两个公式在向量分析中称为散度定理。

1833 年以后，德国数学家雅可比建立了多重积分变量替换的雅可比行列式。与此同时，奥斯特罗格拉茨基不仅得到了二重积分和三重积分的变换公式，还把上述著名的奥-高公式推广到 n 维的情形。变量替换中涉及到的曲线积分与曲面积分也是在这一时期得到明确的概念和系统的研究。

1854 年，英国数学物理学家斯托克斯把格林公式推广到三维空间，建立了著名的斯托克斯定理。从此以后，多元微积分与一元微积分同时随着其理论分析的发展在数学物理的许多领域获得广泛的应用。

偏导数（**Partial derivative**） 一个多元函数对于它的某个变元作为唯一自变量而言的变化率。偏导数的朴素思想，在微积分学创立的

初期，就多次出现在力学研究的著作中。普通的导数与偏导数在这一时期并没有明显地被区别开，甚至于两者都用同样的符号来表示。人们只是注意到其物理意义不同，偏导数是在多个自变量的函数中，考虑其中某一个自变量变化的导数。

偏导数的理论是由欧拉和法国数学家方丹、克莱罗和达朗贝尔在早期偏微分方程的研究中建立起来的。欧拉在关于流体力学的一系列文章中给出了偏导数运算法则、复合函数偏导数、偏导数反演和函数行列式等有关运算。克莱罗证明了恰当微分的充要条件。达朗贝尔则在他的动力学著作中推广了偏导数的演算。

全微分（**total differential**） 一个多元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 相应于全部变元同时变化时的变化量

$$\Delta u=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\cdots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的线性主要部分，即

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n。$$

全微分的概念由法国数学家克莱罗在 1739 年关于地球形状的研究论文中首次提出。在这篇论文中，他建立了现在称为全微分方程的一个方程 $Pdx+Qdy+Rdz=0$，讨论了它可积分的条件。

雅可比行列式（**Jacobian determinant**） 以 n 个 n 元函数的偏导数为元素的行列式。1841 年，德国数学家雅可比把行列式理论应用于多重积分的变量替换中，得到一些特殊的结果。不久(1839)，比利时数学家卡塔朗给出现在大家熟悉的结果。例如对于二重积分

$$\iint F(x,y)dxdy,$$

在变量替换

$$x=f(u,v),y=g(u,v)$$

下成为

$$\iint G(u,v)\begin{vmatrix} fu & fv \\ gu & gv \end{vmatrix} dudv。$$

以上 $G(u,v)=F[f(u,v),g(u,v)]$，而 $\begin{vmatrix} fu & fv \\ gu & gv \end{vmatrix}$ 称为 x,y 关于 u,v 的雅可比行列式或函数行列式。

向量分析（**vector analysis**） 与向量函数有关的微积分运算及其应用。

19 世纪中叶英国数学家哈密顿发现的四元数理论是建立向量分析的基础。物理学家麦克斯韦把四元数的数量部分与向量部分分开来研究，从此提出了有关向量分析的一些课题。三维向量分析成为一个新的独立的分支，应归功于 19 世纪 80 年代的美国数学家吉布斯和英国物理学家亥维赛。吉布斯在 80 年代初就写出《向量分析基础》(但未公开发表)，亥维赛也在同一时期独立地发展了这一课题。

他们抛开四元数而独立地考虑具有三个分量的向量，建立了向量的代数运算。他们引进的向量的数量积和向量积都具有很强的物理意义。然后把向量代数推广到向量函数，建立了向量函数的微积分运算，如梯度、散度、旋度等。这样一来，分析中的许多基本定理都可以用向量形式来表示。例如，多元微积分中的格林公式和奥斯特罗格拉茨基公式被统一为向量形式，并称为散度定

理。斯托克斯定理也有类似的形式。

虽然向量分析在创立的初期，也曾引起过一些争议，但最终被数学界和物理学界所接受，并得到广泛的应用。

复变函数论(theory of functions of a complex variable) 研究复变数的函数的性质及应用的一门学科，是分析学的一个重要分支。

形如 $x+iy$(x、y 为实数，i 是虚数单位，满足 $i^2=-1$)的数称为复数。复数早在16世纪就已经出现，它起源于求代数方程的根。在相当长的一段时间内，复数不为人们所接受。直到19世纪，才阐明复数是从已知量确定出的数学实体。以复数为自变量的函数叫做复变函数。

对复变函数的研究是从18世纪开始的。30—40年代，欧拉曾利用幂级数详细讨论过初等复变函数的性质，并得出了著名的欧拉公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x。$$

1752年，达朗贝尔在论述流体力学的论文中，考虑复函数 $f(z)=u+iv$ 的导数存在的条件，导出了关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。\qquad ①$$

欧拉在1777年提交圣彼得堡科学院的一篇论文中，利用实函数计算复函数的积分，也得到了关系式①。因此，①式有时被称为达朗贝尔—欧拉方程，但后来更多地被称为柯西—黎曼方程。在这一时期，拉普拉斯也研究过复函数的积分。但是以上三人的工作都存在着本质上的局限性，因为他们把 $f(z)$ 的实部和虚部分开考虑，没有把它看成一个基本实体。

复变函数论的全面发展是在19世纪。首先，柯西的工作为单复变函数论的发展奠定了基础。他从1814年开始致力于复变函数的研究，完成了一系列重要论著。他把一个复变函数 $f(z)$ 视作复变数 z 的一元函数来研究。他首先证明复数的代数运算与极限运算的合理性，引进了复函数连续性的概念，接着给出了复函数可导的充分必要条件(即柯西—黎曼方程)。他定义了复函数的积分，得到复函数在无奇点的区域内积分值与积分路径无关的重要定理，从而导出著名的柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(s)}{\zeta-z}ds。$$

柯西还给出了复函数在极点处的留数的定义，建立了计算留数的定理。他还研究了多值函数，为黎曼面的创立提供了理论依据。

紧接着，阿贝尔和雅可比创立了椭圆函数理论(1826)，给复变函数论带来了新的生机。1851年，黎曼的博士论文《单复变函数的一般理论基础》第一次给出单值解析函数的定义，指出实函数与复函数导数的基本差别。他把单值解析函数推广到多值解析函数，阐述了现称为黎曼面的概念，开辟了多值函数研究的方向。黎曼还建立了保形映射的基本定理，奠定了复变函数几何理论的基础。

外尔斯特拉斯与柯西、黎曼不同，他摆脱了复函数的几何直观，从研究幂级数出发，提出了复函数的解析开拓理论，引入完全解析函数的概念。他在椭圆函数论方面也有

很重要的工作。

19世纪后期，复变函数论得到迅速发展。在相当一段时间内，柯西、黎曼、外尔斯特拉斯这三位主要奠基人的工作被他们各自的追随者继续研究。后来，柯西和黎曼的思想被融合在一起，而外尔斯特拉斯的方法逐渐从柯西、黎曼的观点推导出来。人们发现，外尔斯特拉斯的研究途径不是本质的，因此不再强调从幂级数出发考虑问题，这是20世纪初的事。

20世纪以来，复变函数论又有很大的发展，形成了一些专门的研究领域。在这方面做出较多工作的有瑞典数学家米塔－列夫勒，法国数学家庞加莱、皮卡、波莱尔，芬兰数学家奈望林纳，德国数学家比伯巴赫，以及苏联数学家韦夸、拉夫连季耶夫等。

解析函数(analytic function) 能展成幂级数的函数，它是复变函数研究的主要对象。

对解析函数的系统研究开始于18世纪。欧拉在这方面作出许多贡献。拉格朗日最早希望建立系统的解析函数理论，他曾试图利用幂级数的工具来发展这种理论，但未获成功。

法国数学家柯西以他自己的工作被公认为是解析函数理论的奠基者。1814年他定义正则函数为导数存在且连续，他批判了过去许多错误的结果，创立了若干法则，以保证级数运算的可靠性。1825年他得到了著名的柯西积分定理，随后又建立了柯西积分公式。柯西利用这些工具得到了正则函数在它的定义域内处处可表为收敛的幂级数的结果，其逆命题亦真。所以解析和正则是等价的。1900年，法国数学家古尔萨改善了正则函数的定义，只要求函数在定义域中处处有导数。

外尔斯特拉斯以幂级数为出发点开展对解析函数的研究。他定义正则函数为可以展开为幂级数的函数，创立了解析开拓理论，并利用解析开拓定义完全解析函数。柯西的方法限于研究完全解析函数的所谓单值分支，必须通过解析开拓才能和外尔斯特拉斯的理论统一起来。

柯西积分定理(Cauchy integral theorem) 法国数学家柯西在研究复变函数的积分时所得到的基本定理。

柯西在1825年完成的论文《关于积分限为虚数的定积分的报告》(1874年发表)中叙述了这个定理：若 $f(x+iy)$ 在区域 $x_0\leqslant x\leqslant X$、$y_0\leqslant y\leqslant Y$ 中有界并连续，那么积分

$$\int_{x_0+iy_0}^{x+iy} f(z)dz$$

的值与 $x=\Phi(t)$ 和 $y=X(t)$ 的形式无关。

柯西在这篇论文中给出的证明并不十分严谨，他在1846年的论文中给出了这个定理的一个新证明。

泰勒级数(Taylor series) 解析函数的一类幂级数展开式。在圆 $|z-a|<R$ 内解析的函数 $f(z)$ 可以展为下列形式的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

此级数称为 $f(z)$ 在 $z=a$ 处的泰勒级数。当 $a=0$ 时，称为马克劳林级数。

对于单变量实函数的泰勒级数，最早见于英国数学家泰勒 1712 年给他的老师梅钦的信中，等价于现代形式

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\cdots$$

但泰勒级数的重要性大约在 50 年后通过法国数学家拉格朗日的研究才为大家所认识。泰勒对定理的证明尚未考虑收敛性，因此并不严密。一个世纪以后，法国数学家柯西给出第一个较为严密的证明。拉格朗日和柯西还给出了泰勒级数的两种不同形式的余项。随着复变函数的发展，泰勒级数被推广到复变量的情形。通过解析函数可以展开为泰勒级数这一事实，可以更进一步研究解析函数的性质。

洛朗级数（**Laurent Series**） 也称洛朗展开式。在环形区域 $r<|z-z_0|<R(0\leqslant r<R\leqslant+\infty)$ 内的解析函数 $f(z)$ 可展为如下的包含有正的和负的方幂的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

此级数称为 $f(z)$ 在给定圆环内的洛朗级数。

这个展开式是法国数学家洛朗在 1843 年建立的。他指出，当函数 $f(z)$ 在孤立点 z_0 处不连续时，就必须用变量的升幂和降幂展开式来代替泰勒展开式。如果 $f(z)$ 和它的导数在以 z_0 为中心的圆环内单值并连续，则 $f(z)$ 以相反方向沿着圆环的两个边界圆所取的积分适当展开后就给出 z 的升幂的降幂的一个展开式，它在这个圆环内解析。这个展开式被称为洛朗展开式，它是泰勒展开式的推广。外尔斯特拉斯在 1841 年就知道这个结果，但未公开发表。

留数（**residue**） 又称残数，复变函数论中的一个重要概念。解析函数 $f(z)$ 在孤立奇点 $z=z_0$ 处的洛朗展开式 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$ 中，$(z-z_0)^{-1}$ 项的系数 c_{-1} 称为 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的留数。

留数的概念由法国数学家柯西提出。他在 1814 年于巴黎科学院宣读的论文《关于定积分理论的报告》（1827 年发表）中，已经接触到这个概念。对留数较完整的论述是在他 1825 年的论文《关于积分线为虚数的定积分》（1874 年发表）中给出的。第二年他提出了积分留数的术语，并指出 $f(z)$ 在 z_0 处的留数就是 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗展式中 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数。到 1841 年，他建立了留数的积分表达式

$$F(z_0)=E[f(z)]_{z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz,$$

其中积分路径 Γ 表示以 z_0 为中心的小圆。1846 年，柯西又指出，如果曲线 Γ 包围着一些极点，那么积分 $\int_\Gamma f(z)dz$ 的值等于 $f(z)$ 在这些极点上的留数之和的 $2\pi i$ 倍，即

$$\int_\Gamma f(z)dz=2\pi iE[f(z)],$$

其中 $E[f(z)]$ 是柯西用以表示留数之和的记号，这个结果被称为留数定理。留数定理在复变函数论中有广泛的应用，例如利用它可计算一

些较复杂的定积分。

保角映射(**conformal mapping**) 又称保形映射,是复变函数论的一个分支。其方法是从几何学的角度来研究复变函数。

从一个平面到另一个平面的保角映射,来源于地图绘制问题。欧拉在1768年提交圣彼得堡科学院的一篇论文中,利用复变函数设计了一种从平面到平面的保角映射方法。后来他又讨论了一般的保角表示问题。高斯在1825年解决了平面间保角映射的一般问题。兰伯特、欧拉和拉格朗日都研究过从球面到平面的保角映射。

随着复变函数论和微分几何的发展,保角映射的理论和方法得到进一步发展。黎曼在他1851年的博士论文中,阐明了一个解析函数可以建立从Z平面到w平面的保角映射,并给出保角映射理论中最基本的定理——黎曼映射定理。他还把有关结果推广到黎曼面。保角映射理论有广泛的应用,例如,俄国学者茹科夫斯基成功地应用这一理论研究各种飞机机翼的截面,计算了绕流对机翼所引起的升力和力矩。

特殊函数(**Special function**) 一些高级超越函数的总称,不是代数函数的完全解析函数通称为超越函数。高级超越函数是超越函数中不为初等函数的泛称。特殊函数的种类繁多,而且不断地有新的出现。常见的有Γ—函数、B—函数、超几何函数、贝塞尔函数、勒让德函数等。一些正交多项式,如雅可比多项式、切比雪夫多项式、埃尔米特多项式、拉盖尔多项式等,通常也列入特殊函数之列。

Γ—函数是在18世纪从插值理论与反微分这两个问题的研究中产生的。欧拉在1829—1831年研究插值问题时,推广了阶乘概念,对于非整数的n,给出$n!$的定义,同时他考察了沃利斯研究过的积分$\int_0^1 x^e(1-x)^h dx$(e,n是任意数),经过一系列的变换,他得到$n!=\int_0^1(-\log x)^n dx$ 后来勒让德称这个积分为Γ函数,并用$\Gamma(n+1)$来表示。1781年,欧拉给出它的现代形式,即

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx。$$

勒让德在研究积分$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx$时,引入B—函数,他定义

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx。$$

欧拉在1771年发现了Γ—函数与B—函数之间的关系

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}。$$

欧拉在1769年发表的《积分学原理》中得到了超几何方程

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}-aby=0$$ 的级数解

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(c)_n(b)_n}{n!(c)_n}x^n。$$

这个级数被德国数学家普法夫称为超几何级数。当x是复变量时,从这个级数(在$|Z|<1$时解析)出发利用解析开拓可以得到完全解析函

数，这种完全解析函数叫做超几何函数。还有许多种类的特殊函数也都是从寻求某些数学物理方程的解得出的。例如，常微分方程中重要的贝塞尔方程的两个独立解 $J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$ 分别叫做第一类和第二类贝塞尔函数；勒让德微分方程的两个独立解分别叫做第一类和第二类勒让德函数；拉梅微分方程的解叫拉梅函数或椭圆调和函数；拉盖尔方程的解叫拉盖尔多项式；等等。这些特殊函数在数学物理中都有广泛的应用。

19 世纪后期，俄国数学家切比雪夫创立用多项式逼近连续函数的理论，在考虑函数的最佳逼近时，引进了切比雪夫多项式。切比雪夫多项式在计算方法中有很多应用。

19 世纪末到 20 世纪初，由于物理学和工程技术的需要，解微分方程的问题引出了一些更为复杂的特殊函数。特殊函数已经形成比较专门的理论，20 世纪以来又得到新的发展和应用。

整函数(**integral function**) 在平面的有限部分没有奇点的函数，例如多项式 e^z，$\sin z$，$\cos z$ 等，粗略地说，它们相当于初等实函数的类似物。

整函数是十分重要的一种单值复函数，许多数学家对它进行了深入研究。在这方面的第一个重要结果属于法国数学家柯西，他在 1844 年证明了每一个有界的整函数是一个常数。后来人们常把这个定理归于刘维尔，因为他在 1847 年也发表了这个定理。外尔斯特拉斯把实多项式分解为线性因式的定理推广到整函数，大约在 1840 年，他就得到了整函数的因式分解定理(1876 年发表)。1879 年，法国数学家皮卡建立了整函数取值范围的重要定理。稍后，法国数学家拉盖尔引进了整函数的格的概念，在某种意义上，它类似于多项式的次数。1883 年，庞加莱建立了整函数的模与其格的关系的定理。阿达马研究了与此相反的问题，他在 1896 年给出了由函数 $f(z)$ 的最大模的某种界来作出函数零点数的某种上界的估计。1897 年，波莱尔引入函数增长级的概念，这是度量函数最大模增长速度的特征量，在整函数理论中起着重要作用。

19 世纪末，波莱尔综合和改进了皮卡、庞加莱和阿达马的工作，开始形成整函数值分布论。

亚纯函数(**meromorphic function**) 除极点外为全纯的函数为亚纯函数，它是复变函数论研究的主要对象之一。

德国数学家外尔斯特拉斯、瑞典数学家米塔－列夫勒、法国数学家柯西等都是亚纯函数理论的奠基人。1876 年，外尔斯特拉斯证明了一个亚纯函数可以表示为两个整函数的商。第二年，瑞典数学家米塔-列夫勒推广了外尔斯特拉斯的结果，证明在任意一个区域上的亚纯函数皆可表为两个函数的商，其中每一个都在该区域内解析。法国数学家柯西也曾给出一种分解方法，对相当广一类亚纯函数得到简单的表示式。

近代亚纯函数理论是 20 世纪 20 年代由芬兰数学家奈望林纳所

创立。他在1925年发表了亚纯函数的一个一般性理论，这个理论中有两个基本定理分别称为第一基本定理和第二基本定理，从它们可以推出一系列关于亚纯函数的值分布的结果，丰富并推进了前人的工作，产生了深远影响。

亚纯函数的术语是由法国数学家布里奥和布凯共同引进的。

解析开拓（**analytic continuation**） 把解析函数的定义域扩大的过程。

解析开拓通常有两种方法，一种是利用幂级数进行解析开拓，这是外尔斯特拉斯的贡献。他研究了解析函数用幂级数表示的问题。如果已知一个幂级数，它在某个有限区域内表示一个复函数，外尔斯特拉斯推导出在其他区域中定义同一函数的另一些幂级数，这些幂级数都是已知复函数的解析开拓。在解析开拓的过程中，函数有时是多值的。他利用解析开拓定义了完全解析函数。外尔斯特拉斯还给出第一个幂级数的例子，其收敛圆是它的自然边界，这个幂级数所表示的函数是不能解析开拓的。

另一种解析开拓的方法是利用施瓦兹对称原理，这是由德国数学家施瓦兹建立的把解析函数定义域作对称扩大的解析开拓法。

椭圆函数（**elliptic function**） 双周期的亚纯函数。这个课题最初是从求椭圆弧长所引导出来的，所以称为椭圆函数。

高斯生前得到过关于椭圆函数论的许多重要结果，但没有公开发表过。一般认为，挪威数学家阿贝尔和德国数学家雅可比是椭圆函数论的创始人。

1825年，阿贝尔在了解到欧拉、拉格朗日和勒让德关于椭圆积分的工作后，提出了新的考虑。例如对于第一型椭圆积分

$$u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

其中$x=\sin\varphi$，阿贝尔提出把x作为u的函数（从而φ也可作为u的函数）来研究。这就是说，u作为x的函数时，其反函数正是椭圆函数$\mathrm{sn}x$。椭圆函数的名称就由此而来。阿贝尔引进u的复值，从整体上来定义椭圆函数，他还建立了椭圆函数的加法定理。不久他就发现，这些椭圆函数是双周期的，单值的，并且有极点。与此同时，雅可比独立地得到了阿贝尔的许多结果。他还引进四个θ函数，并把椭圆函数理论建立在θ函数基础上。还进一步研究了θ函数的各种性质。

法国数学家刘维尔和德国数学家外尔斯特拉斯对椭圆函数论也都有重要贡献。前者提出如何发现所有双周期函数的问题，试图建立一个更加完整的理论；后者把椭圆函数表示成幂级数的商来研究，他的工作使椭圆函数理论更加完备。

函数值分布论（**theory of value—distribution**） 复变函数论中历史悠久、理论完美的一个分支。其主要研究内容是整函数和亚纯函数的取值情况。

1879年法国数学家皮卡证明了：对于不蜕化为常数的整函数

$f(z)$和任意复数 a，方程 $f(z)=a$ 都有根，至多除去 a 的两个例外值。皮卡定理奠定了值分布论的基础。以后，法国数学家庞加莱、阿达马等继续进行研究，后者建立了整函数和亚纯函数的分解定理，并应用于 J 函数的零点研究。

1896 年，法国数学家波莱尔正式引入整函数的级的概念，把皮卡定理大大推进了一步。

20 世纪初，有许多人从事值分布论的研究，其中成果较为显著的有芬兰数学家林德勒夫、德国数学家布卢门塔尔、法国数学家当儒瓦等。

1919 年，法国数学家朱利亚开创了在一射线附近函数取值情况的研究，不久他的工作又被推进了一步。1925 年，芬兰数学家奈望林纳把亚纯函数作为主要研究对象，建立了两个基本定理。他的工作使值分布论呈现了崭新的面貌，开始了值分布的近代理论。1928 年，法国数学家瓦利隆也发展了朱利亚的工作。这一阶段还有许多杰出的学者从事值分布论的研究。50 年代中期以来，又出现了许多优秀的工作。

在中国，在著名数学家熊庆来的倡导下，庄圻泰、杨乐，张广厚等从事值分布论的研究，取得了显著的成果。

黎曼曲面(**Riemann surface**)　用现代术语说，黎曼曲面就是连通的一维复流形。18 世纪中叶，德国数学家黎曼为了给多值解析函数设想一个单值的定义域而提出了一种曲面，被称为黎曼曲面。

黎曼的原始思想是想为多值函数构造一个适当的定义场所，使它成为一个完整的单值解析函数。黎曼曲面的构造有效地实现了黎曼的想法。函数 $\omega^2=z$ 是多值的，对于 z 的每一个值，有 ω 的两个值。为了研究这个函数并保持两个值集$\sqrt{z}$ 和$-\sqrt{z}$分开，黎曼给每一个分支引进一个 z 值平面，这两个平面一个位于另一个的上方，并且在 $z=0$ 和 $z=\infty$处连结在一起。由这两叶 z 平面组成的集合叫黎曼平面。z 在黎曼面上取值，ω 就成为 z 的一个单值函数。对于更复杂的多值函数，黎曼面也就更复杂。

黎曼面的引入，使关于单值函数的定理可以推广到多值函数。黎曼曲面的经典理论在此基础上建立并发展起来。

德国数学家外尔首先给出黎曼曲面的近代定义。与此同时，他给出一维复流形的第一个严格的定义和有关理论。根据外尔的观点，黎曼曲面就是一维的复流形。这个定义的引入大大地开扩了复变函数论的研究范围，使复变函数论与众多的现代数学分支建立起密切联系。

单叶函数(**univalent function**)　复变函数中一类重要的解析函数。若对复区域 D 上单值的解析函数 $f(z)$，当 z_1 不同于 z_2 时有 $f(z_1)\neq f(z_2)$，则说 $f(z)$ 为 D 上的单叶函数。单叶函数及与其相关的单叶映射是复变函数论最重要的研究内容之一。

德国数学家克贝和比伯巴赫等最早对单叶函数做出重要贡献。例如，比伯巴赫从 1916 年开始对单位

圆内全钝单叶函数进行了定量研究。后来他与芬兰数学家奈望林纳共同建立了单位圆内单叶函数的系统理论。1916 年比伯巴赫提出了一个著名猜想。称为比伯巴赫猜想，它曾经是单叶函数研究的中心问题，吸引过许多著名数学家。围绕这个猜想所做的工作推动了复变函数论的发展（见比伯巴赫猜想）。

拟保角映射（**quasi — conformal mapping**） 又称拟共形映射、拟保形映射，是保角映射的推广，指在定义域内把每一微小圆映成微小椭圆的映射。

1928 年，德国数学家格勒奇最早引进拟保角映射的概念。他研究了似保角映射与保角映射的类似点，求出了平面上给定的两个长方形之间使微椭圆的长轴和短轴之比的上确界达到最小的拟保角映射，即最接近保角映射的拟保角映射。美国籍芬兰数学家阿尔福斯在 1935 年左右发展了拟保角映射理论，取得一些重要成果。苏联数学家拉夫连季耶夫在 1943 年建立了拟保角映射的一般理论，不久他又证明了关于拟保角映射的基本定理。德国数学家科贝对拟保角映射理论也做出了重要贡献。由于他们的工作，使拟保角映射理论成为复变函数论中最活跃的领域。

狄利克雷级数（**Dirichlet series**） 也称指数级数。指形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \qquad ①$$

的级数，式中 a_n 是复常数，$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \to +\infty$，$z$ 为复数。

1837 年，德国数学家狄利克雷在证明每一个算术序列 $\{a+nb\}$（a、b 互素）包含无穷多个素数时，使用了级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z},$$

这就是狄利克雷级数的最初形式，若在级数①中令 $\lambda_n = \ln n$ 就得到这个级数。狄利克雷级数在解析数论中有重要应用。后来一些数学家又从级数论的角度来研究它。把狄利克雷级数推广到积分的情形就是拉普拉斯变换；而当 $a_n = 1$ 的最简单情形，狄利克雷级数又成为黎曼 J 函数。近代，围绕着狄利克雷级数的收敛性、解析性、系数的表示与估计，奇点与系数的关系，求和法等开展了广泛的研究。

拉普拉斯变换（**Laplace transform**） 一种特殊的积分变换。

1782 年，法国数学家拉普拉斯研究了由

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt \qquad ①$$

给出的积分方程，这个方程后来被称为 $g(t)$ 的拉普拉斯变换。不久，泊松发现了 $g(t)$ 的表达式

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} f(t) dt, \qquad ②$$

其中 a 充分大。②式现在称为拉普拉斯反变换。

对狄利克雷级数的研究深入开展以后，人们发现，把狄利克雷级数推广到积分，就得到拉普拉斯变换，因此对后者的研究更加引起人们的注意。拉普拉斯变换是求解常微分方程和偏微分方程的有力工具。

多复变函数论（**theory of analytic functions of several variables**） 研究多个复变量的全纯函数的性质和结构的学科，是分析学的一个分支，有时也称多复分析。

多复变函数论的研究，早在单复变函数论的黎曼和外尔斯特拉斯时代就已经零散地开始了。但真正标志着多复变函数论这一学科创立的，是19世纪末和20世纪初庞加莱、库辛和哈托格斯等人的工作。他们的工作揭示了多复变全纯函数本质上的独特性。在这当中，库辛提出的关于全纯函数整体性质的两个以他命名的问题以及列维推出的拟凸域和全纯域是否等价的问题，更有着深远的影响，长时间成为多复变函数论发展的推动因素。20世纪30年代以前，虽然出现过莱因哈特关于解析自同构群、伯格曼关于核函数和度量等方面的重要工作，但整体说来，多复变函数论处于相对沉寂时期。从30年代开始，多复变的研究迎来了初步繁荣。这一时期中陆续出现了嘉当关于全纯自同构的唯一性定理、有界域全纯自同构群的李群性质以及全纯域与全纯凸的等价性的嘉当－苏伦定理等突出成果。特别是从1936年开始，日本数学家冈洁对库辛问题、列维问题、逼近问题等多复变的中心问题进行了长期、系统而富有成效的研究，终于在50年代对上述诸问题给出了解答。他的这一系列工作对后来多复变函数的发展有着重大影响。50年代以后，和现代数学的综合化、抽象化的总潮流相一致，在多复变函数论中用拓扑方法和几何方法研究全纯函数的整体性质的趋势变得越来越明显。由勒雷引进拓扑学的层及其上同调的概念被迅速而成功地用于多复变函数。这一概念和嘉当早先关于全纯函数理想论的研究以及冈洁的思想结合，导致了凝聚解析层理论的建立。与此同时，复空间与施泰因流形的概念也应运而生。嘉当和塞尔系统地应用凝聚层理论建立了施泰因流形的基本定理。此后不久，格劳尔特解决了复流形的列维问题，他和雷默特、施泰因等人还大大发展了复空间的理论。整个50年代是多复变函数的黄金时代。

另一方面，近代微分几何与复分析的相互融合也在不断地加快步伐。1913年，外尔的黎曼曲面理论导致了复流形概念的建立。嘉当的外微分式与拓扑的结合产生了德拉姆的上同调理论。以此为基础，霍奇将黎曼曲面上的调和函数理论推广到高维的紧致复流形，证明了紧复流形的基本定理——霍奇定理。40年代以后，与微分几何中的博赫纳技巧相结合，霍奇理论又由小平邦彦所发展和完善。60年代，博赫纳－小平邦彦方法又进而推广到非紧的带边界的复流形，发展成为近代多复分析的一个有力工具：$\bar{\partial}$问题的L^2估计。

多复变函数论中具有重要意义的第三方面进展是西格尔在1935—1950年间建立的多复变函数的自守函数论。50年代以后，由于塞尔伯格、朗兰兹、盖尔范德等人的工作，揭示了它与代数数论、李群的无穷维表示、代数几何等众多学

科的内在联系，而日益成为目前极为活跃而且引人注目的近代数学领域之一。

实变函数论(**theory of functions of real variables**) 实变函数主要指自变量取实数值的函数。实变函数论就是研究一般实变函数的理论。

实变函数论是19世纪末20世纪初形成的一个数学分支，是微积分的深入和发展。它的产生最初是为理解和弄清19世纪的一系列奇怪的发现。外尔斯特拉斯构造了(1875年发表)一个处处不可微的连续函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi x)\quad (0<a<1, ab>1+\frac{3}{2}\pi, b \text{ 为奇数});$$

皮亚诺发现了(1890)能填满一个正方形的若尔当曲线；以及连续函数级数之和不连续；可积函数序列的极限函数不可积；函数的有限导数不黎曼可积；等等。这些例子从微积分学的角度来看都很意外，它促使数学家们进一步研究函数的各种性态。对傅立叶级数理论的深入探讨是实变函数论产生的另一个动力。

函数可积性的探讨是实变函数论的主要内容。积分概念的第一次扩充来自荷兰数学家斯蒂尔杰斯，他在1894年的论文中，为了表示一个解析函数序列的极限，引进了一种新的积分——斯蒂尔杰斯积分，这种积分后来成为研究一般测度上的积分的开端。

积分概念还沿着另一条路线被推广。因为函数的不连续点影响了函数的可积性，所以数学家们转向函数的不连续点集的研究。由此产生了“容量”和“测度”的概念，它们是通常体积、面积和长度概念的推广。

容量的概念最早由德国数学家哈纳克(1881)和杜布瓦－雷蒙(1882)提出。随后，皮亚诺改进了他们的工作，引进了区域的内容量和外容量。如果f是围成该区域的曲线的函数，那么此区域的内、外容量分别由f的下、上积分确定。1893年，若尔当在他的《分析教程》中，更有力地阐明了内、外容量的概念。他用有限集合复盖点集，给出“若尔当容量”的定义，完善了他前人的工作。他还研究了容量对积分的应用。波莱尔在处理表示复函数的级数收敛的点集时，建立了他称之为测度的理论。在《函数论讲义》(1898)中，他定义了开集、可数个不相交的可测集的并集、两个可测集的差集等几类点集的测度，把测度从有限区间推广到更大一类点集(波莱尔可测集)上。

在测度论和积分理论方面作出决定性贡献的是法国数学家勒贝格。他的论文《积分、长度与面积》(1902)又改进了波莱尔的测度论。勒贝格引进了n维空间点集测度的概念，他用(可数)无穷个区间复盖已知点集，给出某些特殊点集的测度定义，并注意到不可测集的存在。在此基础上，勒贝格引进了可测函数的概念，然后建立“勒贝格积分”。他采取划分值域而不划分定义域的方法，把积分归结为测度，从而使黎曼积分的局限性得到突破。紧接着，

他又在《积分与原函数的研究》(1904)中证明了有界函数黎曼可积的充要条件是其不连续点构成一个零测度集。这就从根本上解决了黎曼可积性的问题。

勒贝格积分理论的建立扩充了以往人们所研究的函数的范围和极限的意义。以这种理论为核心发展起来的实变函数论已成为数学的一个分支。它的最基本内容可以作为分析数学各分支的普遍基础。近年来,实变函数论已经渗入数学的许多分支,有着广泛而深刻的应用。例如,实变函数论对形成近代数学的一般拓扑学和泛函分析两个重要分支有着极为重要的影响。又如,苏联数学家柯尔莫哥洛夫把概率理解为一种抽象测度,建立了概率论的公理化体系,使概率论的面貌完全改观,并且拓广了概率论的研究范围。

勒贝格积分(**Lebesgue integral**) 黎曼积分的推广,分析数学中普遍使用的重要工具。

19世纪,随着微积分的发展与深入,人们常常需要处理一些较复杂的函数。在讨论它们的可积性、连续性,可微性时,经常遇到积分与极限能否交换顺序的问题。通常只有在很强的假设下才能解决这类问题。因此在理论和应用上都迫切要求建立一种不同于黎曼积分和黎曼—斯蒂尔杰斯积分的新积分。1902年,法国数学家勒贝格在点集的测度概念的基础上建立了一种新的积分,叫做勒贝格积分。

勒贝格改进了波莱尔的测度理论,引进n维空间点集测度的概念,在此基础上又引进可测函数的概念。设$f(x)$是定义在$[a,b]$中可测集E上的一个有界可测函数,A与B是$f(x)$在E上的上确界和下确界,勒贝格把$f(x)$的值域区间$[A,B]$(在y轴上)划分成n个子区间$A<L_1<L_2<\cdots<L_{n-1}<B$,考虑每个子区间通过$f(x)$在$E$中对应的$n$个可测点集$e_1,e_2,\cdots e_n$,然后作和

$$S=\sum_1^n l_r m(e_r),\ s=\sum_1^n l_{r-1}m(e_r)。$$

当S与s的下确界和上确界相等时,这个公共值就定义为$f(x)$的勒贝格积分。如果函数黎曼可积,那么必定勒贝格可积,并且积分值相等,但反过来不一定对。

勒贝格积分的建立扩充了函数的概念和极限的意义,并为20世纪的许多数学分支如泛函分析、概率论、抽象积分论,抽象调和分析等奠定了基础。勒贝格积分在傅立叶级数理论中也有重要应用。

测度(**measure**) 见实变函数论。

黎曼—斯蒂尔杰斯积分(**Riemann—Stieltjes integral**) 也称斯蒂尔杰斯积分,是黎曼积分的一种推广。

1894年,荷兰数学家斯蒂尔杰斯在论文《连分式研究》中引进了一种新的积分,这是对黎曼积分的第一次推广。斯蒂尔杰斯把质量沿着一根直线的分布看成是点密度概念的推广,他把这种质量分布用一个递归函数$\Phi(x)$表示,$\Phi(x)$表示在区间$[0,x](x>0)$上的总质量。然后他写出黎曼和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)),$$

其中 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 是$[a,b]$的一个分划，$\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$。斯蒂尔杰斯证明了，当 f 在$[a,b]$上连续，分划的最大子区间趋于零时，这个和趋于一个极限，他把这个极限记作

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)。$$

这种积分后来就叫作斯蒂尔杰斯积分。

20 世纪以后，斯蒂尔杰斯积分获得了广泛的应用，并且发展为勒贝格－斯蒂尔杰斯积分。

贝尔函数（Baire function） 指法国数学家贝尔在 1899 年定义的贝尔函数类。他规定连续函数为 0 类函数，0 类函数序列的极限函数（但非 0 类函数）为 1 类函数，1 类函数序列的极限函数（但非 0 类和 1 类函数）为 2 类函数，以此类推可规定 n 类函数。

后来人们又在 n 维空间和一般拓扑空间中引入了贝尔函数类。贝尔函数的引入，扩大了实变函数的研究范围。

泛函分析（functional analysis） 研究拓扑线性空间到拓扑线性空间之间满足各种拓扑和代数条件的映射的分支学科。它在 20 世纪初开始形成，20 世纪 30 年代才正式成为独立学科。泛函分析的名称是由法国数学家 P・P・莱维引进的。

泛函分析的某些基本概念可以远溯到微积分发现的年代。因为微分可看作是作用在可微分函数上的算子，而定积分则是定义在可积分函数类上的泛函数，但在当时人们还没有这种认识。

泛函分析的一个源头是变分法。早在 17 世纪末 18 世纪初，约翰・伯努利关于最速降线的工作就可以看成是泛函数研究的开端。这个问题及后来提出的各种变分问题一般都可归结为求形如 $J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx$（或更复杂些）的积分的极值。这里函数 $y=y(x)$ 是在某个集合 Y 上变动。变分法研究以函数 y 为自变元的函数 $J(y)$。把这里的 y 视为点，Y 视为函数空间的观念是在很晚才行成的。泛函的抽象理论开始于意大利数学家沃尔泰拉关于变分法的工作。他研究所谓“线的函数”，指出每个线的函数是一个实值函数 F，它的值取决于定义在某个区间$[a,b]$上的函数 $y(x)$ 的全体。全体 $y(x)$ 被看作一个空间，每个 $y(x)$ 看作空间中的一个点。对于 $y(x)$ 的函数 $J(y)$，沃尔泰拉曾引进连续、微商和微分的定义。法国数学家阿达马首先称这种函数的函数 $J(y)$ 为“泛函”。阿达马在 19 世纪末也是由于变分法的研究而开创了泛函分析的工作。与沃尔泰拉一样，他也指出曲线可以看作集合中的一个点，并给出一个泛函是线性的条件。意大利数学家阿尔泽拉和阿斯科利曾试图把康托尔点集理论推广到函数集合上，从而把函数看成是空间中的点。

泛函分析的另一个源头是积分方程。自从挪威数学家阿贝尔 1823 年在力学问题中提出并研究积分方程

$$f(x)=\int_0^x \frac{u(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi$$

以后，19 世纪末在微分方程，例如在狄利克雷等问题的研究中，出现了上述积分方程的推广形式，即所谓沃尔泰拉型积分方程。1900 年，瑞典数学家弗雷德霍姆利用线性方程组和行列式理论对积分方程

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)d\xi$$

作了深入研究。建立了后来被称为弗雷德霍姆择一定理的重要结果。他的工作引起希尔伯特的兴趣。1904—1910 年，希尔伯特接连发表 6 篇论文，他使用了可数无穷多个变量的方程组理论，在实连续积分核是对称的条件下，得到了比弗雷德霍姆更加深入的结果。例如，他证明了特征值是实的，给出预解式的形式与特征展开等，这些通常称为希尔伯特谱论。他还引入了无限维欧几里得空间 l^2(后称为希尔伯特空间)，提出 l^2 上有界双线性形式、有界线性形式以及两种收敛等概念，给出 l^2 上的选择原理，还发现连续谱的存在等结果。这些工作表明用代数方法来研究分析问题是很成功的。

上述来自变分法和积分方程的不同课题，却有着许多类似的东西，这些事实启发数学家们从中提取属于本质的共性，以寻求把它们统一起来的概念。

1906 年，法国数学家弗雷歇首先引进了抽象的距离空间，研究了距离空间的紧性、完备性和可分性等泛函分析的基本概念。他的工作中包含着点集拓扑学的萌芽。不久，德国数学家施密特与弗雷歇引入了实的及复的希尔伯特空间中的几何概念：包括最早使用的范数这一名词和符号 $\|x\|$、三角不等式，希尔伯特空间的可分性与完备性等。施密特还证明了闭线性集上投影的存在，并利用它来简化希尔伯特的线性方程组理论。1907 年，弗雷歇与匈牙利数学家里斯证明了函数空间 L^2 具有与 l^2 相同的几何性质，紧接着他们又证明了著名的弗雷歇－里斯定理，即建立了 L^2 与 l^2 的同构，显示了勒贝格积分理论的深刻性。至此，希尔伯特空间的基本理论已大体形成。

除了空间 L^2 与 l^2 外，对其他函数空间的研究也着手进行。1903 年，阿达马研究了连续函数空间 $C[a,b]$ 上的线性连续泛函数的一般表示问题，得出这种泛函数必可表示成一串 $\int_a^b k_n(t)x(t)dt$ 的极限。1909 年，里斯用斯蒂尔杰斯积分完全解决了阿达马的问题，并使它成为现代积分论的出发点。1907 年，弗雷歇和里斯也对 l^2 解决了连续线性泛函数的一般形式问题。1910 年，里斯研究了空间 $L^p(a,b)(1<p<\infty)$，即一切 p 次幂可积分的可测函数集。三年后他又研究空间 $l^p(1<p<\infty)$。在这些研究中他第一次提出了不自然同构的两个空间的互相对偶。里斯在 1918 年所发表的弗雷德霍姆理论的新处理，不但把这一理论抽象化，详细研究 $C[a,b]$，而且用到了一般巴拿赫空间的一些性质。这篇论文还最早一般地定义

了全连续线性算子，并把弗雷德霍姆理论归结在一个重要定理之上：局部列紧赋范线性空间必是有穷维的。

1922—1923年，波兰数学家巴拿赫、奥地利数学家哈恩、奥地利数学家黑利、美国数学家维纳引入了赋范线性空间的一般定义。在上述问题中，共同的对象是函数集，而这些函数集的共同基本属性在于其中有代数运算，特别是函数可以相加，函数可以数乘，从而这些函数空间是线性空间；另一方面，必须考虑种种函数列的收敛，这种收敛最简单的乃是用距离决定的。把这两种概念结合，并加上一些其他考虑，便得出赋准范与赋范线性空间的概念。1920—1930年之间，这种空间的研究及其应用的探讨便是当时泛函分析的主要内容。

1930年以后，泛函分析已发展成独立学科，现在它已拥有众多的分支，其观点和方法已渗入到不少工程技术性的学科之中。泛函分析已成为近代分析的基础之一。

索伯列夫空间（**Sobolev space**） 具有弱导数的多变量可积函数组成的一类巴拿赫空间。

20世纪30年代以来，苏联数学家索伯列夫用现代泛函分析的方法来研究偏微分方程理论，引进这类函数空间，并研究了它的内嵌变换，得到一些重要结果。随后，由于变分法的发展和偏微分方程定解研究的需要，许多人研究这类函数空间。索伯列夫空间及其各种推广、嵌入定理、迹定理及各种插值公式很快成为偏微分方程理论研究的必要工具。

拓扑线性空间（**topological linear space**） 泛函分析的重要分支，又称拓扑向量空间，它是具有拓扑结构的线性空间，赋范线性空间概念的推广。

20世纪初，在法国数学家弗雷歇引入距离空间，并用距离概念来统一过去分析学中的许多重要收敛时，就知道$[a,b]$上一列函数的“点点收敛”概念是不能用距离收敛来描述的。30年代以来，泛函分析中大量使用弱收敛、弱拓扑，它们都不能用距离来描述。这就很自然地把赋范线性空间理论发展成更一般的拓扑线性空间理论，其中最主要的成就是局部凸拓扑线性空间理论。这一分支的发展是与一般拓扑学的发展紧密联系在一起的。拓扑学方法在这里发挥了极重要的作用，法国数学家勒雷和波兰数学家绍德尔所推广的不动点定理就是有力的例证之一。1935年以后，经过十多年的努力，这一分支终于形成，它的许多结果不仅在泛函分析中有广泛的应用，而且为其他分析学科的深入研究提供了基本框架和有力的工具。

巴拿赫空间（**Banach space**） 完备的赋范线性空间称为巴拿赫空间，是泛函分析研究的基本内容之一。

20世纪以来，当人们研究了许多具体的无限维空间及其上面相应的收敛性以来，自然而然地转向抽象形态的线性空间以及按范数收敛的概念。1922—1923年，波兰数学家巴拿赫、奥地利数学家哈恩和美

国数学家维纳等分别独立地引入了赋范线性空间的概念。1922年,哈恩从当时分析数学的许多成果中提炼出共鸣定理;1922—1923年巴拿赫得到压缩映射的不动点定理,开映射定理;1927年和1929年哈恩和巴拿赫先后证明了完备赋泛空间上泛函延拓定理,引入了赋范线性空间的对偶空间(当时称为极空间);这个定理的推广形式后来在局部凸拓扑线性空间理论中起了重要作用。1931年,巴拿赫写成《线性算子理论》。至此,完备赋泛线性空间理论的独立体系已基本形成,并且在不到十年的时间内便发展成本身相当完整而又有多方面应用的理论。

希尔伯特空间(**Hilbert space**) n维欧几里得空间的推广,可视为"无限维欧几里得空间",是泛函分析的重要研究对象之一。

20世纪初,希尔伯特在研究积分方程的过程中,把一个函数看成是由它相应于某标准正交函数系的傅立叶系数给定的。他指出,一个函数的傅立叶系数应满足 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$。为此他引进满足 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ 的实数序列$\{x_n\}$,并规定两个序列之间的内积$(\{x_n\},\{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 这就是第一个具体的希尔伯特空间l^2。不久,德国数学家施密特、法国数学家弗雷歇等建立了一般希尔伯特空间的理论。1929—1932年,美国数学家冯诺伊曼为提供量子力学的严格的数学基础,正式引入并定名抽象的(即现在的)希尔伯特空间概念。这一理论已被广泛地应用于数学和物理的各个分支,如积分方程、微分方程、随机过程、函数论、调和分析,数学物理及量子物理学等,并取得了丰硕的成果。

谱论(**spectral theory**) 泛函分析中研究算子的谱的理论。算子的谱的概念是有限维矩阵的特征值概念的推广。

早在18世纪,人们已从数学的各个领域的经验中开始对算子有所认识,特别从种种方程的解具有叠加性中了解到许多重要运算,例如微分运算、积分运算等都具有线性。但作为谱论的直接源头是弗雷德霍姆理论。1900—1903年,瑞典数学家弗霍德霍姆研究了具有连续核的积分方程,得到了与有限阶线性方程组求解理论极其相似的结果。后来,匈牙利数学家里斯、波兰数学家绍德尔建立了巴拿赫全连续算子的弗雷德霍姆理论。1904—1906年,希尔伯特考察了具有对称核的积分方程。后来又出现了一般的有界自共轭算子的谱理论。20年代美国数学家冯・诺伊曼为适应量子力学的需要,发展了希尔伯特空间上(无界)自共轭算子的谱理论,得到酉算子和正常算子的谱分解定理。由于研究各种非交换的关系的需要,40年代以后对希尔伯特空间上各种非正常算子的研究也陆续开始,并取得了丰富的成果,已成为现代线性算子谱论的重要方面。另一方面,关于巴拿赫空间上算子的谱论,自从1913年里斯的研究以来,也取得了一系列的成果。

巴拿赫代数（**Banach algebra**） 泛函分析的新分支，研究带有乘法的巴拿赫空间的性质及其应用。

20 世纪 30 年代初，代数环论的重要进展以及它在群表示论上的应用，引起美国数学家冯·诺伊曼的兴趣，他于 1935 年开始研究希尔伯特空间上有界线性算子的弱闭子环，获得完整而深入的结果，后人称这种算子环为冯·诺伊曼代数。30 年代末 40 年代初，苏联数学家盖尔范德开创了巴拿赫代数方面的工作，将算子谱推广到巴拿赫代数中的元素。代数方法在泛函分析中的充分应用产生了这个新的分支，它不仅成为研究局部紧群理论的重要工具，而且在研究经典分析的某些课题中也取得了重要成果。

广义函数（**generalized function**） 古典函数概念的推广，是泛函分析中有着广泛应用的一个重要分支。

历史上第一个广义函数是由英国物理学家迪拉克引进的。他为叙述量子力学中某些量的关系而引进一种按通常函数概念所无法理解的奇特函数，被称为迪拉克-δ 函数。随着泛函分析的发展，在 1945 年法国数学家施瓦尔茨在前人工作的基础上，建立了广义函数的完整理论。紧接着，苏联数学家盖尔范德发展了广义函数理论及其在微分方程中的应用。此外，在广义函数理论形成和发展的过程中做出重要工作的还有法国数学家阿达马、苏联数学家索博列夫等。特别是后者，他在 1935 年给出偏微分方程广义解的概念和第一个广义函数的严格定义，对广义函数理论的建立有重要贡献。

广义函数理论现已发展成为泛函分析的重要分支，并被广泛应用于数学、物理、力学以及分析数学的其他分支。

变分法（**calculus of variations**） 研究泛函的极值的一门学科，其核心问题是求泛函的极值函数和相应的极值。

变分法的早期历史与微积分的发展交融在一起。数学史上第一个关于变分法的重要问题是由牛顿提出并解决的。在他的《自然哲学的数学原理》第二册中，研究了物体在水中的运动，考虑如何确定物体的几何形状，使它所受阻力最小。约翰·伯努利在 1696 年 6 月的《教师月报》上作为向数学界的挑战，提出了著名的最速降线问题：求从定点 A 到不在它垂直下方的点 B 的一条曲线，使一质点沿这曲线从 A 下滑至 B 所用时间最短。这个新颖的问题强烈地吸引了当时的数学家们。第二年，牛顿、莱布尼茨、洛必达、约翰·伯努利本人和他的哥哥雅各布·伯努利都解决了这个问题，雅各布从几何直观出发给出的证明更具一般性。17 世纪还提出了另一类重要问题，即等周问题：在给定周长的平面封闭曲线中选取围出最大面积的曲线。这类问题可追溯到古希腊时代，芝诺多罗斯研究过各种等周形问题，给出一些简单的命题。17 世纪提出了几种相当复杂的等周问题。

上述各种问题与普通的函数极

值问题不同，归纳起来，这些问题都可归结为求积分极值的问题，即需要求出一个未知函数 $y(x)$ ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$)，使 $J[y]=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx$ 达到最大或最小，而等周问题则需添加一个辅助条件。

欧拉从 1728 年开始从事变分法的研究，他首先推广了最速降线问题，然后寻找这类问题的更一般的解法。1736 年，他在研究积分 $J[y]$ 时，采用折线逼近曲线的方法，成功地证明了使 $J[y]$ 取极值的函数 $y(x)$ 必须满足方程

$$f_y-\frac{d}{dx}(f_{y'})=0 \qquad ①$$

这就是使泛函取极值的必要条件，也是变分法的基本微分方程。后来欧拉又改进了他的方法，对大量问题都导出了类似于①的微分方程，解决了许多泛函的极值问题。这些结果发表在他 1744 年的著作《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》中，这本书的出版标志着变分法作为一个新的数学分支的诞生。

欧拉的工作引起拉格朗日的注意。他在 1755 年的论著《确定不定积分公式的极大和极小的一个新方法》中使用纯分析的方法，建立了范围更广的一类问题的解法。其要点是：若函数 $y_0(x)$ 使泛函 $J[y]$ 取极值，则当给 $y_0(x)$ 以变分 η 时，泛函相应的变分 $J[y_0]\eta$ 应为零。他也建立了欧拉曾得到的方程①。拉格朗日在 1755 年 8 月给欧拉的一封信中讲了这个方法，他称之为变分方法(the method of variation)。欧拉在第二年的一篇论文中把拉格朗日的方法命名为变分法(the calculus of variation)，变分法的名称就由此得来。

当变分问题的解法不断取得进展的同时，物理学中的最小作用量原理又为变分法的发展提供了新的动力。最小作用量原理是法国科学家莫佩蒂在 1744 年提出来的，粗略地说，根据这个原理，自然界中的任何改变都是要使作用量最小。欧拉在同一年证明了这个原理对于单个质点在有心力场中的运动也成立。拉格朗日在欧拉工作的基础上，第一个把最小作用量原理用具体的形式表示出来，即对于单个质点而言，质量、速度和两个固定点之间距离的乘积的积分——$\int mv ds$—是一个极大值或极小值。他还引入了广义坐标，把最小作用量原理推广到具 n 个自由度的保守系统并给予严格证明，由此推出了动力学的主要定律(拉格朗日方程)，解决了一些新的问题。

哈密顿也把变分法应用于动力学。他在1834年提出了著名的"哈密顿原理"，根据这个原理，各种动力学定律都可以从一个变分式推出。他的工作推动了变分法的进一步发展。

事实上，欧拉和拉格朗日所建立的微分方程都是使泛函取极值的必要条件。勒让德试图建立泛函极值的充分条件，他在1786年通过研究二次变分给出了所谓"勒让德条件"，第二年他意识到这个条件也是必要的。在他之后的50年内，数学家们继续探讨一次变分和二次变分。1837年，雅可比通过强化勒让德条

件而建立了泛函极值的充分条件。

外尔斯特拉斯也从事变分法的研究，他认为欧拉、拉格朗日、雅可比建立的判定极值存在的准则都是有局限的，由此引出弱变分和强变分的研究。1900年，希尔伯特提出了他的不变积分理论，简化了外尔斯特拉斯的工作，并导出了外尔斯特拉斯关于强变分的充分性条件。

20世纪以来，物理、几何和分析等领域提出的变分问题，一般不仅要研究泛函的极值点，而且还要研究其临界点，即其变分为零的点，由此产生了变分法的莫尔斯理论（见大范围变分法）。

大范围变分法（**calculus of variations in the large**） 用拓扑方法研究变分问题的数学分支。古典的变分法研究泛函的极值，而物理、几何及分析中提出的变分问题，一般不仅要研究泛函的极值点，而且还要研究其临界点，即其变分为零的点。大范围变分法就是研究临界点的理论。

20世纪30年代，美国数学家莫尔斯考察了非退化函数临界点的性态与紧流形拓扑结构间的关系，创立了变分问题的莫尔斯理论。苏联数学家柳斯捷尔尼克和施尼雷尔曼基于类似思想，开辟了另一条研究临界点的途径。柳斯捷尔尼克-施尼雷尔曼理论比莫尔斯理论的适用范围更广。这两种理论都被成功地应用到各种变分问题中去。后来，人们又改进了他们的工作，使大范围变分法有了更广泛的应用。

函数逼近论（**approximation of functions**） 函数论的一个重要组成部分。基本内容是函数的近似表示问题。

在数学的理论研究和实际应用中经常遇到下类问题：在选定的一类函数中寻找某个函数 g，使它是已知函数 f 在一定意义下的近似表示，并求出用 g 近似表示 f 而产生的误差。这就是函数逼近问题。

利用插值方法来构造多项式的作法在数学中已有相当久的历史。17世纪末到18世纪初，英国数学家格雷戈里和牛顿建立的著名的插值公式，就是用多项式逼近已知函数，在此基础上发展起来的泰勒多项式也是一种插值多项式。18世纪以后，陆续有一些数学家，如欧拉、拉普拉斯、傅立叶和彭赛列等都考虑过一些函数的最佳逼近问题。

1859年，俄国数学家切比雪夫研究机械原理，阐明了杠杆铰链连结原理的优越性和把曲线运动分解为直线运动的机械原理，由此阐发用多项式逼近连续函数的思想，创立了函数逼近理论。他对这个问题的最简单的提法是：已知区间$[a,b]$上的连续函数 $f(x)$，可以求得一个 n 次多项式 $P(x)$，使

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)|$$

足够小。由此引进切比雪夫多项式的概念。他还研究了二次逼近以及用三角函数和有理函数逼近连续函数等问题。1885年，德国数学家外尔斯特拉斯证明了用多项式一致逼近连续函数的著名定理，这条定理在原则上肯定了任何连续函数都可以用多项式以预先给定的任何精确程度在函数的定义区间上一致地近似表示。他和切比雪夫的工作奠定了

函数逼近论的基础，他们提出的最佳逼近和一致最佳逼近的概念已经得到广泛系统的应用。

20世纪以来，函数逼近论在许多方面，如最佳逼近的定量理论、逼近论的定性理论、线性算子的逼近理论、函数逼近的数值方法、多元函数的逼近等方面取得了很大发展。俄国的以及现在苏联的逼近论学派在函数逼近论的历史上起了主导作用。苏联数学家伯恩斯坦、柯尔莫戈罗夫、拉夫连季耶夫和他们的学生们对此作出了重大贡献。

函数逼近论现已成为函数理论中最活跃的分支之一。科学技术的发展和电子计算机的广泛使用极大地推动了函数逼近论的发展。现代数学的许多分支，包括基础数学和应用数学的许多分支都与逼近论有各种各样的联系。函数逼近论已发展成与许多数学分支相互交叉的密切联系实际的并具有一定综合特色的分支学科。

傅立叶分析（**Fourier analysis**） 又称调和分析，18世纪以后分析学中逐渐形成的一个重要分支。主要研究函数的傅立叶级数，傅立叶变换及其性质。形如

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad ①$$

的级数，称为三角级数。其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 和 $b_n(n=1,2,\cdots)$ 是与 x 无关的实数，特别当①中的系数 a_n，b_n 可通过某个函数 $f(x)$ 用下列公式表示时，级数①称为 f 的傅立叶级数：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx \quad ② \quad (n=1,2,\cdots)。$$

式中 f 是周期 2π 的可积函数。18世纪中叶以来，欧拉、达朗贝尔和拉格朗日等人在研究天文学和物理学中的问题时，相继得到了某些函数的三角级数表达式。人们逐渐意识到一个非周期函数可以表成三角级数的形式，并开始寻求如何把所有类型的函数都表示成三角级数的方法。但在当时占主导地位的思想认为并非任意的函数都可以用三角级数表示。到了19世纪，法国数学家傅立叶由于当时工业上处理金属的需要，从事热流动的研究。1807年，他向法国科学院呈交了一篇关于热传导问题的论文，提出了任意周期函数都可以用三角级数表示的想法，成为傅立叶分析的起源。傅立叶在他的经典著作《热的分析理论》(1822)中系统地研究了函数的三角级数表示问题，并断言“任意(实际上有一定条件)函数都可展成三角函数”，他列举了大量函数并运用图形来说明函数的这种级数表示的普遍性。他还首先认为，如果 $f(x)$ 是一个以 2π 为周期的函数，通过②可以得到一系列的 a_n，b_n，由此构造出的三角级数①就表示 $f(x)$。级数①后来就被称为傅立叶级数。

傅立叶分析从诞生之日起，就围绕着“f 的傅立叶级数是否收敛于 f 自身”这个中心问题进行研究。傅立叶提出这个问题时并没有进行严格的数学论证。德国数学家狄利克雷第一个给出 $f(x)$ 的傅立叶级

数收敛于它自身的充分条件。他证明了，在一个周期上分段单调的周期函数 f 的傅立叶级数，在它的连续点上必收敛于 $f(x)$；如果 f 在 x 点不连续，则级数的和是 $(f_{(x+0)}+f_{(x-0)})/2$。顺便指出，狄利克雷正是在研究傅立叶级数收敛问题的过程中，才提出了函数的正确概念。

黎曼对傅立叶级数的研究也作出了贡献。他在题为《用三角级数来表示函数》(1854)的论文中，为了使更广一类函数可以用傅立叶级数来表示，第一次明确地引进并研究了现在称之为黎曼积分的概念及其性质，使得积分这个分析学中的重要概念，有了坚实的理论基础。他证明了，如果周期函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有界且可积，则当 n 趋于无穷时 f 的傅立叶系数趋于0。此外，黎曼还建立了重要的局部性原理，即有界可积函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在一点处的收敛性，仅仅依赖于 f 在该点近旁的性质。

当英国数学家斯托克斯和德国数学家塞德尔建立了函数项级数一致收敛性的概念之后，傅立叶级数的收敛问题进一步引起人们的重视。德国数学家海涅在1870年指出，有界函数 $f(x)$ 可以唯一地表示为三角级数这一结论，通常采用的论证方法是不完备的，因为傅立叶级数未必一致收敛，从而无法保证逐项积分的合理性。德国数学家 G·康托尔研究了函数用三角级数表示是否唯一的问题。这个问题的研究又促进了对各种点集结构的探讨，最终导致康托集合论的创立。

20世纪以来，傅立叶分析又获得了新的发展。德国数学家勒贝格所建立的勒贝格积分和勒贝格测度概念对傅立叶分析的研究产生了深远影响。1904年，匈牙利数学家费耶尔提出的所谓费耶尔求和法成功地用傅立叶级数表达连续函数，这是傅立叶级数理论的一个重要进展。与此同时，傅立叶级数几乎处处收敛的问题，引起人们的重视，特别是围绕着所谓卢津猜想，出现了一些精美的工作（见卢津猜想）。

在20世纪前半叶，复变函数论方法已成为研究傅立叶级数的一个重要工具。通过傅立叶级数来刻画函数类已是傅立叶分析的重要课题。傅立叶分析的研究领域从直线群、圆周群扩展到一般的抽象群。傅立叶分析作为数学的一个分支，无论在概念或方法上都广泛地影响着数学其他分支的发展。

傅立叶变换（**Fourier transform**） 一种积分变换，来源于函数的傅立叶积分表示。积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)dt$$

称为 f 的傅立叶积分，其复数形式为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{iux}du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt。$$

上式的内层积分，记为

$$F(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-eut}dt,$$

称为 f 的傅立叶变换。

傅立叶积分方法是在19世纪为寻求偏微分方程的封闭形式的解，由法国数学家傅立叶、柯西和泊松分别发现的。傅立叶在他1811年关

于热传导的论文(此文获巴黎科学院奖金)中,讨论在无穷区域内热的传导问题,导出了傅立叶积分。柯西在《波的传播理论》(获巴黎科学院1816年奖金)一文中,对流体表面上的波动进行研究,不但得到了傅立叶积分,还建立了从 $f(t)$ 到 $F(u)$ 的傅立叶变换及其逆变换。泊松是在他的专著《关于波的理论报告》(1816)中,用与柯西大致相同的方式导出傅立叶积分的。

傅立叶积分(**Fourier integral**) 见傅立叶变换。

非标准分析(**non-standard analysis**) 美国数学家鲁宾逊于1960年所开创的一门新兴的数学学科。

在17世纪微积分的初创时期,人们就开始注意这门学科的基础问题。牛顿和莱布尼茨都曾使用过无穷小。特别是莱布尼茨及其追随者,他们完全引进无穷小和无穷大,把它们视作类似于虚数的元素来处理。但他们所建立的微积分理论存在着明显的内在矛盾——时而把无穷小视为非零而用作除数,时而把它视为零而舍弃。因此受到非难与攻击。在19世纪,以极限理论为基础建立了逻辑上严谨的微积分学。此后,无穷大和无穷小在微积分中已经没有重要地位,数学家们通常不承认无穷小和无穷大是某种数,而把它们视为变化的趋势。直到本世纪60年代,美国鲁宾逊运用现代数理逻辑的概念和方法,把“无穷小”和“无穷大”作为“数”引入实数结构,用模型论的方法建立了包括经典数学分析(也称标准分析)在内的非标准分析。鲁宾逊于1966年出版了专著《非标准分析》(1974年修订版,中译本1980年出版)。此后,非标准分析发展很快,现在已成功地应用于许多方面,如点集、拓扑学、测度论、函数空间、概率论、微分方程、代数数论,流体力学、量子力学、理论物理和数理经济等。例如,中国数学家用非标准分析方法给出了解决广义函数乘法问题的一个富有成效的方法。

微分方程(**differential equation**) 常微分方程与偏微分方程的总称。含自变量、未知函数和它的微商(或偏导数)的方程称为微分方程。微分方程是数学的重要分支之一。它几乎与微积分同时产生,并随实际需要而发展。

微分方程的出现,可以追溯到16与17世纪分野时期。在科学家创立对数的时候,第一次遇到本质上属于微分方程的问题。纳皮尔考虑了两个相关的连续直线运动,他的工作实质上相当于建立了微分方程:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{10^7}{x}$$

的近似积分法。与此同时,伽利略所研究的自由落体运动,光的折射定律的发现以及笛卡儿提出并解决的“切线的反问题”等都包含着某种形式的微分方程问题。

从牛顿和莱布尼茨创立微积分到18世纪末是微分方程发展的第一个阶段。

牛顿和莱布尼茨在建立微分与积分运算时,指出了它们的互逆性,实际上是解决了最简单的微分方程

$y=f'(x)$的求解问题。围绕某些质点动力学和刚体动力学的问题以及某些几何问题的研究，用微积分的方法很快就可以化为一阶或二阶常微分方程中的一些最简单的方程。

在18世纪前半叶，常微分方程不只是研究力学的基本工具，而且也是研究微分几何和变分法的基本工具。18世纪中叶，由于数学物理中的问题，首先是关于弦振动的问题，开始了偏微分方程的研究。而在18世纪后半叶这种方程被推广到二维和三维的情形。在对位势理论的研究中又出现了调和方程。

在整个18世纪，对于各种具体的微分方程，已取得一定的成就：建立了一些特殊的积分法，把解化为初等函数及其积分表达式的方法，以及用近似积分法来求解。

到18世纪末期，微分方程论已发展成为一门极重要的数学学科，并且成为研究自然科学的有效工具。可用初等积分法求解的常微分方程的基本类型已经研究清楚；建立了几种系统的近似解法；引入了一系列基本概念，如微分方程的奇解、通解、全积分、通积分、特积分等；偏微分方程几何理论的基础已经奠定；二阶偏微分方程的一些经典类型也已确立等。

在这一时期，微分方程与变分法及微分几何的关系更加密切，并且应用到复变函数、三角级数、特殊函数与椭圆积分等许多领域。

到了19世纪，微分方程在数学分析的新概念和新方法的影响下进入了新的发展阶段。

首先提出来的是解的存在问题。柯西的工作改变了18世纪人们相信微分方程的通解必定存在的观念。他提出了常微分方程中第一个定解问题（又称初值问题），后称为“柯西问题”，并给出该问题解的存在性与唯一性的证明。后来德国数学家李普希茨和法国数学家皮卡等改进了他的工作。

柯西还把存在性定理推广到高阶方程和一阶偏微分方程组在复数域的初值问题，俄国女数学家柯瓦列夫斯卡娅在这方面也有重要工作，因此这个存在性定理现在通称为柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理。

这些定理奠定了各种近似解法的基础，在整个19世纪都研究这些解法。微分方程的奇解理论也在19世纪得到发展。

19世纪上半叶，人们逐渐发现能用初等积分法求解的微分方程十分有限。与代数学中提出的方程根式可解性问题相似，在微分方程中也提出了用初等积分法求解可能性的问题。法国数学家刘维尔证明里卡蒂方程一般不能通过初等积分来求解的事实改变了人们以往的看法。

与此同时，二阶偏微分方程理论得到进一步发展，并且与数学物理、弹性理论、复变函数、三角级数和变分法密切相关。到19世纪前半叶已经取得了许多重要成果。特别是对热传导方程的研究所引出的函数用三角级数表示的问题对实变函数论和积分理论的发展都有重要意义。

在19世纪后半叶和20世纪初期，常微分方程理论中又出现了两

个新的方向。一是常微分方程变换群理论的产生，二是常微分方程定性理论的建立。19世纪70年代，挪威数学家李把变换群理论应用于常微分方程理论的研究，并用这种方法把微分方程进行分类，建立解常微分方程的方法。与此同时，由于对天体力学及天文学中某些问题的研究，需要考虑由微分方程所确定的函数，在整体范围内的性质，法国数学家庞加莱和俄国数学家利亚普诺夫建立了常微分方程的定性理论。后来他们又研究了运动稳定性的一般问题。

20世纪以来，由于众多的边缘学科的产生和发展，微分方程的理论更加深入，应用范围更加广大。

在中国，新中国成立以来，微分方程的研究得到重视和发展。在全国各地都培养了一批优秀的微分方程工作者，在常微分方程和偏微分方程的许多研究方向上都做出了大量有水平的工作。

常微分方程(ordinary differential equation) 分析数学的重要分支之一。包括一个自变量和它的未知函数以及未知函数的微商的等式叫常微分方程。常微分方程研究的内容包括解的基本性质(如存在性、唯一性等)，解的解析表达式或近似的解析表达式，解的定性性质(如运动稳定性、周期解的存在性等)以及解的数值解法。

常微分方程的发展历史大体可分为四个阶段：18世纪及其以前；19世纪初期和中期；19世纪末期及20世纪初期；20世纪中期以后。

18世纪及其以前是常微分方程产生和发展的第一个阶段。伽利略在研究自由落体运动时，发现物体的加速度 $\ddot{x}(t)$ 是常数，作为微分方程 $\ddot{x}(t)=g$ 的解而得到物体的运动规律 $x(t)=\frac{1}{2}gt^2$，这是常微分方程的第一个例子，同时也是开创微积分学的先驱性工作。质点运动学是这个阶段研究的问题的主要来源之一。例如牛顿建立了太阳系行星运动方程

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2}=-GM\frac{R(t)}{|R(t)|^3},$$

并求出其通解的显式解析表达式。

这一阶段的主要特征是寻求常微分方程的通解。主要成果有：莱布尼茨(1693)给出齐次方程和线性方程的通解；伯努利兄弟和莱布尼茨用同样方法(利用变换 $u=y^{1-n}$ 化为线性方程)解出了雅各布·伯努利所提出来的微分方程：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n。$$

顺便指出，莱布尼茨在1676年给牛顿的信中，第一次使用了"微分方程"这一名词，1684年以后开始在杂志上使用。对某些方程，约翰·伯努利还使用了积分因子方法，特别在1700年，他指出用形如 x^p 的因子可以逐次降低线性方程

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_ny=0$$

的阶数。1740年，欧拉用代换 $x=e^t$ 求得这个方程的通解，后来这个方程被称为欧拉方程。在1743年的论文中，欧拉还给出了任何阶常系数线性齐次方程的古典解法，他在这篇文章中，最早引入"通解"和"特

解”的名词。

但是，求常微分方程显式通解的可能性十分有限，上述努力经过一段时间后便停滞下来。当时的许多实际问题只能用数值方法求近似解，欧拉折线法便是这方面工作的开端。

19世纪初期和中期是数学发展史上的一个转折时期，分析基础的重建、复变函数、群论和非欧几何的创立都在这一时期。这些新概念和新方法极大地影响了常微分方程的发展。在这种形势下，常微分方程的发展进入了第二个阶段。

在这一阶段，柯西首先指出，必须改变先求通解后求特解的次序，在1820—1830年的讲义中，他给出了一阶常微分方程 $y'=f(x,y)$ 在原始条件 $x=x_0,y=y_0$ 以及在 $f(x,y)$ 连续的区域内解的存在性与唯一性的证明。由此引起了著名的“柯西问题”（又称初值问题）的研究。柯西还创造性地把常微分方程的研究由实数域扩展到复数域。

1841年，法国数学家刘维尔证明了形式上很简单的里卡蒂方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+q(x)y+r(x)$$

一般不能通过初等积分法来求解，这一事实迫使数学家们放弃将主要注意力放在寻求各种微分方程通解的想法。虽然在这个时期又补充了一些可用初等积分法解出的方程类型，但微分方程研究的主要目标和主要方法从此开始转移。

围绕着“柯西问题”出现了许多工作。德国数学家李普希茨（1869—1876）改进了柯西的存在性与唯一性的证明，提出了更广泛适用的“李普希茨条件”。意大利数学家皮亚诺、法国数学家皮卡等也对这个问题进行了研究。

1874年，挪威数学家李将群的概念应用于常微分方程，引入了将常微分方程的解变为解的连续变换群的概念。当连续变换群已知时，常微分方程的积分因子即可显式地写出，从而解决了解的可积性问题。

19世纪末和20世纪初是常微分方程发展的第三个阶段，主要在以下三个方面有重大发展。首先是关于常微分方程的解析理论的研究（见常微分方程解析理论），其次是常微分方程实域定性理论的创立（见常微分方程定性理论），第三是常微分方程摄动理论即小参数理论的建立。

从20世纪中期起，常微分方程的发展既深又广，进入了一个新的阶段，有以下几方面的工作。

由于工程技术的需要而产生了新型问题和新的分支。例如工程控制论中火箭发动机中燃烧过程由于时滞现象而产生的带有时滞的常微分方程或称微分差分方程，以及更广义的泛函微分方程。又如由于空气中的湍流对飞机运动的影响，使微分方程中带有随机摄动项，这类问题产生了随机微分方程。

由于应用问题的需要而产生了一些近似的解析形式的解的求法。

电子计算机的出现与发展推动了常微分方程的研究，并取得一系列成果。起初，常微分方程由于解析解难求而转向定性研究，当定性研究也困难时，又转而用计算机“强

攻”,得出一定的数值模似结果后,反过来为定性研究提供了感性的新信息。这方面的研究正在兴起。

常微分方程理论本身向高维数、抽象化的方向发展。例如从普通空间常微分方程向抽象空间常微分方程发展,从具体动力系统向抽象动力系统的发展,从实域定性理论向复域定性理论的发展等等。

一阶常微分方程(**ordinary differential equation of the first order**) 未知函数的微商的最高阶数是一的常微分方程。

在微积分创立的初期,围绕着动力学和几何学的问题就解出了一些最简单的一阶方程。例如关于求等时问题的解,求悬链线、跟踪曲线的方程等。

莱布尼茨最早用变量分离法解一阶方程(1691),他把形如 $y\frac{dx}{dy}=f(x)g(y)$ 的方程写成 $dx/f(x)=g(y)dy/y$,然后在两边进行积分。他还对一阶齐次方程 $y'=f(y/x)$ 用变换 $y=vx$ 使其变量可以分离。1694年约翰·伯努利对莱布尼茨的工作做了系统的整理。不久,莱布尼茨又给出了一阶线性方程的初等积分法。

雅各布·伯努利在1695年提出求解现称为伯努利方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$ 的问题,在第二年莱布尼茨就给出了变量替换 $z=y^{1-n}$,把该方程化为线性方程。

18世纪上半叶,人们开始认识一阶恰当方程,即方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$的左端是某个函数 $z=f(x,y)$的恰当微分。克莱罗和欧拉分别独立地给出方程是恰当的条件,并指出恰当方程是可积分的。欧拉在1734—1735年的论文中给出当一阶方程不是恰当方程时,求方程的积分因子的方法。克莱罗在1739年独立地引进积分因子的概念,并建立相应的理论。至此,求解一阶方程的所有初等方法都已清楚。

二阶常微分方程(**ordinary differential equation of the second order**) 未知函数的微商的最高阶数是二的常微分方程。

早在17世纪上半叶,伽利略所研究的自由落体运动就导致一个二阶常微分方程 $\ddot{x}(t)=g$,到17世纪末,在许多物理问题的研究中都出现了二阶方程,例如,为研究质点在不同外界条件下作直线运动的问题,牛顿解出了下列两个二阶方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$$

和

$$\frac{d^2x}{dt^2}=m\pm n(\frac{dx}{dt})^2。$$

雅各布·伯努利研究(1691)膜盖问题,引出二阶方程 $\frac{d^2x}{ds^2}=(dy/ds)^3$(其中 s 为弧长)。18世纪初,泰勒在求一根伸张的振动弦的基频时,解出了方程 $a^2\ddot{x}(t)=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,y\dot{y}(t)$,并且指出,在任何时刻弦的形状必定是正弦曲线。约翰·伯努利解出简谐运动方程 $d^2x/dt^2=-kx$,等等。

1728年,欧拉开始了二阶方程的系统研究,他引用的指数函数法对求解二阶与高阶方程有特别重要的作用。在1743年的工作中,欧拉用

代换 $y=e^{kx}$ 给出任何阶常系数齐线性方程的古典解法，对于二阶的情况，问题归结为解方程

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\beta^2u=0。$$

欧拉得到两种不同形式的特解 $2\cos x$ 和 $e^{ix}+e^{-ix}$，他用展成级数的办法证明它们恒等，从而发现了著名的欧拉公式。

丹尼尔·伯努利也是在18世纪上半叶，在研究振动悬链线问题时，导出了微分方程

$$\alpha\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx})+y=0,$$

并求出它的一个无穷级数形式的解，后来这个解称为第一类贝塞尔函数。欧拉紧接着对丹尼尔的工作进行补充研究，给出了一个二阶方程用积分表示的解。

在早期的研究中，还出现了一些有特殊意义的二阶方程，例如伯努利方程和里卡蒂方程等。

19世纪上半叶，瑞士数学家斯图姆和法国数学家刘维尔开始研究二阶常微分方程的一般问题。他们考虑二阶方程

$$Ly''+My'+\lambda Ny=0、$$

其中 L、M、N 是 x 的连续函数，λ 为参数，建立了著名的斯图姆-刘维尔理论。刘维尔还给出了二阶齐次线性方程解的零点分布的重要定理。

19世纪以后，由于处理更为复杂的物理现象，以及求解偏微分方程的努力，导致了一些特殊的二阶常微分方程.如贝塞尔方程、勒让德方程、富克斯方程、班勒卫方程等。由于许多方程不能求出封闭形式的解，所以人们采用无穷级数解，于是产生了各种类型的特殊函数。

里卡蒂方程（Riccati equation）

形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+q(x)y+r(x)$$

的方程称为里卡蒂方程，它在常微分方程的早期历史中引起很大的注意。意大利数学家里卡蒂在1724年给出了它的特殊形式，后来引起许多学者的研究，如伯努利家族，欧拉和达朗贝尔等。对这类方程的研究不仅有助于求解二阶方程，而且提供了降低常微分方程阶数的方法，这将是处理高阶方程的主要方法。达朗贝尔在1763年给出了它的一般形式，并首先称之为“里卡蒂方程”。1841年，法国数学家刘维尔证明了里卡蒂方程一般不能通过初等积分法求解，他的工作使常微分方程的研究方向开始转移。

常微分方程解析理论（analytic theory of ordinary differential equation） 复数域上的常微分方程理论。即应用复变函数论研究微分方程的性状，以及把微分方程的解视为由方程定义的解析函数，并直接从微分方程本身研究解的性质的理论。它与复变函数论的发展密切相关。19世纪上半叶，柯西在建立微分方程解的存在性定理时，把它应用到复数域。对于方程 $\frac{dw}{dz}=f(z,w)$，在右端 $f(z,w)$ 于 (z_0,w_0) 的某个邻域内解析的条件下，证明了解（解析函数）存在且唯一。在柯西之后，数学家们转向了大范围的研究。法国数学家布里奥和布凯

合作，继续了柯西的工作，他们简化了微分方程解的存在性的控制函数方法，开创了奇点问题的研究，建立了椭圆函数的一般理论。之后，德国数学家富克斯和黎曼建立了关于线性方程的解析理论。在这些工作的基础上，富克斯和庞加莱又建立了一阶非线性方程的理论。在研究二阶线性微分方程时。庞加莱和克莱因得到了比椭圆函数更为普遍的自守函数类，并建立了相关的理论。19世纪末，法国数学家班勒卫研究形如 $w''=f(z,w,w')$ 的方程的解，引出新的超越函数被称为班勒卫函数。20世纪以后，人们把奈望林纳创立的亚纯函数值分布理论应用于常微分方程解的某些大范围性质的研究，取得很好成果。

常微分方程变换群理论(**transformation group theory in ordinary differential equation**) 研究将常微分方程的解仍变为解的变换所组成的群的理论。由德国数学家李在19世纪开创。1874年，他在研究微分方程解的分类时，引入了一般的连续变换群，并用这种理论建立了解常微分方程的方法。当连续变换群已知时，常微分方程的积分因子即可显式地写出，从而解决了解的可积性问题。另一方面，李与法国数学家皮卡等将变换群理论应用于线性变系数齐次方程，得到与伽罗瓦理论完全平行的结论，因而从另一个角度证明了 n 阶线性变系数方程一般是不能用初等积分法求解的。20世纪以来，用变换群理论求解常微分方程的方法又有许多新的应用。

常微分方程定性理论(**qualitative theory of ordinary differential equation**) 通过微分方程右侧函数的性质来研究其解的性态的理论。

在19世纪下半叶，人们已经普遍认识到，只有极少数的常微分方程可以用初等积分法来求解。因此在这个方向上的探讨已经没有什么价值，同时，以存在定理为基础的方程的数值解法也已经发展起来，不再成为人们关心的焦点。而当时工程、物理，特别是天体力学等方面所产生的一些问题，需要研究由微分方程所确定的函数，在其整体存在范围内的性质，因此人们试图寻找通过考察微分方程本身就可以了解解的性态的方法。常微分方程定性理论就是在这种形势下产生的。

常微分方程的定性理论是由法国数学家庞加莱和俄国数学家李亚普诺夫共同开创的。1878年以后，庞加莱研究了方程 $y'=f(x,y)$ 或方程组 $\frac{dx}{dt}=\varphi_1(x,y)$，$\frac{dy}{dt}=\varphi_2(x,y)$ 的右端函数的性质，并由此来考察方程的积分曲线族的性态。他引进了微分方程的奇点的概念，并对奇点进行分类、研究奇点邻域内解的性态，还引入了极限环的概念等。庞加莱的研究方法从本质上具有拓扑性质，对拓扑学的发展起到推动作用。其《关于由微分方程确定的曲线》(1881—1886)是定性理论中的经典著作。李亚普诺夫从1882年开始研究定性理论，最初是结合着天文学中的具体问题，很快转向由有限个参数所确定的动力系统的运动和平

衡的稳定性问题(见常微分方程运动稳定性理论)的研究。他的博士论文《运动稳定性的一般问题》(1892)也是定性理论的代表作。在以后的一个时期,除美国数学家伯克霍夫继承并发展了庞加莱的工作提练出"动力系统"的理论外,定性理论的研究一度比较沉寂。从20世纪30年代起,定性理论的发展又进入一个新的阶段。

常微分方程运动稳定性理论(**stability theory of motion in ordinary differential equation**) 常微分方程动力系统的运动稳定性理论,它是研究扰动性因素对运动系统的影响。这一理论由俄国数学家李亚普诺夫在19世纪90年代所开创,他在1892年的著名论文《运动稳定性的一般问题》中,建立了解决上述问题的普遍方法。他首先给出关于常微分方程解的稳定性的定义,通常称为李亚普诺夫意义下的稳定性。然后建立两种解决问题的方法,分别称为李亚普诺夫第一方法和第二方法。至于第一方法,后来很少发展。而第二方法,又称直接方法,已得到了很大发展。第二方法意在寻求所谓李亚普诺夫函数,以判断解的稳定性。

运动稳定性理论不仅在许多自然科学和工程技术领域得到广泛深刻的应用,而且还成为常微分方程学科本身许多理论课题研究的有力工具。

泛函微分方程(**functional differential equation**) 泛函微分方程是带有各种滞后量的微分方程(微分差分方程)、各种具有复杂变元的微分方程、带有滞后量的积分微分方程等一类方程的概括和抽象。

早在1750年欧拉所提出来的"求一曲线使之与其渐缩线相似"问题就属于最早的泛函微分方程问题,所求的曲线就满足一个特殊的泛函微分方程。以后在各个学科中不断地提出相类似的问题,因此对泛函微分方程的研究具有重要的实际意义。20世纪40年代以前,人们围绕微分差分方程的解析解开展了许多工作。50年代以后,转向稳定性理论的研究。苏联数学家克拉索夫斯基和日本数学家加藤敏夫等在这方面都有重要贡献。

动力系统(**dynamic system**) 粗略地说,如果自然界中一些随时间演变的体系,其各种状态 x 所构成的集合 X 有与时间 t 相关的动态规律 $\Phi_t(x)(-\infty<t<+\infty)$,并且 $\Phi_t(x)$满足一定的简单自然条件,则构成一动力系统。如果 $\Phi_t(x)$对 t 可微,则得一常微分方程组。动力系统主要研究抽象系统的整体性质,它是经典常微分方程理论的发展。

对动力系统的研究开始于19世纪末,1881年以后,法国数学家庞加莱开始的常微分方程定性理论的研究就可以看作是动力系统的创始。后来有许多学者,特别是美国数学家伯克霍夫(1912年以后)从事动力系统一般定性理论的研究,他分别从整体区域和奇点附近两个方面进行研究,证明了三体问题中的几何定理,推进了冯·诺伊曼的工作,得到强形式的遍历性定理。1931年以后,苏联数学家马尔可夫总结了伯

克霍夫的理论，正式提出动力系统的抽象概念。在以后的若干年里，苏联学者对动力系统理论的发展做出了贡献，例如，柯尔莫哥洛夫和阿诺尔德等建立了关于哈密顿系统方程组解的稳定性理论。

20世纪60年代以后，动力系统的研究又发生了质的变化。美国数学家斯梅尔在苏联动力系统学派的影响下，开始了现代抽象动力系统的研究，他在1966年国际数学家大会上作的《微分动力系统》报告标志着现代微分动力系统这个新兴理论分支的诞生。

偏微分方程(**partial differential equation**)　分析数学的重要分支之一。包含未知函数及其偏导数的等式叫偏微分方程。偏微分方程理论研究一个方程(组)是否有满足某些补充条件的解，有多少个解，解的各种性质及解的求法等。

微积分理论形成后不久，在18世纪初，人们就结合各种物理问题研究偏微分方程。最早引起数学家兴趣的是关于弦的振动问题。英国数学家泰勒在1713—1715年就导出了一根张紧的振动弦的基频。法国数学家达朗贝尔在1747年建立了第一个弦振动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

并且得到形如两个任意函数之和的解

$$y(t,x)=\frac{1}{2}\varphi(at+x)+\frac{1}{2}\psi(at-x)。$$

丹尼尔·伯努利和欧拉等人研究了这个方程的解，并且比达朗贝尔更完整地考虑了解的边界条件和初始条件。围绕着解用三角级数表示等问题在18世纪下半叶引起了一场激烈的争论。

1759年，欧拉考虑矩形鼓和球面波的振动，建立了二维和三维的波动方程。由于对万有引力的研究，出现了所谓的位势方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0。$$

它首次出现在欧拉1752年的论文中。拉格朗日和勒让德，特别是后者对这个方程的解进行了深入研究，由此引出所谓的勒让德多项式。后来由于拉普拉斯的出色工作而又称这种方程为拉普拉斯方程。

一阶偏微分方程首先出现在几何问题和流体力学问题的研究中(1740年以后)，蒙日给出一阶偏微分方程一般理论的几何解释。在流体动力学中还出现了第一个偏微分方程组。19世纪初期，柯西和拉格朗日等解决了一阶偏微分方程的求解问题，其基本方法是化为求解一阶常微分方程组。

在整个18世纪，对偏微分方程的研究都是处于不自觉的状态。人们认识到解偏微分方程不需要什么新的特殊技巧，它与常微分方程的不同之处在于解中可以出现任意函数。在这一时期，通常认为把它们化为常微分方程后便可求解，对偏微分方程理论的探讨还有待深入。

到了19世纪，随着物理科学所研究的现象在广度和深度两方面的扩展，偏微分方程逐渐成为数学研究的中心。不仅出现了一些新的类型，而且已有类型的应用范围也不断扩大。

1822年,法国数学家傅立叶在研究热传导规律时,发现了(三维)热传导方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t}。$$

为在各种边界条件下积分热传导方程,傅立叶首先系统地用三角级数的形式表示未知解,由此引起对傅立叶级数的研究。

1839年,德国数学家杜布瓦-雷蒙引入了偏微分方程的标准分类法,他分别称上述波动方程、位势方程和热传导方程为双曲型的、椭圆型的和抛物型的。至此,人们逐渐弄清了二阶线性偏微分方程的重要类型。

二阶以上的偏微分方程,很难化成常微分方程求解。求方程满足某种特定条件的解叫定解问题。由于偏微分方程都有很强的实际背景。因此定解问题的提法也比较多。例如对于热传导方程,主要研究柯西问题;对于波动方程,研究最多的也是柯西问题和初边值问题;对于位势方程,则研究两种边值问题,第一边值问题称为狄利克雷问题,第二边值问题称为诺伊曼问题。

对于上述种种定解问题,到19世纪末,已有许多解法。但定解问题的系统理论到20世纪才趋于成熟。法国数学家阿达马在20世纪初建立了偏微分方程定解问题适定性的概念。根据他的观点,如果定解问题的解存在、唯一并且连续依赖于定解条件,那么就称之为适定的。阿达马被誉为二阶线性偏微分方程的总结者,他不仅对定解问题作出贡献,而且根据二阶方程的特征表达式对方程进行分类,为了研究不同类型方程的共性,他还提出一般方程基本解的概念,为偏微分方程理论的建立奠定了基础。

19世纪末,人们开始在解析函数范围内研究偏微分方程。柯西研究了满足某种初始条件的偏微分方程组,建立了著名的柯西存在性定理,他的工作后来被俄国女数学家柯瓦列夫斯卡娅独立完成并推广。对于解析函数领域中的偏微分方程,人们还得到其他比较一般的结果。

在特殊类型的二阶方程得到充分的研究之后,数学家们转向一般的二阶方程,陆续得到一些结果。20世纪30年代以来,各种泛函分析方法被应用于偏微分方程的研究,不仅可以讨论二阶方程,而且发展了高阶方程的理论,并在一般的一阶方程组中也得到许多成果。偏微分方程理论发生了很大的变化。

20世纪40—50年代,人们逐渐认识到绝大多数的偏微分方程(组)无法按经典的分类进行研究,因此需要建立尽可能普遍适用的理论或给出新的分类法。瑞典数学家赫尔曼德、美国数学家卢伊等在这方面都有重要工作。

对于变系数线性方程和非线性方程的研究,在60年代以后获得了许多进展,不断发展出一些独特的数学方法。微分算子的概念有很多扩充,出现了拟微分算子和傅立叶积分算子等工具。在非线性问题的研究中,除不动点方法外,拓扑度方法和变分法都是十分有效的工具。

一阶偏微分方程(first order

partial differential equation） 因为物理问题直接导致二阶偏微分方程，所以直到18世纪下半叶对一阶偏微分方程还很少系统的研究，只有法国数学家克莱罗和达朗贝尔给出了全微分方程 $Pdx+Qdy+Rdz=0$ 可积分的必要条件。

拉格朗日在18世纪70年代建立了一般的两个自变量的一阶偏微分方程

$$f(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})=0 \qquad ①$$

的理论。他首先给出非线性一阶方程的理论。在确定①可积分的条件时，把问题转化为求解一个线性一阶偏微分方程，然后他又建立了解线性方程的方法。拉格朗日考察线性方程

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R。 \qquad ②$$

这是一个非齐次的方程，他把解方程②转化为解一个齐次方程的问题，而齐次方程的求解又联系着一个常微分方程组。这样一来，拉格朗日成功地把解一个一般的一阶偏微分方程的问题转化为求解常微分方程组的问题。他还对一阶方程的解进行分类，并讨论了完全解（或全积分）、通解和奇解的关系等。

n 个变量的一阶偏微分方程的解法是由柯西和德国数学家普法夫建立的。特别是普法夫作出重要贡献，他给出了解普法夫方程的一种有效方法。

关于一阶偏微分方程的几何理论，是由法国数学家蒙日建立的，他指出方程的全积分是双参数曲面簇，给出通解的几何解释，引进特征曲线的重要概念。蒙日的工作后来由法国数学家 É. 嘉当等人发展。

位势方程（**potential equation**） 一类重要的偏微分方程，属于椭圆型方程。

18世纪所研究的主要物理问题之一是确定两个物体之间的万有引力，特别是研究太阳对一个行星，地球对它外部或内部的一个质点，地球对另一个连续质量的引力等。牛顿、马克劳林、丹尼尔·伯努利和欧拉等人都对万有引力问题进行了深入研究，他们发现万有引力的三个分量所确定的势函数 $V(x,y,z)$ 满足下列所谓“位势方程”

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0。$$

这个方程最早出现在欧拉的1752年的论文中。以后，人们为了探求这个方程的一般解法做了大量的工作，特别是勒让德对旋转体引力的计算引出了所谓勒让德多项式，他利用这些多项式的性质及势函数的表达式等直接计算出球体间的引力。

18世纪80—90年代，拉普拉斯为解位势方程做了重要贡献。在他的《球状体和行星状物体的引力理论》（1782）的著名论文中，给出了用球坐标表示的位势方程，并且利用球调和函数来解球状体引力的位势方程。由于拉普拉斯的出色工作，上述位势方程又称拉普拉斯方程。

在19世纪，由于对稳定的热传导、电磁理论中的位势的研究，建立了所谓泊松方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=4\pi\rho,$$

其中 ρ 是吸引体的密度。英国数学家格林为了得到位势方程解的一般

性质,他从拉普拉斯方程出发,建立了著名的格林定理。俄国数学家奥斯特罗格拉茨基也独立地证明过这个定理。格林还引进了特殊的奇异函数——格林函数的概念,它已成为现代偏微分方程的一项基本工具。格林把这些定理和概念应用于电磁学和具变密度椭球体的引力问题,得到了更一般的结果。由此还引出了第一边值问题(狄利克雷问题)。第二边值问题由德国数学家诺伊曼提出。

在格林之后,英国的学者汤姆森、斯托克斯和麦克斯韦,以及德国的黎曼和外尔斯特拉斯等在位势方程解的存在性、用复变函数解位势方程等方面都有许多工作,到19世纪末,位势方程的理论已基本建立起来。但是还有一些尚未解决的重要问题,1900年希尔伯特提出的著名的23个数学问题中,就有3个是关于位势方程的。80多年来,对位势方程的研究已获得了丰硕的成果。

波动方程(**wave equation**) 属于双曲型偏微分方程,是一类重要的偏微分方程。

18世纪上半叶,围绕着弦振动问题,伽利略、泰勒、约翰·伯努利和达朗贝尔等作了大量的研究工作,1747年达朗贝尔建立了第一个一维的波动方程(即弦振动方程)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

并且得到如下形式的解

$$y(t,x)=\frac{1}{2}\varphi(at+x)-\frac{1}{2}\psi(at+x)。$$

但他只考虑边界条件。第二年,欧拉指出,如果再给定初始条件,那么弦的振动便完全确定。由此还引起18世纪一场激烈而又重要的争论:偏微分方程的积分中所含任意函数的性质是怎样的?

1753年,丹尼尔·伯努利以全然不同的方式给出弦振动方程的解

$$y=\alpha\sin\frac{\pi x}{a}+\beta\sin\frac{2\pi x}{a}+\gamma\sin\frac{3\pi x}{a}+\cdots。$$

他指出,弦所发出的声音是由基本音和无穷多个泛音所构成,因此把各种泛音对应的正弦曲线叠合起来,就得到弦的形状。事实上,他已经获得了后来称为傅立叶级数法的解偏微分方程的方法。

欧拉和达朗贝尔考虑粗细不均匀的弦振动问题,得到了推广的波动方程。

1759年,欧拉和拉格朗日分别独立地研究平面波和柱面波的振动,建立了二维和三维的波动方程。18世纪也出现了用球坐标表示的波动方程。到了19世纪,波动方程在许多物理领域中得到新的应用。泊松和黎曼以完全不同的方法给出波动方程初值问题的解。在研究其他形式的波,如调和的、声音的、弹性的、和电磁学的波的过程中,出现了退化的波动方程,德国物理学家亥姆霍兹利用格林定理得到退化方程的连续解。此外,德国数学家杜布瓦-雷蒙和法国数学家达布等对波动方程也作了许多研究。

热传导方程(**equation of heat conduction**) 一类重要的偏微分方程,属于抛物型方程。

18世纪初期,在工业上为了对金属进行热处理,法国数学家傅立叶从事热流动的研究。在他的著名

的《热的分析理论》一书中，考察了均匀的各项同性的物体的温度 $T(x,y,z,t)$，根据物理原理，证明 T 必须满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t}。$$

这就是三维空间的热传导方程。傅立叶在某种边界条件和初始条件下求出了用三角级数表示的解，由此他提出了任意周期函数都可以用三角级数来表示的问题。这些工作揭示了函数可以展开为一些特殊函数的级数这一普遍性事实。

1811年，傅立叶讨论在一个方向上延伸到无穷远的区域的热传导问题。为了解这类问题，他从有界区域热传导方程的解(三角级数形式表示的)出发，通过一系列推导和计算，得到用傅立叶积分表示的方程的封闭形式的解。

自然界中还有许多现象可以用热传导方程来描述，例如分子在介质中的扩散过程等。

奇解(singular solution) 指微分方程的某些解，它们不能通过给积分常数以一确定值的方法从通解中得到，即它们不是特解。

莱布尼茨在1694年就发现，一个常微分方程的解族的包络也是方程的解。泰勒在18世纪初也观察到这个现象。克莱罗与欧拉对奇解作了比较完整的探讨，他们都是从微分方程本身来求奇解。欧拉还给了奇解的一个判别法。拉格朗日对奇解与通解的关系作了系统研究(1774)，并建立了从通解中消去常数而得到奇解的方法，给出奇解是积分曲线族的包络的几何解释。奇解的完整理论是在19世纪发展起来的，英国数学家凯莱和法国数学家达布建立了奇解的现代理论(1872)。

积分方程(integral equation) 未知函数出现在积分号内的方程叫积分方程，解积分方程就是要确定这个函数。“积分方程”这一名词是由德国数学家杜布瓦-雷蒙首先给出的。

18世纪末和19世纪初分别在拉普拉斯和傅立叶的工作中就出现过个别的积分方程问题。第一个自觉地应用并解出积分方程的是挪威数学家阿贝尔。他在1823年研究地球引力场中的一个质点下落轨迹问题时，归结为从方程

$$f(x)=\int_0^x \frac{v^1(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi$$

中确定函数 v。他用比较特殊的方法求出了 v，上述方程后来被叫作阿贝尔方程，但是阿贝尔的工作在较长时间内未引起人们注意。

英国数学家格林在研究位势理论时曾导出过一种重要的积分方程；法国数学家刘维尔在1832年把解某些微分方程的问题化为解积分方程，也得到了一种积分方程。到19世纪中叶，有许多工作进一步表明，把微分方程转换为积分方程，已经成为解常微和偏微分方程的重要技巧，这也是积分方程发展的强大动力。

积分方程的一般理论在19世纪末20世纪初建立。意大利数学家沃尔泰拉是这种理论的最早的创立者，他从1884年开始研究积分方程的一般理论。他考虑方程

$$f(s)=\int_a^s K(x,s)\Phi(x)dx \quad ①$$

和

$$f(s)=\Phi(s)+\int_a^s K(s,x)\Phi(x)dx \quad ②$$

的解法。这两种方程后来就分别称为沃尔泰拉第一种积分方程和第二种积分方程。沃尔特拉十分巧妙地得出方程②的解，他把②的解表示为收敛的函数级数的和的形式。他还解出了方程①，用的方法是把它们化为第二类方程。

几乎与沃尔泰拉同时，瑞典数学家弗雷德霍姆研究了如下形式的积分方程

$$f(s)=\int_a^b K(x,s)\Phi(x)dx \quad ③$$

和

$$f(s)=\Phi(s)+\lambda\int_a^b K(s,x)\Phi(x)dx。 \quad ④$$

这两种方程分别称为弗雷德霍姆第一种和第二种积分方程，它们与沃尔泰拉方程的区别是具有确定的积分上限。他利用线性方程组和行列式理论对第二种方程进行了深入研究，建立了重要的弗雷德霍姆定理。对于第一种弗雷德霍姆积分方程，虽经许多人研究，但至今未建立起系统的理论。

弗雷德霍姆的工作引起希尔伯特的兴趣。1904—1910年，他连续发表数篇关于积分方程的论文。对第二种弗雷德霍姆积分方程做了重要工作，特别在对称核积分方程特征值存在性，对称核关于特征函数序列的展开等方面。他和德国数学家施密特共同建立了著名的希尔伯特-施密特展开定理。他们的工作不仅发展了弗雷德霍姆的理论，而且由后人发展成为线性泛函分析理论。希尔伯特还成功地把微分方程的斯图姆-刘维尔边值问题化为积分方程来求解，这种研究方法很快被用来解决许多物理问题。除此而外，施密特还将特征函数的概念推广到带非对称核的积分方程，得到重要结果。

希尔伯特在研究解析函数的边值问题时，发现了现称为带有积分核的奇异积分方程。几乎在同时，庞加莱在研究潮汐现象时也发现了这种方程，他们研究并建立了这种奇异方程的一般理论。1947年，苏联数学家穆斯赫利什维利发表专著《奇异积分方程》，对这方面的工作做了系统总结。

20世纪20年代初，在幅射传输理论中出现的米尔恩方程是一种积分区域为无限的积分方程。1932年，美国数学家维纳和德国数学家霍普夫共同建立了这种方程的解法，因而这种奇异积分方程称为维纳-霍普夫方程，其解法称为维纳-霍普夫方法。20世纪40年代以来，这种方程的理论在解析函数边值问题、调和分析和算子理论的基础上得到系统发展，其应用泛围也扩展到许多其他领域。

以上所论及的积分方程都是线性积分方程。20世纪以来，关于线性积分方程的理论已推广到非线性积分方程，对于未知函数以二次、高次或更为复杂形式出现的方程，都得到一些结果。特别是围绕德国数学家哈默施泰因(1930)提出的一种非

线性方程，已得到不少有意义的结果。但是对于一般非线性方程还未建立系统的理论。

泛函分析的发展又反过来刺激了积分方程的发展，使之面貌焕然一新。美国数学家冯·诺伊曼在这方面已取得重要成果。

弗雷德霍姆积分方程（**Fredholm integral equation**） 形如

$$\int_a^b K(x,y)\Phi(y)dy=f(x) \quad ①$$

和

$$\Phi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\Phi(y)dy=f(x) \quad ②$$

的积分方程依次称为第一种和第二种弗雷德霍姆积分方程。其中 λ 是参数，$\Phi(x)$是未知函数，核 $K(x,y)$ 和自由项 $f(x)$是已知函数。

瑞典数学家弗雷德霍姆在1900—1903年间发表了关于上述两种类型方程的著名论文。他利用线性方程组和行列式理论对上述第二种方程进行研究，建立了重要的弗雷德霍姆定理，它是弗雷德霍姆积分方程的基础。

对于第一种弗雷德霍姆方程，德国数学家施密特和法国数学家皮卡分别建立了可解的必要条件和充分条件，他们的结果称为施密特-皮卡定理。近代对方程①的研究又有新的近展，并得到一些有效的解法，但至今尚未建立起系统的理论。

沃尔泰拉积分方程（**Volterra integral equation**）

形如

$$\int_a^x K(x,y)\Phi(y)dy=f(x) \quad ①$$

和

$$\Phi(x)-\lambda\int_a^x K(x,y)\Phi(y)dy=f(x) \quad ②$$

的积分方程依次称为第一种和第二种沃尔泰拉积分方程。当它们的上限是固定数 b 时，就成为弗雷德霍姆积分方程，因此它们是后者的特殊情形。

19世纪上半叶，阿贝尔和刘维尔所处理的积分方程都属于沃尔泰拉方程。意大利数学家沃尔泰拉在1896年给出解第二种沃尔泰拉方程的基本方法，并指出第一种沃尔泰拉方程是含 n 个未知数的 n 个线性代数方程组当 n 趋于无穷时的极限形式，解这一种方程的方法是化为第一种方程求解。

计算数学（**Computational mathematics**） 数学的一个分支，它研究数值计算方法的设计、分析和有关的理论基础与软件实现问题。计算数学几乎与数学的所有分支有联系：它利用数学各领域的成果发展新的更有效的算法及其理论基础，而在许多数学分支的研究中开始探讨运用计算的方法。计算数学的发展对数学本身也产生越来越大的影响。近年来，由于电子计算机的发展及其在科学技术各领域中的广泛而深入的应用，计算性的学科新分支，如计算力学、计算化学、计算生物学、计算地质学、计算经济学以及许多工程科学的计算分支大量产生。因为任何学科中的计算过程，不论其目的、背景及含义如何，终归是数学的计算过程，计算数学是各科计算性学科的联系纽带和共同基

础。因此，计算数学是一门兼具基础性、应用性和边缘性的数学学科。

计算是与人的生活联系最直接最密切的数学方法，人类的整个数学就是从计算开始的。计算是数学的重要组成部分。

中国古代数学可以说就是一种计算数学，它的主要特点就是实用性和计算性，而且应用在当时主要也就是计算。中国古代数学的一些辉煌的具有世界历史意义的成就多是计算数学的成果：世界上最早的十进位值制记数法、勾股测量术、线性方程组数值解法、正负数及其计算规则、十进小数、圆周率计算、一次同余式解法、一元高次方程数值解法、多元高次方程组数值解法、一次、二次、三次及四次插值法等。中国在公元前5世纪就产生了独特的计算工具——算筹，以上成就，都是用算筹计算求出的，这些成就一般表述为算法的形式，中国古代数学的发展表现为算法的进展。在算筹基础上产生的算盘，是至今仍有很大用途的独特的数学工具。

文艺复兴后欧洲资本主义工商业迅速发展，科学技术进入全新的发展阶段，数学发展的主要舞台移到欧洲。以解析几何学及微积分为标志，数学发展进入新的时期，近代数学开始形成，数值计算方法也有相应的进步，计算方法与数学基础理论有着同步的发展。在数学基础理论研究中作出重要成就的牛顿、欧拉、拉格朗日等人对计算方法也作出重要贡献，他们发展了一般插值方法与差分方法；高斯和切比雪夫则分别对于均方模量和绝对值模量发展了最优逼近的方法与理论。他们正是在数学的应用中发展了计算方法的。数学的应用与计算数学的发展有极其密切的关系。在高次代数方程方面发展了牛顿迭代法以及其他种种求根方法；在线性代数方面发展了高斯、约尔当消元法及各种迭代法。分析数学发展的同时，也开辟了数值计算的新领域——微分方程的离散化和数值解法。由于科学技术发展和实践的需要，即应用的需要，人们日益认识到数值计算的不断增长的重要性。但是由于社会生产规模的制约，特别是由于技术设备和计算工具的不足，在20世纪40年代以前，数值计算发展较慢，对科学研究和工程技术所起的作用是比较有限的。

20世纪40年代，由于实践的需要，尤其是军事上的需要，又由于具备了相应的物质技术条件，1946年制成了电子计算机，这是人类计算工具的一个革命性进展。在人类文明发展中也有重要的意义。电子计算机的制成和应用，使人们有了前所未有的高精度、高速度的计算工具。随着计算机本身的更新换代(40年来发展了四代)，性能越来越提高，这使得越来越多的以前不能设想的难度和规模日益增大的计算问题的解决，在技术上和经济上成为可行的。这种情况使计算在科学技术及经济生活以至于人的整个社会生活中的重要性得到极大的提高。同时，由原来分散在各个数学分支中的计算方法综合起来，形成了一门兼具基础性、应用性和边缘性的数学学科——计算数学，并使之得

到迅速的发展。

计算数学对现代科学技术及人的整个社会生活的重要性表现为科学计算成为与科学实验、科学理论二者并列的一般科学方法。科学实验方法是伽里略开始系统引入的，科学理论方法是牛顿加以提高完善的。科学实验和科学理论相结合，推动了近代科学的发展。现代科学计算成为一般科学方法，是伽利略、牛顿的时代以来科学方法论上的最大发展。这必将促进现代科学技术的新的发展。

计 算 工 具(Calculating devices) 计算所用的器具或辅助计算的实物。从数学产生之日(最早产生的数学方法就是计算)起，人们就不断地寻求能方便地进行和加速计算的工具，从这个角度看，数学发展的历史，也就是计算和计算工具的发展史。计算理论对于计算工具有一定的依赖性，但计算工具的改进又依赖于计算理论的进展，计算工具发展的历史一再说明这一点。

中国古代数学是一种计算数学，中国古人创造了独特的计算工具及与工具有关的计算方法。中国古代最先用算筹作为计算工具，它的使用可上溯到公元前5世纪，公元前3世纪得到普遍的采用，这之后近两千年间的中国数学，就是以算筹为工具，在它基础上建立起来的计算数学。中国古人把算筹在平面上排列成一定的格式，进行计算操作就可解决计算问题。要用计算工具来计算，首先要确定算法。《九章算术》(公元1世纪)中已给出用算筹进行乘除、开平方、开立方运算的算法，求解线性方程组及求某些图形的面积和体积的算法。后来的数学著述又给出用算筹求解一次同余式组、一元高次方程、多元高次方程组的算法。这些在当时都是十分先进的。后来，人们又发明了算盘，15世纪起得到普遍使用，取代了算筹，它是在算筹基础上发明的，比算筹更加方便实用，同时还把算法口诀化，从而加快了计算速度，使算盘成为一种普及化、大众化的计算工具，后来人们又发现它具有较强的数学教育功能，因而至今盛行不衰，并且传至海外，在电子计算机日益普及的情况下成为一种国际性计算工具，充分表明中国算盘具有独特的优点。

古代其他民族也发明过各种形式的计算工具，例如罗马人的“算盘”，古希腊人的“算板”，印度人的“沙盘”，英国古代的刻齿木片等，其形式因时因地而异，但原理则是一致的：通过某种具体的物代表数，利用对物的机械操作来进行计算。从而用人的体力来延伸脑力，提高计算精度，加快计算速度。

近代科学的发展也促进了计算的发展，伽利略把数学方法与实验方法结合起来，所用的数学方法主要也是计算。新的计算要求促进了计算工具的改进：伽利略发明了“比例规”——形似圆规、两脚上各有刻度，可以任意开合，利用比例原理进行乘除比例等计算的工具。17世纪初对数的引入使人们有可能以加减代替乘除运算，依此，制成功对数计算尺．这是计算工具的一大进展。1620年，冈特最先利用对数尺度来

进行乘除计算，1632年奥特雷德发明有滑尺的计算尺，又制成圆形计算尺，1652年 R·比萨克制成有固定尺身和滑尺的计算尺，1850年 V·曼南将游标装在尺上，被广泛采用，此后，种类繁多的计算尺在电子计算工具未普及之前一直是科学工作者特别是工程技术人员不可缺少的计算工具。

与此同时，机械式计算机也出现了，这是计算工具上的一大发明。最早提出机械式计算机设计思想的是席卡德(1623)，但他并没有制出机器来。制成第一台机械式计算机的是帕斯卡，他于1642—1644年间设计并制成了一台加法器。1671年，莱布尼茨设计了一种能作四则计算的手摇计算机，1673年制成了样机。在此基础上，经过多年的改进，出现了各式各样的手摇计算机，风行于世界各地。这种计算机17世纪末就传入我国，当时我国有人仿此制造了12位数的手摇计算机，并独创了一种算筹式手摇计算机。

19世纪科学技术的发展，迫切需要一种能依一定的“程序”自动控制的计算机。19世纪初 J·雅卡尔发明用穿孔卡片来控制纺织机，1822年，C·巴贝吉制成了一台能够执行计算程序的差分机，1934年，他设计了一台完全程序控制的分析机，由于当时机械技术的限制没有制成，但已包含了现代计算的基本思想和主要组成部分。后来，电力技术有了很大的发展，人们开始用电力代替人工作为计算机的动力，基本计算元件仍然是机械式的，称为电动式计算机。1880年，H·霍勒里斯与 S·比林斯制成电动穿孔卡片式计算机，使数据处理机械化，1890年用于美国的人口调查，获得极大的成功，后来他们开创了第一家计算机公司。

20世纪以来，电子技术开始进入生产领域，为从元器件上改造计算机提供了物质技术基础。同时，数学也有了充分的发展，计算理论、数理逻辑、算法理论、自动机理论等都取得关键性成果，使设计、研制新型计算机有了可能。30年代人们开始研制机电元件的程序控制通用计算机，称为机电式计算机，40年代初在美国和德国差不多同时制成。德国人楚泽1941年制成世界上第一台通用程序控制计算机，除了元件采用继电器外，与后来的电子计算机已无大差别；美国的艾肯也于1944年制成一台程序控制自动数字计算机。

20世纪中叶电子技术的进步，主要是电子管的出现给计算机主要元件改革开辟了新路，而二次大战的迫切的军事需要又把研制新式计算机的任务排上日程，美国动用了大批人力物力投入研制，终于在1946年制成了世界第一台电子计算机——电子数字积分与计算机(ENIAC)。在此之前，英国的 A·图灵就提出计算机理论，探讨了通用数字计算机制造的可能性。并在1943年实际制出破译密码的计算机，但由于军事保密，世人尚未知其详。

由电子计算机产生至今40多年间，它本身有了极大的发展和变化，主要元件已经过四次大的变化——电子管、晶体管、集成电路、大规模

集成电路。1983年我国第一台亿次"银河"计算机诞生,标志我国已进入研制巨型机的行列。电子计算机的功能已远不止是一种计算工具,它已渗入人类几乎所有的活动领域,正改变着整个社会的面貌,使人类历史迈入一个新的阶段——电脑时代。

筹算 中国古代以算筹为工具来记数、列式和进行各种演算的一种方法。算筹,又称筹、策、筹策等,有时亦称为算子,是一种棒状的计算工具,一般就是竹制或木制的一批同样的小棒,也有用金属、玉、骨等质料制成的,不用时放在特制的算袋或算子筒里,使用时在特制的算板、毡或直接在桌上排布。按《汉书·律历志》记载:"其算法用竹,径一分,长六寸,二百七十一枚而成六觚,为一握。"已出土的汉代算筹与此记载尺寸相符,一般是直径 0.23 厘米,长约 13 厘米的圆形竹棒,271 枚捆作一捆。

算筹在中国起源甚早,《老子》(春秋战国之际成书)中就有"善数者不用筹策"的记述,可见当时算筹已作为专门的计算工具而被普遍采用,筹的用法已趋于成熟。现在,人们一般认为在公元前 5 世纪算筹在我国已得到普遍的应用。算筹记数的方法,现在所见的最早记载是《孙子算经》(公元 4 世纪),由算筹记数得到的筹算记数法是一种相当完善的十进位值制记数法(见中国数学),中国古人并由此独立地得到"零"和"零号"(见零号)。筹算在中国古代数学中占有极重要的地位,多数数学著作的主要内容就是利用筹算解决某类问题的算法,从《九章算术》(公元 1 世纪成书)起算法("术")作为主要内容就成为中国古代数学的一大特点。从这个意义上来看,中国古代数学可以说是在筹算基础上发展起来的。许多数学成果,都表述为利用算筹进行计算的算法的形式,如一次同余式求解("大衍求一术")、高次方程求根("正负开方术")等等。

随着中国古代数学的发展,算筹和筹算也不断得到发展。例如,3 世纪刘徽使用不同颜色的算筹表示正负数,红筹表正数,黑筹表负数;隋代则以不同形状的筹表正负数:三棱柱状的表正数,四棱柱状的表负数。算筹变小(周长 0.59 厘米,长 8.85 厘米)。随着求解高次方程,求解同余式组和高次方程组的研究,筹算的摆法也不断发展,不仅能摆出四则运算、乘方开方等代数运算,而且包含了特定筹式的演算:不同的位置用来表示特定的数学意义,比例的不同的项、不同的未知数、未知数的不同次数等等,布列算筹的方法日趋巧妙,解决了一系列重要的数学问题。筹算的算法也日趋简明化、模式化、到了宋元之际,形成了一系列诗一般的筹算口诀,口诀有利于人们记忆和应用筹算算法,加快计算速度,其中相当一部分口诀(乘除法口诀)以珠算口诀的形式流传至今。

由于中国古代数学实际上就是筹算数学,中国古代数学著述大多以阐述解某类问题的筹算算法为主。计算靠运筹解决,书上记载的是原始数据和运筹所得结果,无需记

载运算过程。因而也不需要任何表示运算及表未知数、指数等的数学符号(它们通过筹的排布给出),所以中国古代数学中没有发展出各种数学符号来。筹算起了重要的作用。

宋元之际中国古代数学的高峰也是筹算发展的高峰。明代筹算渐渐为珠算所取代。

珠算 以算盘为工具进行数字计算的一种方法。"珠算"一词,按现存资料,最早见于汉代徐岳撰《数术记遗》,但按北周甄鸾注,不是使用算盘的算法、与后来所谓"珠算"(用算盘)的意义不同。从文献分析来看,"算盘"一词最早出现于元代刘因(1248—1293)《静修先生文集》中一首五言绝句的题目;元代画家王振鹏作《乾坤一担图》(1310年)中货郎担的货中有一算盘;元末陶宗仪《南村辍耕录》(1366)卷二十九"井珠"条中有"算盘珠"比喻;元曲中也提到"算盘",可见,元代已应用了算盘。

现代认为,从明代起,算盘渐渐取代了算筹,珠算取代了筹算。现存载有算盘图的最早文献是明洪武四年(1371)刻的《魁本对相四言杂字》一书。现存最早的珠算书是徐心鲁订正的《盘珠算法》(1573)。流行最广,在历史上起作用最大的珠算书则是明代程大位编的《直指算法统宗》(1592)。

珠算的算法,常用口诀来表述,在一套口诀指导下拨珠即可完成计算。加减口诀,为珠算所特有,最早见于吴敬《九章算法比类大全》(1450)。乘法除法口诀,采用的则是筹算口诀。乘法"九九"口诀,在春秋战国时已在筹算中得到应用;归除口诀,首见杨辉《乘除通变算宝》(1274),朱世杰《算学启蒙》(1299)所载九归口诀已与现代基本相同。有了四则口诀,珠算的算法就形成一个体系,长期沿用下来。

珠算从明代以来,在我国日益流行,现在已成为人们的重要常识之一。并且先后流传海外,如日本、朝鲜、东南亚各国,近年更传入美洲、欧洲,并日趋流行。一个发人深省的问题是:为什么在电子计算机日益普及的今天,人们仍然十分重视珠算呢?除了它的良好的计算性能外,人们普遍认为它具有独特的教育功能,这是任何别的计算工具都无法代替的。

计算几何(**Computational geometry**) 由函数逼近论、微分几何学、代数几何、计算数学等形成的新兴边缘学科。它研究几何外形信息的计算机表示、分析和综合,是计算机辅助几何设计(CAGD)技术的数学基础。

20世纪60年代起,计算机辅助设计和辅助制造开始进入造船、航空和汽车工业的产品几何外形设计和制造领域中。设计者首先需要把一般的曲线或曲面的外形表示在计算机上,然后对这些曲线或曲面的几何性质进行分析,看曲线上有无拐点、奇点,曲面是不是凸的,等等,最后提出一种有效的数值方法,由程序或由人机对话控制这些曲线和曲面的形状,使其符合设计要求。这就是计算几何的主要内容。1962年起,法国雷诺汽车公司的P·E·贝济埃以逼近为基础,开始构造参

数曲线表示法，完成了一种自由型曲线和曲面的设计系统"UNISURF"，并于1972年在雷诺汽车公司正式投入使用，其参数曲线称为(n次)贝济埃曲线。在1972—1974年，人们在贝济埃用多边形控制曲线形状的方法启发下，把多项式B样条函数扩张为参数形式的B样条曲线，并使用B样条特征多边形来控制它。1964—1967年，S·A·孔斯构造了一种用四边曲面片的阵列来表示曲面的方法，称为孔斯曲面片，把小片的孔斯曲面片拼起来，使得连接处达到一阶或二阶偏导数连续，便能构造各种复杂形状的几何外形。它们在飞机外形设计中有很多应用。贝济埃曲线和B样条函数则可通过直积的形式而拓广为曲面表示，同样可满足设计外形的需要。

蒙特卡罗法(**Monte Carlo method**) 以概率和统计的理论、方法为基础的一种计算方法，将所求解的问题同一定的概率模型相联系，用电子计算机实现统计模拟或抽样，以获得问题的近似解，故又称统计模拟法或统计试验法。

统计试验法的思想可以追溯到17世纪，当时人们已知道了依频数来决定概率的方法，1777年比丰投针试验也可以认为是统计试验法的先驱工作之一。1899年，瑞利等人也提出过基于统计概念上的计算方法。但是作为一种计算方法的蒙特卡罗法，是由S·M·乌拉姆和J·冯·诺伊曼在20世纪40年代中叶为研制核武器的需要而正式提出来的。紧接着，出现了电子计算机，使得用数学方法模拟大量的试验成为可能。而随着科学技术的发展，出现了越来越多的复杂而困难的要求计算的问题，用通常的解析方法或数值方法都很难加以解决。蒙特卡罗法就是在这些情况下，作为一种可行的而且是不可缺少的计算方法被提出来，并立刻得到了迅速的发展。现在其应用已经渗透到科学技术的各个领域。例如应用于：屏蔽计算、核临界安全计算、反应堆物理计算、微扰计算、高能物理计算、统计物理计算、真空技术、公用事业、信息论、系统模拟、可靠性计算和计算机科学等，其中一些领域的计算是有代表性的，按蒙特卡罗法解决这些领域的计算问题的能力说，已超过其他计算方法的水平。蒙特卡罗法对数学问题也有重要应用，主要是各种数值计算问题，如多重积分计算、微分方程求解、矩阵求逆、非齐次线性积分方程求解和最优化计算等等，对这些问题，特别是高维问题来说，蒙特卡罗法是较好的选择。

蒙特卡罗法的优点是：在方差存在的情况下，问题的维数不影响它的收敛速度，而只影响方差；问题几何形状的复杂性影响不大；不必先离散化，可进行连续处理；程序结构简单，所需计算机存贮单元比其他数值方法少，这对高维问题尤其显著。其缺点是：对于维数少的问题不如其他数值方法；它的误差是概率误差，不是一般意义下的误差。

有限元方法(**finite element method**) 在变分原理和剖分逼近基础上求解微分方程，特别是椭圆型边值问题的一种离散化方法。

有限元方法是20世纪60年代在中国和西方各自独立地发展起来的。它们的发展有不同的实践背景，走过不同的学术道路。

在西方，有限元方法的思想是R·库朗于1943年在其一篇文章中提出来的，但在很长的时间里没有引起重视。直到20世纪50年代中期，欧美工程界人士J·H·阿吉里斯，H·W·克拉夫等在处理航空工程问题时，在结构分析和矩阵方法的基础上提出了结构有限元的雏形。60年代初，引进了连续体的单元剖分；60年代中期，逐渐明确了有限元法是变分原理加剖分逼近的思想。1968年，西方数学家对有限元法进行了数学理论探讨，有限元法开始在计算数学中得到广泛的应用。

在中国，则有限元法产生于60年代初期，当时，冯康、黄鸿慈等人结合解决一系列大型水坝建设的应力分析问题，开展了椭圆型边值问题数值解的系统研究，为克服问题的传统提法中的几何复杂性和材料复杂性，把能量法和差分法结合在一起，于1964年建立了求解椭圆型边值问题的一套普遍有效的方法，命名为基于变分原理的差分方法，即通称的有限元方法。与此同时，建立了有限元法的数学理论基础。此后20多年间，中国学者对有限元法的理论及实践都作出重要贡献，有力地推动了有限元法的发展。

现在，有限元方法对于定常态问题的计算已获得公认的巨大成功，对不定常态问题的计算也有了良好的开端。有限元方法是一个发展着的体系，在其基本原则下可有种种变化和发展，特别是可和其他方法结合起来，进一步解决更困难更复杂的计算问题。

插值法(method of interpolation)　在离散数据的基础上补插出连续函数的方法。是计算数学中最基本和最常用的方法，函数逼近亦常用插值法进行，利用插值法可通过函数在有限个点处的取值状况，估算出该函数在别处的值。

最早采用插值法的是中国古代数学家。《周髀算经》(公元前1世纪)中就有一次插值法的记载；《九章算术》中的“盈不足术”也是一种独特的一次插值法；公元6世纪，刘焯在《皇极历》的编算中采用了等间距二次插值法；公元8世纪，一行在《大衍历》的编算中采用了不等间距二次插值法；后来，郭守敬在《授时历》的编算(1280)中采用了三次插值法，朱世杰在《四元玉鉴》(1303)中给出了四次插值公式。17世纪，牛顿和格雷果里建立了等距结点上的一般插值公式；18世纪，拉格朗日给出了更一般的非等距结点上的插值公式。这些都是多项式插值法。后来，在此基础上发展出多种插值方法。如埃尔米特插值(插值条件带微商的插值方法)，分段插值，样条插值，三角插值，有理插值和多元插值等。现在，插值法是处理观测数据、制函数表等常用的方法，又是导出其他许多数值方法(如求数值积分、求非线性方程组的数值解、求微分方程数值解等)的依据，因此在计算数学中占有重要的地位。

最小二乘法(method of least

square） 测量工作和科学实验中常用的一种数据处理方法。与插值法一样，也是求与数据逼近的函数的方法，从而也能通过函数在有限个点处的值，求出函数在别处的值。从几何意义上看，最小二乘法问题等价于确定一平面曲线(类型先给定)，使它和实验数据点"最接近"，故又称为曲线拟合问题。与插值法不同的是，并不要求曲线(函数)严格通过数据点。由于实验数据常有观测误差和其他随机因素，所以有时要求严格通过数据点的插值法反而不如最小二乘法精确。此法是高斯研究测量误差时(1794)提出的，于1809年发表，同时，勒让德也独立地提出此法。现代工程技术和科学实验中仍大量利用此法建立各种经验公式。

不动点算法(**fixed point algorithm**) 求不动点及在此基础上产生的算法。所谓不动点，是指将一个给定区域A，经过某种变换$f(x)$，映射到A时，使得$x=f(x)$成立的那种点。1912年，布劳威尔提出第一个不动点定理：R^n中连续映射的不动点的存在定理，就称为布劳威尔定理。1934年，J·P·绍德尔和J·勒雷将此定理推广到巴拿赫空间；1941年，角谷静夫将此定理推广至点的集值映射上去，得出集值映射的不动点(角谷不动点)定理(角谷定理)。

不动点定理在数学，例如代数方程、积分方程、数理经济学、运筹学等学科中都有广泛的应用。例如，代数方程基本定理的证明可化为在适当大的圆盘$|x|\leqslant R$内函数$f(x)+x$的不动点存在问题；在运筹学中，可以用来证明对策论中非合作对策的平衡点的存在，还可用来寻找数学规划的最优解。但前述定理都是存在性定理，只证明了不动点的存在性，并没有能行性的求法。而许多情况下，求出不动点有重要的数学意义和应用意义。寻求布劳威尔不动点定理的构造性证明的努力就产生了不动点算法。斯帕纳1928年得出的关于S^n中剖分的全标单纯形存在的斯帕纳引理、库拉托夫斯基等人1929年得出的关于S^n的满足一定条件的闭子集之交非空的$K-K-M$引理起了重要的作用。实际上，一个全标单纯形就给出一个近似不动点，而它是可以构造性地求出的。1964年，C·E·莱姆基等首开记录，对双矩阵对策的平衡点提出了一个构造性证明。1967年，H·斯卡夫改进此法，把以有限点列的计算逼近不动点的算法应用到数学规划中去，他在考虑单纯形到自身的连续映射的不动点问题时，将单纯形剖分为有限个称作本原集的子集。结果给出布劳威尔不动点定理的一个构造性证明。这立刻引起反响，他的算法不断得到发展，在应用中取得巨大成功，在理论上也产生深刻影响，接着，库恩采用三角剖分，给出一个多项式求根的算法(代数基本定理的一个构造性证明)，这是不动点算法的一个重要实例。此后不动点算法不断发展，产生了重复开始算法(麦里尔，1972)，三明治算法(库恩和马金诺，1975)，单纯同伦算法(伊夫斯，1972)，变维数重复开始算法(范.德.雷恩和塔

曼,1979,1980,1983)等第二、三、四代不动点算法。

有限差分方法(finite difference method) 简称差分法或网格法,是求微分方程和积分—微分方程的数值解的一种主要的计算方法。它的基本思想是:把连续的定解区域用由有限个离散点构成的网格来代替,这些离散点称为网格的结(节)点;把在连续定解区域上定义的连续变量函数用在网格上定义的离散变量函数来近似;把原方程和定解条件中的微商用差商来近似,积分用积分和来近似。于是原方程和定解条件就可用代数方程组来近似地代替,解此代数方程组就得到原问题的近似解。这种方法简单、通用,易于在计算机上实现。

有限差分方法有漫长的历史,源于牛顿、欧拉等人的工作,他们曾用差商代替微商以简化计算。1928年,R·库朗、H·卢伊等人证明了三大典型方程的典型差分格式的收敛性定理,为现代有限差分理论提供了基础。同时,库朗把有限差分法用于求偏微分方程的数值解,发展了这一方法。由于有限差分方法具有通用性,又便于机器实现,因而在电子计算机产生和广泛应用后更得到很大发展及更广泛的应用。冯·诺伊曼1948年对无粘流体(非线性双曲型)方程提出的引入人工粘性项的差分方法是一典型例子,他还同时提出计算稳定性概念和线性化傅里叶方法来分析稳定性。后来拉克斯等人建立了一般差分格式的收敛性、稳定性等价定理。人工粘性法成为现代流体计算的主导方法之一,而得出这种方法的自适应的算法思想也给其他计算方法的发展以很大的启发和影响。现代,有限差分方法应用于各类微分方程和积分-微分方程的各种定解问题,如常微分方程初值问题、边值问题;偏微分方程初值问题、边值问题,玻耳兹曼方程,计算流体力学等等,是把微分方程离散化,从而求其数值解的基本方法之一。

数值逼近(numerical approximation) 泛指数学计算问题的近似解法。狭义的理解则专指对函数的逼近,即对于给定的较广泛的函数类 F 中的函数 $f=f(x)$,从较小的子类 H 中寻求在某种意义下 f 的一个近似函数 $h(x)$,以便于计算和处理。

最早的数值逼近工作,始于18世纪到19世纪初欧拉、拉普拉斯、傅立叶、彭赛列等人对一些个别函数的最佳逼近问题的研究工作,这些问题是从绘图学、测地学、机械设计等方面的实际需要中提出的。但当时没有形成深刻的概念和统一的方法。1854年,切比雪夫提出了最佳逼近的概念,研究了逼近函数类(H)是 n 次多项式时最佳逼近元的性质和判定定理。后来又与其学生在这方面得出许多重要的结果。1885年外尔斯特拉斯证明,原则上任何连续函数都可以用多项式以任何预先指定的精确度在函数的定义区间上一致地近似表示出来,开创了多项式逼近理论,如果考虑到怎样逼近才最好的问题,就得出最佳一致多项式逼近理论,这正好是切比雪夫的思想。可以说,切比雪夫和

外尔斯特拉斯是现代数值逼近的奠基人。D·杰克森1911年对逼近阶，即逼近的极小极大偏差当n增长时的下降速度进行研究，探讨逼近偏差与被逼近函数的构造（光滑性）的关系；次年，C·H·伯恩斯坦用逼近阶来反推被逼近函数的构造性质。他们有力地推动了数值逼近的发展。30年代中期，J·A·法瓦尔和柯尔莫戈洛夫开创周期可微函数类借助于三角多项式的最佳逼近的精确估计以及借助于傅里叶级数部分和的一致逼近的渐近精确估计的工作，把杰克森等的工作推向新的高度。从那时起，直到60年代，C·M·尼科利斯基等人在这方面继续取得重要的成果。从实际应用的角度看，要解决一个函数的最佳逼近问题，需要构造出最佳逼近元和算出最佳逼近值。一般地要精确解决这两个问题十分困难，这促使人们为寻求最佳逼近元的近似表示和最佳逼近值的近似估计而设计出各种算法，例如列梅兹算法、极小极大（劳勃）算法、递推算法等。近20年来由于高速电子计算机的广泛应用，数值逼近的理论和方法发展迅速，成为计算数学和应用数学的重要分支，其结果被广泛用于构造数值积分、求函数零点、解微分方程和积分方程的近似方法等各种问题中。

线性代数方程组数值解法（numerical method of linear algebraic equations） 计算数学的一个基本组成部分。在自然科学和工程技术的许多问题中，例如结构分析、网络分析、大地测量、数据分析、最优化等问题中常常遇到线性代数方程组求解问题；数学中，例如求解非线性方程组或微分方程数值解问题也常转化为线性代数方程组求解问题来解。

线性代数方程组数值解法有悠久的历史，我国古代数学著述《九章算术》（公元1世纪）的"方程"章中就已有了较好的线性代数方程组数值解法——相当于现代的对方程组的增广矩阵施行初等变换、消去未知量的方法。中世纪的印度数学家也可以求解线性方程组。例如12世纪的婆什迦罗的著作中，也有求解线性方程组的内容。在欧洲，是16世纪的比特奥在其《算术》(1559)中采用了与《九章算术》类似的消元法。日本数学家关孝和在其《解伏题之法》一书(1683)中首先利用了类似现在的"行列式"法求解了三元线性方程组，稍后，莱布尼茨提出关于行列式解线性方程组的思想(1693)。1721年麦克劳林用行列式展开式的方法给出了二元、三元、四元线性方程组的解法，但他的符号记法则不完善。1750年，克莱姆给出现在比较通用的线性方程组行列式解法，即克莱姆法则。1764年，贝祖用行列式建立了线性方程组的一般理论。但由于当时计算的效率很低。这一理论几乎只有理论上的意义，实际上只能求出未知数很少的线性代数方程组的解。只是在20世纪中叶电子计算机问世并投入应用之后，大型线性代数方程组的数值求解才成为可能。如何利用计算机更精确、更有效地解大型线性代数方程组是计算数学研究中最重要的

课题之一。

现代计算实践中，常用的线性代数方程组的数值解法有直接法和迭代法两大类。直接法是在没有舍入误差的假设下，经过有限次运算就可得出方程组的精确解的方法，如各种消去法。迭代法则采取逐次逼近的方法，即从一个初始向量出发，按照一定的计算格式（迭代公式），构造一个向量的无穷序列，其极限才是方程组的精确解。用有限次运算得不到精确解。迭代法是牛顿最先提出的；1940 年，绍司威尔提出的松弛法也是一种迭代法；共轭梯度法则是另一种迭代法，是 R·弗莱彻等人于 20 世纪 60 年代提出的。

高次代数方程求根（finding roots of polynomial equation） 左边为多项式的方程

$$P_n(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

称为 n 次代数方程，又称多项式方程，其中 $n=1,2,\cdots,a_k$ 是实系数或复系数，$a_0 \neq 0$。当 $n>1$ 时，叫做高次代数方程，其次数就是 n。左边多项式的零点就是对应代数方程的根。

人们很早就探索了高次方程的数值解求法的问题。巴比伦泥板中有平方表和立方表，利用它们可解某些特殊的二次和三次方程；中国古人则相当系统地解决了求高次方程数值解的问题：《九章算术》以算法形式给出求二次方程及正系数三次方程正根的具体计算程序；7 世纪王孝通也给出求三次方程正根的数值解法；11 世纪贾宪《黄帝九章算法细草》创："开方作法本源图"，用"立成释锁法"解三次和三次以上的高次方程，同时他又提出一种更为简便的"增乘开方法"，在 13 世纪由秦九韶《数书九章》的"正负开方术"最后完成，提供了一个用算筹布列解任何数字方程的可行可计算的算法，可求出任意次代数方程的正根。阿拉伯人对高次代数方程的数值解法亦有研究，花拉子米（9 世纪人）第一个给出二次方程的一般解法，奥马·海亚姆（1100 年）给出一些特殊三次方程的解法。1541 年塔尔塔利亚得到三次方程的一般解法，1545 年卡尔达诺的名著《大术》一书发展了塔尔塔利亚的这一成果，并记载了费拉里得到的四次方程的一般解法。1736 年出版的牛顿的《流数法》一书中，给出著名的高次代数方程的一种数值解法，1690 年 J·拉福生也提出类似的方法，它们的结合就是现代常用的方法——牛顿法，是一种广泛用于高次代数方程和方程组求解的迭代法，亦称为切线法，一直为数学界所采用，不断产生新的变形，如修正牛顿法、拟牛顿法等。1797 年，高斯给出"代数基本定理"，指出高次代数方程根的存在性。1819 年，霍纳提出求高次方程数值解的另一种方法——霍纳法，其思想及计算程序与秦九韶的方法相近，类似的方法鲁非尼在 1804 年也提出过，霍纳法也有广泛的应用，它的现代改进形式叫做劈因子法。现在常用的高次代数方程数值解法还有伯努利法和劳思表格法等。

非线性方程组数值解法（nu-

merical method of system of nonlinear equation） n 个变量 n 个方程($n>1$)的方程组表示为

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

其中 f_i 是定义在 n 维欧氏空间 R^n 的开域 D 上的实函数，若 f_i 中至少有一个非线性函数，则称之为非线性方程组。

我国古人最早解决了一些非线性方程组的数值解法的问题：朱世杰的"四元术"(1303 年)解决了四元高次方程组的数值解法问题。由于迄今为止，对非线性方程组解的存在性的研究远不如线性方程组那样成熟，现有的解法也不象线性方程组那样有效。因而，朱世杰所用的某些"降阶"和"消元"方法现在仍有参考意义。非线性方程组可能有一个解或多个解，也可能有无穷多个解或无解。除了极特殊的情况外，一般不能用直接方法求得精确解，因而主要用迭代法求近似解。

求非线性方程组的近似解的迭代法是牛顿在其《流数术》一书(1736 年出版)中提出的，牛顿法的效率 $e(N_1)=\frac{ln2}{n^2+n}$。后来牛顿法有很多变形，其基本思想是将非线性问题逐步线性化而迭代求解。如 1847 年柯西就提出一种梯度—牛顿法，对牛顿迭代法作了改进，现代的奥特曼(1957)、基维斯蒂克(1960)等进一步改进过梯度牛顿法。20 世纪 50—60 年代，人们证明(马托斯、艾尔金等人作了重要工作)，解一个非线性方程组的问题，可以等价地换成求一个泛函 $g:DCR^n \to R^1$ 的极小化问题。在这一理论前提下，人们提出许多改进牛顿法，如阻尼牛顿法、下降牛顿法、离散牛顿法、SOR—牛顿法等。

K·布朗(1966)采用对每个分量 $f_i(x_1,\cdots,x_n)=0$ 逐个进行线性化并逐个消元的步骤，即在每个迭代步中都用三角分解求线性方程组的解，这样得出的迭代法称为布朗方法。其改进变形是 70 年代以来数值软件包中常用的求解非线性方程组的算法。其效率比牛顿法高一倍。

为了减少牛顿法的计算量，近 30 年来发展了一种拟牛顿法。第一个拟牛顿法是 W·C·戴维登于 1959 年提出来的，后来由 R·弗莱彻和 M·J·鲍威尔作了理论研究并在 1963 年发表，称为 DFP 方法，其后又有人提出 BFGS 方法，80 年代则提出信赖域方法等，这些都是拟牛顿法。它们比牛顿法计算量少，且具有超线性收敛速度，但实践表明，拟牛顿法的效率并不高于牛顿法，理论上亦需探讨。20 世纪 60 年代后发展起来的不动点算法也是一种著名的求非线性方程组数值解的较好的方法(见不动点算法)。此外，现代采用的非线性方程组数值解法还有割线法、连续法等等。

概率论(probability) 概率论是研究随机现象数量规律的数学分支。概率论的历史悠久，它的起源问题之一是赌博问题。16 世纪，意大利的一些学者开始研究掷骰子等赌博中的一些简单问题。17 世纪中叶法国数学家 B·帕斯卡、P·de·费马及荷兰数学家 C·惠更斯基于排列组合的方法研究了一些较复杂的

赌博问题，他们解决了“合理分配赌注问题”、“输光问题”等等。其方法是计算期望的赢值。1657年惠更斯在《论赌博中的计算》一文中首先提出了数学期望的概念。

使概率论成为数学一个分支的奠基人是瑞士数学家雅各布·伯努利，他考虑到了掷n粒骰子时所得点数总和等于m，这样场合的数目等于$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$的展开式中$x^m$这一项的系数，开了母函数方法的先河。他的重要贡献是建立了概率论中的第一个极限定理，即伯努利大数定律，发表在1713出版的遗著《猜度术》中。法国数学家A·棣莫弗在概率论发展史上很有成就，在1730年出版的著作《分析杂论》中包含著名的棣莫弗—拉普拉斯定理当$p=q=\frac{1}{2}$时的证明。这一结果后来被法国数学家拉普拉斯推广到一般的p的形式，这是概率论中第二个基本极限定理的原始形式。此外，棣莫弗还推导出关于$n!$的渐近公式，即所谓斯特林公式。拉普拉斯对概率论的发展贡献很大，他在系统总结前人工作的基础上，写出了《概率的分析理论》，于1812年出版。在这一著作中，首先明确地给出概率的古典定义，并在概率论中引入了有力的分析的工具，如差分方程、母函数等，从而实现了概率论由单纯的组合计算到分析方法的过渡，将概率论推向一个新的发展阶段。拉普拉斯和高斯等人建立的关于“正态分布”以及“最小二乘法”的理论，对于用概率论研究天文观测、大地测量和物理观测的结果起了重大作用。法国的泊松也是概率论发展史上的代表人物之一，他推广了伯努利形式下的大数定律，他的研究得到一种新的分布——泊松分布，著作有《关于民事审判的概率研究》和《打靶射击研究报告》。

继拉普拉斯之后，概率论的中心研究课题是推广和改进伯努利大数定律及中心极限定理。在这方面，俄国数学家П·Л·切比雪夫作出了突出的贡献，1866年，他用切比雪夫不等式建立了有关独立随机变量序列的大数定律。1867年，又建立了有关各阶绝对矩一致有界的独立随机变量序列的中心极限定理，但其证明不严格，后来由A·A·马尔可夫于1898年补证。1901年，A·M·利亚普诺夫利用特征函数的方法，对一类相当广泛的独立随机变量序列，证明了中心极限定理。他还利用这一定理第一次科学地解释了为什么实际中遇到的许多随机变量近似服从正态分布。继李亚普诺夫之后，A·Я·辛钦、A·H·柯尔莫哥洛夫、P·莱维及W·费勒等人在随机变量的极限理论方面作出了重要贡献。到20世纪30年代，有关独立随机变量序列的极限理论已臻完备。由于概率论问题与许多实际问题有密切的联系，特别是受物理学和技术问题的刺激，人们开始研究随机过程。1905年A·爱因斯坦和R·斯莫卢霍夫斯基各自独立地研究了布朗运动，他们用不同的概率模型求解了运动质点的转移密度。但直到1923年，N·纳维才利用三角级数首次给出了布朗运动的严格定义，并证明了布朗运动轨

道的连续性。1907年马尔可夫在研究相依随机变量序列时，提出了马尔可夫链的概念，1931年由于柯尔莫戈洛夫对这一概念的发展，才奠定了马尔可夫过程的理论基础。1934年，辛钦提出了在时间中均匀进行的平稳过程的相关理论。所有这些关于随机过程的研究，都是通过把概率问题化为微分方程或泛函分析等问题来解决的。从1938年开始，法国的P·莱维系统地研究了布朗运动，他着眼于随机过程的轨道性质，倡导了研究随机过程的一种新方法，即概率方法，取得了一些重要成果。此外，莱维对概率论的重要贡献是建立了独立增量过程的一般理论。他于1948年出版的著作《随机过程与布朗运动》是随机过程的一本经典著作。现代概率论的另外两个代表人物是J·L·杜布和伊藤清，杜布对鞅进行了系统研究并使之成为随机过程论的一个重要分支。伊藤清定义了对布朗运动的随机积分。

柯尔莫戈洛夫在概率论发展史上作出了重要贡献，1933年建立了在测度论基础上的概率论公理系统，奠定了近代概率论的基础。经过这些代表人物的工作，概率论走向了新的高峰。

从本世纪50年代开始，概率论进一步发展。在此以前，概率论主要把概率问题化为分析问题来解决，解决后再研究其概率含义，研究的重点是极限分布理论以及通过概率分布来研究随机过程。从50年代起概率论形成了自己的方法——随机分析方法，研究的重点是过程的样本性质。在现代化技术发展的影响下，概率论的理论和应用都有显著的发展，出现了理论概率与应用概率的分化。概率论的发展史说明了理论与实际之间的密切关系。许多研究方向的提出，归根到底是有其实际背景的，反过来，当这些方向被深入研究后，又可指导实践，进一步扩大和深化应用范围。今天，理论概率的一些重要分支的研究都很活跃，应用概率的发展也占有特别重要的地位。现在，概率论已被广泛应用于解决工农业生产、军事技术和科学技术中的问题。概率论同其它知识领域相结合产生了很多边缘学科，如生物统计、物理统计学以及统计预报等学科。将概率论方法应用于解决某一类问题又产生了一些新的数学分支，如排队论、信息论、控制论、随机运筹学等。电子计算机的产生和发展，给比较复杂的计算问题，提供了有力的工具，为概率论的发展开辟了广阔的场所。总之，现代概率论已经成为一个非常庞大的数学分支。

古典概率(classical probability)　古典概率讨论的对象局限于随机试验所有可能结果为有限个等可能的情形。这时基本空间 Ω 由有限个元素组成，其个数记为 n。若事件 A 包含 m 个基本事件，则定义 A 的概率 $P(A)=m/n$。这个定义是法国数学家P·S·拉普拉斯于1812年出版的《概率的分析理论》一书中首次明确给出的。称之为概率的古典定义。历史上有名的得分问题的解法是应用古典概率的一个典型例子：甲、乙二人各出同样的赌注，用

掷硬币作为博弈手段。每掷一次，若正面朝上，甲得 1 分，乙不得分；若反面朝上，乙得 1 分，甲不得分。谁先得到事先约定的分数，就赢得全部赌注。当进行到甲还差 2 分，乙还差 3 分，就分别达到约定分数时，他们不愿继续赌下去，问这时如何公平分配赌注?计算古典概率，可以用穷举法，但借助于组合计算可以简化计算过程。随着人们遇到问题的复杂程度的增加，基本空间中元素个数的有限性和等可能性暴露出它的弱点，人们针对不同的问题从不同角度计算出不同的概率，引进了几何概率和概率的频率定义。

概率的频率定义(**frequency definition of probability**) 在做大量重复试验时，随着试验次数的增加，一个事件出现的频率总在一个固定数值的附近摆动，显示出一定的稳定性，把这个固定的数值，定义为事件的概率，这就是概率的频率定义。这个定义是奥地利数学家 R·Von·米泽斯于 1919 年提出的。从应用角度看，频率定义可以克服等可能性观点不易解决的某些困难，但从理论上讲，这种定义方法是不够严谨的。概率论的进一步发展，要求人们从古典定义、几何定义、频率定义中吸取能反映规律性的本质性质，克服它们各自的局限性，抽象出一种合理的定义，把以前各种有实际意义的定义作为特例包含在内，这就是苏联数学家柯尔莫戈洛夫的概率公理化的定义。

概率论公理化体系(**system of axioms of probability theory**) 19 世纪，几何概率逐步发展起来。但到 19 世纪末，出现了一些自相矛盾的结果，如贝特朗悖论。这反映了几何概率的逻辑基础是不够严密的，同时也说明拉普拉斯关于概率的古典定义带有很大的局限性。虽然到了 19 世纪下半叶，概率论在统计物理学中的应用及概率论的自身发展已突破了概率的古典定义，但关于概率的一般定义则始终未能明确化和严格化。这种情况既严重阻碍了概率论的进一步发展和应用，又落后于当时数学的其他分支的公理化潮流。1900 年，德国数学家 D·希尔伯特在世界数学家大会上提出了建立概率论公理化体系的问题。最先从事这方面研究工作的有 H·庞加莱、E·波莱尔及 C·H·伯恩斯坦。他们提出的几种公理体系在数学上都不够严密。到了 30 年代，随着大数定律的深入研究，概率论与测度论的联系愈来愈明显。在这种背景下，苏联数学家 A·H·柯尔莫戈洛夫于 1933 年在他的《概率论基础》一书中首次给出了一套严密的概率论公理体系，得到举世公认。它的出现，是概率论发展史上的一个里程碑，为现代概率论的蓬勃发展打下了坚实的基础。

数学期望(**mathematical expectation**) 又称均值，是随机变量按概率的加权平均，表征其概率分布的中心位置。概率论发展初期，研究的问题大多与赌博有关。有一赌者梅累向法国数学家帕斯卡提出一个使他苦脑很久的问题:“两个赌徒相约赌若干局，谁先赢 S 局就算赢了，现在赌徒 A 赢 a 局($a<S$)，而赌徒 B 赢 b 局($b<S$)时赌博中止

了,问赌本应如何分法?"帕斯卡将这个问题和他的解法寄给费马,这是1654年7月29日的事情。费马也从不同的理由出发给出正确的解法。他们的解法首先涉及到数学期望的概念,解法的基础都是按赢得整局赌博的概率的比例来分赌本这个原则。巴斯卡在"关于算术三角形"一文中提出的一般解法是,令 $m=S-a$, $n=S-b$,于是赌徒 A 与 B 之间赌本应按比例

$$\frac{C_{m+n-1}^{0}+C_{m+n-1}^{1}+\cdots+C_{m+n-1}^{n-1}}{C_{m+n-1}^{0}+C_{m+n-1}^{1}+\cdots+C_{m+n-1}^{m-1}}$$

来分。1657年荷兰数学家惠更斯是从与帕斯卡差不多的理由出发解决了这一问题,即:如果某人在 $u+v$ 个等概率的场合中有 u 个场合可赢得 α,而有 v 个场合可赢得 β,则他所期望的收入可用

$$\frac{u\alpha+v\beta}{u+v}$$

来估计。这是以比巴斯卡更为明显的形式导出了数学期望的概念。

中位数与分位数(quantile of order and median) 设 X 是随机变量,同时满足 $P\{X\leqslant x\}\geqslant\frac{1}{2}$ 及 $P\{X\geqslant x\}\geqslant\frac{1}{2}$ 二式的实数 x 称为 X 的中位数。给定 $0<\alpha<1$,随机变量 X 的上 α 分位数是指同时满足下列两个条件的数 x_α:

$P\{X\leqslant x_\alpha\}=1-\alpha, P\{X\geqslant x_\alpha\}=\alpha$。

$x_{1-\alpha}$ 又称为 X 的下 α 分位数。中位数与分位数的概念是英国生物统计学家S·F·高尔顿最早提出的。

正态分布(hormal distribution) 最重要的一种概率分布。1733年法国数学家A·棣莫弗用 $n!$ 的近似公式最早得到了正态分布,作为二项分布的近似。C·F·高斯在研究测量误差时从另一个角度导出了它,并研究了正态分布的性质,因此,人们也称正态分布为高斯分布。P·S·拉普拉斯也研究了它的性质。生产与科学实验中很多随机变量的概率分布都可以近似地用正态分布来描述。一般来说,如果一个量是由许多微小的独立随机因素影响的结果,那么就可认为这个量具有正态分布。从理论上看,正态分布具有很多良好的性质,许多概率分布可以用它来近似,还有一些常用的概率分布是直接由它导出的。

母函数(generating function) 它是代替特征函数专门用于研究非负整值随机变量的一个有用的数学工具,历史上它的引进比较早。瑞士数学家雅各布·伯努利考虑了掷 n 粒骰子时所得点数总和等于 m,这样场合的数目等于 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$ 的展开式中 x^m 这一项的系数,开了母函数的先河。继伯努利之后,欧拉在研究自然数的分解与合成时,使用了母函数方法,奠定了这一方法的基础。法国数学家拉普拉斯,在1812年出版的《概率的分析理论》一书的第一部分论述了母函数计算的数学方法及其一般数学理论,试图以母函数理论作为概率论的基础。现在母函数方法不仅在概率论的有关计算中很有效,而且已成为组合数学中一种重要的计数方法。此外,在有限差计算、特殊函数论等数学领域中都有广泛的应用。

特征函数(characteristic function) 对随机变量的分布函数作傅里叶—斯蒂尔杰斯变换,就得到特征函数。设$F(x)$是随机变量X的分布函数,则称

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}dF(x)=Ee^{itx},(t\in R)$$

为$F(x)$或X的特征函数。它具有很好的性质,因此在研究随机变量之和及概率分布时起着十分重要的作用。特征函数概念的引进比较早。法国数学家P·莱维于1919年重新发现并完善了特征函数理论之后,它被用来完整地解决了普遍极限定理,并深入地研究了独立增量过程。

切比雪夫不等式(Chebyshev inequality) 若随机变量的数学期望、方差分别为EX及DX,则对任何$\varepsilon>0$,成立$P(|X-EX|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}$。这一不等式是证明弱大数律的重要工具。1853年,法国数学家比安内梅在他的论文中已有类似的表述,但直到1867年才由俄国数学家切比雪夫明确叙述和论证。它对随机变量的分布并无特殊要求,仅利用X的方差来对X的取值与EX发生较大偏离的概率作出估计,因而有较广泛的应用性。关于大数定律的一些定理的证明都直接或间接地用到切比雪夫不等式,如切比雪夫定理、伯努利定理、辛钦定理和马尔可夫定理等。

柯尔莫戈洛夫不等式(Kolmogorov inequality) 设$\{X_k,1\leqslant k\leqslant n\}$是相互独立的随机变量,它的数学期望,方差分别为$EX_k=0,DX_k=\sigma_k^2$,又$S_k=\sum_{i=1}^{k}X_i$,则对任何$\varepsilon>0$,成立不等式

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}ES_n^2=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2。$$

若X_k还是有界的,即$|X_k|\leqslant C$以概率1成立,则还有

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon)\geqslant1-\frac{(C+\varepsilon)^2}{ES_n^2}。$$

这两个不等式是由苏联数学家A. H.柯尔莫戈洛夫在1928年建立的,它是证明强大数定律的重要工具。

大数律(laws of large number) 概率论中讨论随机变量序列的算术平均值向常数收敛的定律。历史上,瑞士数学家雅各布·伯努利在巨著《猜度术》(1713年出版)中首先证明了"伯努利定理",这是大数律最早的形式。大数律的名称是法国数学家S·D·泊松于1837年给出的。大数律中最重要的一类是讨论独立试验序列的。常见的除了伯努利大数律外,还有苏联数学家辛钦1929年提出的辛钦大数律;法国数学家波莱尔1909年给出的波莱尔强大数律及柯尔莫戈洛夫强大数律等。大数律中涉及到的随机变量序列也可以不是相互独立的。特别对于平稳序列,有所谓平稳序列的遍历性,也是一类大数律。在平稳过程理论中,辛钦和美国数学家伯克霍夫分别建立了有关的遍历定理。

中心极限定理(central limit theorem) 概率论中讨论随机变量序列部分和的分布渐近于正态分

布的一类定理。1920年，G·波伊亚称这类定理为中心极限定理。历史上最初的中心极限定理是讨论n重伯努利试验中，事件A出现的次数渐近于正态分布的问题。1716年前后，A·棣莫弗和P·S·拉普拉斯分别就特殊和一般情形得到棣莫弗—拉普拉斯定理。A·M·李亚普诺夫于1900年给出了独立随机变量序列服从中心极限定理的李亚普诺夫条件，建立了李亚普诺夫定理。他最先系统地应用了特征函数方法，从此变成了概率论的基本方法之一。随着特征函数的引入，中心极限定理的研究得到了很快的发展。20世纪20年代，Y·W·林德伯格和P·莱维证明了林德—莱维定理。1935年，林德伯格和W·费勒又进一步解决了独立随机变量序列的中心极限定理的一般情形，即林德伯格—费勒定理。其结果使长期以来作为概率论中心议题之一的关于独立随机变量序列的中心极限定理得到根本解决。

此后中心极限定理的研究基本上围绕几个方面进行：一是减弱对随机变量独立性的要求，考虑具有某种相依性的随机变量；一是讨论向标准正态密度函数收敛问题及估计收敛的速度问题。

向正态密度函数收敛的问题虽然在概率论的早期工作中就出现了，但是一般性的结果直至20世纪中期才得到。当独立随机变量序列$\{X_n\}$的标准化部分和S_n^*的密度函数$P_n(x)$存在时，讨论$P_n(x)$向标准正态密度函数$\varphi(x)$收敛的问题，称为局部极限定理。苏联数学家Б·В·格涅坚科于1953年对独立同分布情形给出了充分必要条件。在一定假设下，对于独立非同分布情形，由B·B·彼得罗夫给出了充分必要条件。

相依随机变量的中心极限定理至今仍是许多学者研究的课题，其中讨论较多的有m相依随机变量序列、强平稳随机变量序列、鞅、马尔可夫过程及其它泛函，以及各种类型的统计量序列。

为了讨论向正态分布收敛的速度，20世纪40年代，先后由A·C·贝里及C·G·埃森给出了埃森不等式，用它可以精确估计向正态分布收敛时的误差。这方面的研究现今已相当深入。

早在20世纪30年代，就开始讨论普遍极限定理，这是独立随机变量和的极限定理的一般提法，到40年代中期，已获得较完满的解决。在这方面作出贡献的学者有辛钦、格涅坚科、许宝騄等。

极限定理是概率论的重要内容，也是数理统计的基础之一，其理论成果也比较完美。长期以来，对于极限定理的研究所形成的概率论分析方法，影响着概率论的发展。同时新的极限理论问题也在实际中不断产生。

条件期望(**conditional expectation**)　随机变量按条件概率的平均。研究随机事件之间的关系时，在已知某些事件发生的条件下来考虑另一些事件的统计规律是十分重要的。在概率论发展的初期就已引进并应用了简单情形下的条件概率。1933年，苏联数学家A.H.柯尔

莫戈洛夫给出了一般情形下的条件概率与条件期望的严格定义,这使概率统计的一些重要内容建立在严密的基础上,例如数理统计中的充分统计量、贝叶斯统计都用到这一概念。马尔可夫过程和鞅论的整个内容更是离不开对条件概率和条件期望的研究。因而它已成为近代概率论与数理统计学中的重要的基本概念。

随机过程(**stochastic process**) 随时间推进的随机现象的数学抽象。设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,T为指标t的集合,如果对每个$t\in T$,有定义在Ω上的实随机变量$X(t)$与之对应,就称随机变量族$X=\{X(t),t\in T\}$为一随机过程。

人们对一些特殊的随机过程早有研究。1907年前后,俄国数学家A·A·马尔可夫提出并研究一种能用数学分析方法研究自然过程的一般图式,后人称这种图示为马尔可夫链。1923年,美国数学家N.维纳从数学上定义了布朗运动,后来也称数学上的布朗运动为维纳过程。这种过程至今仍是随机过程的重要研究对象。通常认为,随机过程一般理论的研究于20世纪30年代才开始。1931年,苏联数学家A·H·柯尔莫戈洛夫发表了《概率论的解析方法》;1934年,A·Я·辛钦发表了《平稳过程的相关理论》。这两篇重要论文为马尔可夫过程和平稳过程奠定了理论基础。稍后,法国数学家P·莱维从样本函数角度研究随机过程,引进一般可加过程并研究了它的样本函数结构。出版的关于布朗运动与可加过程的两本书中蕴含着丰富的概率思想。1953年,美国数学家J·L·杜布出版的著作《随机过程论》中系统且严格地叙述了随机过程的基本理论。他的工作推动了鞅理论的发展。1953年日本数学家伊藤清建立了关于布朗运动的随机微分方程的理论,定义了对布朗运动的一种随机积分——伊藤积分,为研究马尔可夫过程开辟了新的道路。近年来由于鞅论的进展,人们讨论了关于半鞅的随机微分方程,而流形上的随机微分方程理论,正方兴未艾。60年代,法国学派基于马尔可夫过程和位势理论中的一些思想与结果,在相当大的程度上发展了随机过程的一般理论,包括截定理与过程的投影理论等,中国学者在平稳过程、马尔可夫过程、鞅论、极限定理、随机微分方程等方面都做出了较好的工作。

马尔可夫过程(**Markov process**) 一类重要的随机过程:在已知它目前的状态(现在)的条件下,它未来的演变(将来)不依赖于它以往的演变(过去)。这种已知"现在"的条件下,"将来"与"过去"独立的特性称为马尔可夫性,具有这样性质的随机过程叫做马尔可夫过程。它的原始模型马尔可夫链,最初由俄国数学家A·A·马尔可夫于1907年提出。1931年苏联数学家A·H·柯尔莫戈洛夫发表了《概率论的解析方法》,首先将微分方程等分析方法用于马尔可夫过程,做了这类过程理论的奠基工作。1951年前后,日本数学家伊滕清在法国数学家P·莱维和苏联数学家C·H·伯恩斯坦等人工作的基础上,建

立了随机微分方程理论为研究马尔可夫过程开辟了新的途径。1954年前后,南斯拉夫—美国数学家W·费勒将泛函分析中的半群方法引入马尔可夫过程的研究中,苏联数学家E·Б登金等并赋予它概率意义。50年代初,美国数学家J·L·杜布等发现了布朗运动与偏微分方程论中狄利克雷问题的关系,后来G·A·亨特研究了相当一般的马尔可夫过程与位势的关系。目前,流形上的马尔可夫过程、马尔可夫场等都是正待深入研究的领域。此外,中国—美国数学家钟开莱、中国数学家侯振挺、王梓坤对马尔可夫过程的研究很有特色,发展和建立一些新的理论和方法。

平稳过程(**stationary process**) 统计特性不随时间的推移而变化的随机过程。平稳过程的基本理论是在20世纪30～40年代建立和发展起来的,并已相当完善。1934年苏联数学家辛钦发表了《平稳过程的相关理论》一文,为平稳过程奠定了理论基础。其后的研究主要是向某些特殊类型以及多维平稳过程、平稳广义过程和齐次随机场等方面发展。平稳过程理论在无线电技术和自动控制等领域有着广泛的应用,并且是诸如时间序列分析、信号分析、滤波、预测理论以及控制理论等应用学科的重要工具。将傅立叶分析方法应用于宽平稳过程,可以把过程表成有不相关随机振幅的简谐振动的叠加,这就产生了过程按频率的谱分解,它是宽平稳过程的一个基本结果,由此可以推出一些重要的结论,例如均方大数律。柯尔莫戈洛夫和维纳在1940年左右提出并解决了一维宽平稳过程的线性预报问题。关于多维宽平稳过程的线性预测问题,也有类似一维的结果。平稳过程的线性预测理论,后来又被许多人所研究。这个理论是平稳过程论当中有重要地位的一个分支、它从通讯、电工学开始被应用于各个方面。齐次随机场是一种平稳过程,它在力学的湍流理论中很有用,齐次场的线性预测问题比宽平稳过程的情形要复杂得多,中国学者江泽培开始了这方面的工作,并有一定成果。

鞅(**martingale**) 一类特殊的随机过程。起源于对公平赌博过程的数学描述。martingale一词原义之一是表示一种赌输一局后加倍下注的策略,此处则是借用这个词的另一译义"鞅"(马颔缰的古称)作为这类随机过程的名称。P·莱维等人早在1935年就发表了一些孕育着鞅论的工作。1939年,J·维莱首次采用了鞅这个名称。但对鞅进行系统研究并使之成为随机过程理论的一个重要分支的,则应归功于J·L·杜布。鞅论的一些基本定理和方法已经日益成为研究各类随机过程的有力工具。

独立增量过程(**process with independent increment**) 在任何一组两两不相交区间上其增量都相互独立的随机过程,又称为可加过程。人们最早知道的独立增量过程是在物理现象中观察到的布朗运动和泊松过程。一般的独立增量过程是法国数学家P·莱维引进的。它在20世纪40年代已臻成熟,其中

包含了许多重要的方法和概念，概率论的许多近代研究课题都直接或间接地受其启发与影响。

布朗运动(**Brownian motion**) 又称维纳过程。1927年，英国植物学家R·布朗观察到悬浮在液体中的微粒子作不规则的运动，这种运动的数学抽象，就叫做布朗运动。1905年，A·爱因斯坦求出了粒子的转移密度。1923年美国数学家N.维纳从数学上严格定义了一个随机过程来描述布朗运动。布朗运动的起因是由于液体的所有分子都处在运动中，且相互碰撞，从而粒子周围有大量分子以微小但起伏不定的力共同作用于它，使它被迫作不规则运动。维纳的一个重要结果，是证明了布朗运动或维纳过程的存在性。这样的过程是独立增量过程，因而是马尔可夫过程，而且还是鞅和正态过程。

随机过程的极限定理(**limit theorems of stochastic process**) 讨论一列随机过程的概率分布和样本函数极限性质的一类定理。1946年匈牙利数学家P·爱尔特希和波兰—美国数学家M·卡茨在讨论独立同分布随机变量序列的部分和的某些连续泛函的极限分布时，发现其极限分布不随原始分布的变化而改变，以后称这种性质为“爱尔特希—卡茨不变原理”。1949年美国数学家J·L·杜布指出柯尔莫戈洛夫—斯米尔诺夫统计量的极限分布与布朗桥的上确界的分布相同，这一事实引起概率统计学界的注意。1951年M·唐斯克首先证明了以他的名字命名的唐斯克不变原理。它所含的内容相当丰富，由它容易推出“爱尔特希—卡茨不变原理”与中心极限定理。1952年唐斯克还对杜布指出的结论给出了严格的证明。虽然唐斯克不变原理仅仅讨论了特殊的部分和过程的弱极限，但是它开了一般随机过程弱收敛问题研究的先河。

随机过程弱收敛的基本问题是寻求度量空间上概率测度列弱收敛到概率测度P的充分必要条件。苏联数学家Ю·B·普罗霍罗夫等人分别就具体的度量空间给出了充分必要条件。这样，如何验证概率测度族的相对紧性就成为验证概率测度列弱收敛的关键。1956年普罗霍罗夫证明了以他的名字命名的定理，是这方面的重要结果。

1964年，V·斯特拉森证明了斯特拉森定理，这个定理讨论的是随机过程序列概率为1的极限性质，而这一性质不随随机变量序列的公共分布而改变，故称为“强不变原理”，1965年，斯特拉森把他的结果推广到鞅情形，后来又被推广到随机变量序列为各种相依的情形。

随机过程统计(**statistics of stochastic process**) 根据观测对随机过程进行统计推断的理论与方法。早在数理统计学发展的初期，人们就已对随时间推移的观测结果运用各种统计分析方法来研究，但当时的研究还仅限于相互独立观测的情形。20世纪30年代，由于描述社会或市场上某些经济指标变化的需要，必须对不独立的观测结果进行分析，但起初也只是对离散时间观测的情形讨论。40年代以后，由于

无线电技术中信号检测与信号参数估计的需要，提出了许多有关连续观测随机过程的统计问题。随机过程的统计推断这一课题是U·格里南德于1951年明确提出的，并指出数理统计中的最大似然估计，似然比检验等方法原则上可用于随机过程的统计推断，但一个关键问题是，要给出随机过程的不同概率分布之间相互绝对连续与奇异条件，以及概率分布间的密度。由于过程统计的需要，这一问题在以后引起相当的重视和做了大量的工作，对于各类重要的过程都先后讨论了这一问题。在分布间具有密度的条件下，就可沿用数理统计的做法。另外，过程统计也仿照数理统计中处理线性统计模型的方法。由于这类统计方法要求较宽，便于应用，所以发展迅速，也愈广泛地被应用。

滤波（**filtering**） 根据观测某一随机过程的结果，对另一与之有关的随机过程进行估计的概率理论与方法。滤波一词起源于通信理论，它是从含有噪声或干扰的接收信号中提取有用信号分量的一种技术。历史上最先考虑的是宽平稳过程的线性预测和滤波问题。1939～1941年，苏联数学家A·H·柯尔莫戈洛夫利用平稳序列的沃尔德分解，给出了线性预测的一般理论与处理方法，随即被推广到连续时间的平稳过程。美国数学家N·维纳则在1942年对于平稳序列与过程的谱密度存在且满足某种正则条件的情形，利用谱分解导出了线性最优预测和滤波的明显表达式，即维纳滤波公式。上述模型在50年代被推广到仅在有限时间区间内进行观测的平稳过程以及某些特殊的非平稳过程。至今它仍是处理各种动态数据及预测未来的有力工具之一。由于高速电子计算机的发展以及测定人造卫星轨道和导航等技术问题的需要，R·E·卡尔曼与R·S·布西于20世纪60年代初期提出了一类新的线性滤波的模型与方法，通称为卡尔曼滤波。卡尔曼滤波也有多种形式的推广，并获得了日益广泛的应用。与卡尔曼滤波类似，人们也希望能给出非线性滤波的某种递推算法或它所满足的随机微分方程。但一般它们并不存在。非线性滤波的研究工作相当活跃，它涉及随机过程论的许多近代成果。目前对于一类所谓“条件正态过程”已经给出了非线性最优滤波的可严格实现的递推算式。

数理统计学（**mathematical statistics**） 数理统计学是研究大量随机现象的统计规律性的数学学科。其核心问题是根据从总体中随机抽出的样本里所获得的信息来推断总体的性质。

数理统计学的发展可分为三个时期。

20世纪以前，是数理统计学的萌芽时期。这个时期，总的说没有超出描述性统计的范围。历史上最早出现的统计推断可以看作是英国统计学家J·格兰特在1662年组织调查伦敦市死亡人数，从数量上去掌握集团的统计推断，并发表专著《从自然和政治方面观察死亡统计表》。因此，数理统计学可认为是格兰特于17世纪60年代开创的。格

兰特对生命统计，保险统计及经济统计进行数学的研究。这一学问曾被称为“政治算术”。他由统计的结果发现人口出生率与死亡率相对稳定，于是提出“大数恒静定律”，成为统计学的基本原理。

由于需要对各地人口、农业生产品及国际贸易数量的估计，亟待若干形式的测定数作为处理问题的根据，并需要科学的方法，对测定数进行分析。于是统计学的数学性质逐渐加深，奠定了现代数理统计学的基础。

这个时期，在概率论方面有较多的发展，必然影响到数理统计学的发展。现在人们所理解的统计推断程序，最早的就是贝斯方法。T·贝斯在 1763 年发表的《论有关机遇问题的求解》对后世的统计思想影响很大。

19 世纪初开始用概率模型进行数据分析。高斯和勒让德首先把最小二乘法用于分析天文观测中的误差。20 世纪以来，最小二乘法经过俄国数学家马尔可夫和其他学者的工作，成为数理统计学中的一个重要方法。

19 世纪中叶，许多数理统计学理论的新发展，几乎直接或间接地由两个人所推动。一个是比利时统计学家 A·凯特勒，一个是英国生物学家S·E·高尔顿。凯特勒的主要功绩在于使统计方法获得普遍应用。他对天文学、数学、物理学、生物学、社会统计学及气象学等均有研究，将统计方法应用到上述研究范围上去，并强调了正态分布的用途，主张这一分布状态可以适用于许多学科范畴。凯特勒曾致力于比利时国势调查以及组织国际统计活动。他引进所谓“平均人”的概念，起了总体概念的先驱作用。高尔顿最早把统计方法应用于生物学。他曾到非洲考察和探险，搜集了大量资料，并投入很大精力钻研资料中所隐藏的模型与关系。在 1889 年出版了《自然的遗传》一书，引进了回归直线、相关系数的概念，创立了回归分析。此外，高尔顿还提出了中位数、四分位数、百分位数及四分位偏差等概念。

爱尔兰经济学家、统计学家 E·Y·埃奇沃思关于方差和或然误差的一系列文章也是这一时期的工作。

从 19 世纪末到第二次世界大战结束，可认为是数理统计学发展的第二个时期。数理统计学蓬勃发展，日渐成熟，提出一些带根本性的重要概念和方法，一些基本分支形成。

英国数学家 K·皮尔逊将数理统计应用于生物遗传和进化诸问题，得到生物统计学和社会统计学的一些基本法则，进一步发展了回归和相关的理论。术语“总体”、“众数”、“标准差”、“变差系数”都是他引进的。他在 1900 年提出了检验拟合优度的 χ^2 统计量，并证明其极限分布是 χ^2 分布。这个结果是大样本统计的先驱性工作。

1908 年，英国学者 W·S·戈塞特导出了 t 统计量的精确分布形式。它不仅成为数理统计学常用的工具，而且也是统计量精确分布理论中一系列主要结果的开端，特别

在多元正态总体抽样分布方面有重要意义。因此，可以说戈塞特的工作为样本资料的统计分析与解释开辟了一个新纪元。

英国学者R·A·费希尔对现代数理统计学的形成和发展作出了决定性的贡献。他是一些有重要理论和应用价值的统计分支和方法的开创者，他的《理论统计的数学基础》是现代数理统计学的奠基作之一。他引进了解消假设和显著性检验的概念，成为假设检验理论的先驱，并列举了一致性，有效性和充分性，作为参数估计量应具备的性质；建立了以最大似然估计为中心的点估计理论；与F·耶茨合作创立了实验设计。他凭借随机化的手段，成功地把概率模型带进了实验领域，并作为分析这种模型的一个方法，建立了方差分析法。

美国学者J·奈曼与K·皮尔逊之子E·S·皮尔逊在1928～1938年期间对假设检验作了系统和深入地研究，发表了一系列文章，建立了假设检验的严格数学理论。奈曼引进了检验功效函数概念，以此作为判断检验程序好坏的标准。奈曼的另一项重要贡献是在1934～1937年间建立的置信区间估计理论，并把它应用于遗传学、医学诊断、天文学、气象学和农业试验方面，取得了许多成果。

我国著名数理统计学家许宝騄在20世纪数理统计史上享有盛名。他在多元分析领域以及线性模型的统计推断理论方面，都作出了奠基性工作。

1925～1930年间，英国数学家G·U·尤尔研究了振荡的时间序列，引进了自回归和序列相关等重要概念，奠定了时间序列分析这个统计分支的现代发展基础。

1946年，瑞典统计学家H·克拉默发表了《统计学的数学方法》一书，对二次大战前数理统计发展的大部分工作作出了扼要的总结。

第二次世界大战以后是数理统计学发展的第三个时期。这一时期，数理统计学在应用和理论两方面继续深入发展。战后，由于经济和军事技术上的飞速发展以及电子计算机的出现，使统计方法的应用范围十分广泛。如在工业上应用统计质量管理，并由此产生了抽样检验、管理图等方法，其它如试验设计、多元分析、时间序列分析等也找到了不少新的应用领域。

战后统计理论是沿着纵深的方向和使用更加复杂的数学工具的方向发展的。在许多情况下，是把战前已有发端的理论引向深入与完善，显著的表现是在大样本理论方面。例如，最大似然估计和非参数统计的大样本理论，在战前只有初步结果，现已达到完善的地步。

1950年，美国学者A·瓦尔德创立了统计决策理论，它是统计学的统一数学理论。它把推断程序的全体命名为判决函数空间，第一次明确地定义它为一个集合，这样一来，检验和估计等数理统计问题可用统一方法处理。这种理论对战后数理统计各分支的发展产生了程度不同的影响，开拓了统计学一些新的研究领域，特别是参数估计这个分支在其影响下，面貌有了很大变

化。

贝叶斯统计学派影响的增长是战后数理统计发展的另一特征。因为贝叶斯方法是在作统计推断前考虑和运用了事前经验，并提供了一种易于实用者掌握的解决问题的方法，在应用上取得相当的地位，一些学者的专著中，贝叶斯方法仍占有很大篇幅，并且以贝叶斯方法为工具研究的统计问题也日渐增多。贝叶斯统计在理论上的进展以及它在应用上的方便和效益，使其观点为更多的人所了解和接受。尽管如此，贝叶斯统计始终是统计界争论的问题。

电子计算机的广泛应用，也对战后数理统计学的发展产生了不小的影响。有了计算机，过去停留在理论上的方法得以付诸实施，而这又反过来促进人们提出和解决一些理论上的问题。

统计量(**statistic**) 样本的已知函数，其作用是把样本中有关总体的信息汇集起来，是数理统计学中一个重要的基本概念。常用统计量有样本矩，次序统计量、U统计量和秩统计量等。其中U统计量是W·霍夫丁于1948年引进的。统计量的充分性和完全性是两个重要概念，充分性是费希尔在1925年引进的，J·奈曼和P·R·哈尔莫斯在1949年严格证明了一个判定统计量充分性的方法，叫因子分解定理。统计量的分布叫抽样分布，它的研究是数理统计中的重要课题。对一维正态总体，有三个重要的抽样分布，即χ^2分布、t分布和F分布。其中χ^2分布是F.赫尔梅特于1875年在研究正态总体的样本方差时得到的；t分布是英国统计学家W·S·戈塞特(笔名“学生”)于1908年提出的；F分布是费希尔在20世纪20年代提出的。

实验设计法(**Method of design of experiments**) 又称试验设计法。数理统计学的一个分支，研究如何制定实验方案，以提高实验效率，缩小随机误差的影响，并使实验结果能有效地进行统计分析的理论与方法。英国统计学家费希尔于1923年与梅克齐合作发表了第一个实验设计的实例，1926年提出了实验设计的基本思想，1935年出版了费希尔的名著《实验设计法》，其中提出了实验设计应遵循三个原则：随机化、局部控制和重复。费希尔最早提出的设计是随机区组和拉丁方方法，两者都体现了上述原则。1946年，英国统计学家芬尼在保证能估计全部主效应和少数一部分低阶交互作用的前提下，提出了部分实施法。正交表是进行部分实验法最方便的一种工具，日本统计学家田口玄一为正交表的形式和广泛应用作出了在国际上很有影响的工作。

点估计(**point estimation**) 总体未知参数估计的一种形式。目的是依据样本估计总体分布所含未知参数或未知参数的函数。构造点估计的方法常用的有矩估计法、最大似然估计法、最小二乘法和贝叶斯估计法。1894年英国统计学家皮尔逊提出的矩估计法，要旨是用样本矩的函数估计总体矩的同一函数。最大似然估计法是一种重要而普遍

的点估计法，由英国统计学家费希尔在 1912 年提出的，后来在他的 1921 年和 1925 年的工作中又加以发展。最小二乘估计法是由德国数学家高斯在 1799—1809 年和法国数学家勒让德在 1806 年提出的，并由俄国数学家马尔可夫在 1900 年加以发展。它主要用于线性统计模型中的参数估计问题。贝叶斯估计法是基于“贝叶斯学派”的观点而提出的估计法。英国学者贝叶斯 1763 年在《论有关机遇问题的求解》中，提出了一种归纳推理的理论，以后被一些统计学者发展成为一种系统的统计推断方法，称为贝叶斯方法。认为贝叶斯方法是唯一合理的统计推断方法的统计学者组成“贝叶斯学派”，它形成于 20 世纪 30 年代。到 50—60 年已发展成为一个很有影响的学派。

区间估计（**interval estimation**） 总体参数估计的一种形式。通过从总体中抽取的样本，根据一定的正确度与精确度的要求，构造出适当的区间，以作为总体的分布参数（或参数的函数）的真值所在范围的估计。1934 年，由美国统计学家奈曼创立了一种严格的区间估计理论，给出了置信系数和置信区间的概念。20 世纪 30 年代初期英国统计学家费希尔提出了一种构造区间估计的方法，称之为信任推断法。另外，贝叶斯方法也是一种构造区间估计的方法。

假设检验（**hypothesis testing**） 又称统计假设检验，是一种基本的统计推断形式，也是数理统计学的一个重要分支。在假设检验中，有一种检验方法称为显著性检验。它是依据实际数据与理论假设 H_0 之间的偏离程度来推断是否拒绝 H_0 的检验方法。拟合优度检验是一类重要的显著性检验。英国统计学家皮尔逊在 1900 年提出的 χ^2 检验是一个拟合优度检验。苏联数学家柯尔莫戈洛夫和斯米尔诺夫在 20 世纪 30 年代的工作开辟了非参数假设检验的一个方面，分别得到柯尔莫戈洛夫和斯米尔诺夫检验，都是重要的拟合优度检验方法。美国学者奈曼和皮尔逊之子 E·S·皮尔逊在前人工作的基础上，于 1928—1938 年间对假设检验作了系统和深入地研究，发表了一系列文章，建立了假设检验的严格数学理论。奈曼引进了检验功效函数的概念，以此作为判断检验程序好坏的标准。奈曼与 E·S·皮尔逊在 1933 年提出了著名的奈曼—皮尔逊引理，是对简单假设寻求最大功效检验的一个构造性的结果。运用与最大似然估计类似的原理，可得到似然比检验法。在一般情况下，寻求似然比的精确分布并不容易。1938 年，美国统计学家威尔克斯建立了有关似然比的一个统计量，并证明了它渐近 χ^2 分布，这就为大样本的似然比检验提供了实行的可能。用似然比法导出的 U 检验、t 检验和 F 检验，都是假设检验中的重要检验法。

统计决策理论（**statistical decision theory**） 一种数理统计学的理论。这种理论把数理统计问题看成是统计学家与大自然之间的博弈，用这种观点把各种各样的统计问题统一起来，以对策论的观点来

研究。这一理论的创立是数理统计学上的一次革新，拓广了统计学的内容范围，有较大的实际意义。美国统计学家瓦尔德，1939年开始探讨这一理论，提出一般的判决问题，引进了损失函数、风险函数、极小极大原则和最不利先验分布等重要概念。他于1950年出版了专著《统计决策函数》(中译本，上海科技出版社，1960)，系统地总结了他在这一理论研究中的成果。同时也宣布统计决策理论的正式创立。瓦尔德的理论受到统计学界的重视，成为二次大战后统计学史上一个重大事件。1950年以后的几十年在这方面做了不少工作，同时，这种理论对数理统计各分支的发展产生了程度不同的影响，特别是参数估计这个分支在其影响下，面貌有了很大变化。

序贯分析（**sequential analysis**） 数理统计学的一个分支。其名称源出于美国统计学家瓦尔德在1947年发表的一本同名著作。它研究的对象是所谓“序贯抽样方案”，及如何用这种抽样方案得到的样本去作统计推断。美国统计学家道奇和罗米格的二次抽样方案是较早的一个序贯抽样方案。1945年，施坦针对方差未知时估计和检验正态分布的均值的问题，也提出了一个二次抽样方案，据此序贯抽样方案既可节省抽样量，又可达到预定的推断可靠程度及精确程度。第二次世界大战时，为军需验收工作的需要，瓦尔德发展了一种一般性的序贯检验方法，叫序贯概率比检验，此法在他的1947年的著作中有系统的介绍。瓦尔德的这种方法提供了根据各次观测得的样本值接受原假设 H_0 或接受备择假设 H_1 的临界值的近似公式，也给出了这种检验法的平均抽样次数和功效函数，并在1948年与美国统计学家沃尔弗维茨一起，证明了在一切两种错误概率分别不超过 α 和 β 的检验类中，上述序贯概率比检验所需平均抽样次数最少。瓦尔德在其著作中也考虑了复合检验的问题，有许多统计学者研究了这种检验。瓦尔德的上述开创性工作，引起了许多统计学者对序贯方法的注意，并继续进行工作，从而使序贯分析形成为数理统计学的一个分支。除了检验问题以外，序贯方法在其他方面也有不少进展，如在一般的统计决策问题，点估计方面，区间估计方面都有不少工作。

线性统计模型（**linear statistical model**） 数理统计学中研究变量之间关系的一种模型，其中未知参数仅以线性形式出现。主要包括线性回归分析、方差分析和协方差分析。线性回归模型是最简单的模型。高斯在19世纪初引进的最小二乘法成为线性模型统计分析的工具，俄国数学家马尔可夫在20世纪初完成了这种模型的奠基工作。1923年，英国统计学家费希尔，凭借随机化的手段，成功地把统计模型带进实验领域，并作为分析这种模型的一个方法，建立了方差分析法。线性模型在实用上有重要意义。在理论上，近年来也有不少新发展，如在对回归系数的估计上，发展了有偏估计、稳健估计、非参数估计及序贯估计等方法。在大样本理论方

面取得了广泛而深入的结果。

多元统计分析(multivariate statistical analysis) 当总体的分布是多维概率分布时,处理该总体的数理统计理论和方法。数理统计学的一个重要分支,早在19世纪就出现了处理二维正态总体的一些方法,但系统地处理多维概率分布总体的统计分析问题,则开始于20世纪。人们常把1928年维夏特分布的导出作为多元统计分析成为一个独立学科的标志。20世纪30年代,费希尔、霍特林、许宝騄以及罗伊等人作了一系列奠基性工作。40年代,多元统计分析在心理、教育、生物等方面获得了一些应用。由于应用时常需大量的计算,加上第二次世界大战的影响,使其发展停滞了相当长的时间。50年代中期,随着电子计算机的发展和普及,它在地质、气象、标准化、生物、图像处理、经济分析等许多领域得到了广泛的应用,也促进了理论的发展。

大样本统计(large sample statistics) 研究样本大小n趋于无限时,统计量和相应的统计方法的极限性质,并据以构造具有特定极限性质的统计方法。大样本统计的发展,依赖于概率论的极限理论,它在一定程度上已构成概率论极限理论的一个方面。1900年,英国统计学家皮尔逊证明了关于拟合优度的χ^2统计量的分布渐近于χ^2分布的著名定理、可以作为大样本理论的开端。1938年威尔克斯证明了:在相当广泛的条件下,有关似然比的一个统计量是渐近χ^2分布的。得到了大样本的似然比检验法。在点估计理论中,大样本的优良性准则有相合性、最优渐近正态分布和渐近有效性。1949年美国统计学家瓦尔德的工作证明了最大似然估计的相合性,并在以后为许多学者所发展。线性统计模型中,参数的最小二乘估计的相合性研究始于20世纪60年代,近年来取得很大进展。1946年瑞典数学家克拉默定义了渐近有效估计的概念。1960年印度统计学家巴哈杜尔提出另一种渐近有效性的概念,还可以用于假设检验问题。近年来,日本统计学家竹内启又发展了估计的渐近有效性概念。大样本理论在非参数统计中占据了主导地位。第二次世界大战前,非参数统计的大样本理论已有了一些结果,从20世纪50年代直到现代,更有了显著的进展,尤其是关于秩统计量与U统计量的大样本理论,及基于这种理论的大样本非参数方法,研究成果很多。在点估计的大样本方面,值得提到的还有自适应估计、稳健估计方面的许多结果。

非参数统计(nonparametric statistics) 数理统计学的一个分支。如果在一个统计问题中,其总体分布不能用有限个实参数来刻画,只能对它作一些诸如分布连续、有密度、具有某阶矩等一般性的假定,则称之为非参数统计问题。秩方法是基于秩统计量的一类重要的非参数统计方法。1945年威尔科克森提出的"两样本秩和检验"是秩方法的有代表性的例子。秩方法的一个早期结果是斯皮尔曼于1904年提出的秩相关系数。苏联数学家柯尔莫戈洛夫和斯米尔诺夫在20世纪30

年代的工作开辟了非参数统计的一个方面，分别建立了柯尔莫戈洛夫检验和斯米尔诺夫检验。由于非参数统计中对分布假定要求的条件宽，因而大样本理论占据了主导地位，第二次世界大战前，非参数统计的大样本理论已有一些结果，从20世纪50年代直到现在，更有显著进展。

稳健统计（robust statistics）数理统计学的一个方面，研究当总体假定稍有变动及记录数据有失误时，统计方法的适应性问题。在实际问题中，总体的分布与假定略有偏离，或在大量的观测数据中存在受到过失误差影响的“异常数据”等，如果在这种情况下，所用的统计方法的性能仅受到少许影响，就称它具有稳健性。稳健性一词是英国统计学家博克斯在1953年提出的，但关于稳健性的思想，可追溯到20世纪初期，有些稳健性统计方法，如修削平均，使用还要早些。从1960年美国统计学家图基发表他的工作以来，这方面的工作得到更多统计学家的重视。1964年休伯发表了他关于M估计的工作，进一步推动了它的发展。到1980年为止关于这方面的工作，已由休伯写成专著。

贝叶斯统计（Bayes statistics）数理统计学中一种归纳推理的理论，最早是英国学者贝叶斯1763年在论文《论有关机遇问题的求解》中建立条件概率的贝叶斯定理，以后被一些统计学者发展为一种系统的统计推断方法，称为贝叶斯方法。采用这种方法作统计推断所得的全部结果，构成贝叶斯统计的内容。认为贝叶斯方法是唯一合理的统计推断方法的统计学者组成贝叶斯学派，其形成可追溯到20世纪30年代。第二次世界大战后，贝叶斯学派的影响日益扩大，以贝叶斯方法为工具研究的统计问题也日渐增多。贝叶斯统计在理论上的进展以及它在应用上的方便和效益，使其观点为更多的人们所了解和接受。尽管如此，贝叶斯统计始终是统计学界争论的问题。

统计质量管理（statistical quality control） 应用数理统计学的工具处理工业产品质量问题的理论和方法。通常认为统计质量管理包括控制图、抽样检验和可靠性理论与方法等内容。统计质量管理产生于20世纪20年代，开创性工作是由在美国的研究和发展公司——贝尔实验室工作的W·A·休哈特和H·F·道奇在1925年分别提出的休哈特控制图和计数抽样检验方案，当时只有少数工厂应用。第二次世界大战中，由于对武器质量和数量的需求，使控制图和抽样检验的理论与方法得到进一步的发展和完善。此外，随着复杂武器系统的研制以及电子设备的广泛应用，产品可靠性问题也越来越突出，从而开创了可靠性理论与可靠性工程，使统计质量管理进入新的发展阶段。战后美国及其他国家相继成立了有关质量管理的专门学术机构，出版了许多刊物，还陆续制定了军用的、国家的和国际的抽样检验表和有关统计质量的标准。20世纪50年代，美国A·V·费根又提出了全面质量管理的思想。第二次世界

大战以后，在美国统计学家和质量管理专家的帮助下，日本的质量管理得到迅速发展，在不到30年的时间里，创建了日本式的全面质量管理，使日本的工业产品质量跃居世界前茅。中国从20世纪70年代后期开始，吸取了日本的经验，结合本国具体情况，有计划地普及和应用全面质量管理，取得了较好的成效。

运筹学(**Operational research 或 operations research**)　运用科学的数量方法(主要是数学模型)研究对人力、物力进行合理筹划和运用，寻找管理及决策最优化的综合性学科。我国科学家把它译成“运筹学”，“运筹”一词出于《史记·高祖本纪》：“运筹策帷幄之中，决胜千里之外。”

最早进行的运筹学工作是以英国生理学家希尔为首的英国国防部防空试验小组在第一次世界大战期间进行的高射炮系统利用研究。同时美国人莫尔斯建立的分析美国海军横跨大西洋护航队损失的数学模型也是运筹学的早期工作，这一工作在第二次世界大战中有了深入而全面的发展。1938年，英国空军就有了飞机定位和控制系统，并在沿海设立了雷达站，用来发现敌机，但在一次空防演习中发现，由这些雷达送来的(常常是互相矛盾的)信息，需要加以协调和关联，才能改进作战效能。于是提出了“运筹”的课题，为此，英国成立了专门的小组，由罗威把这一课题研究命名为运筹学。专门小组就是空军运筹学小组，当时主要从事警报和控制系统的研究。在1939年到1940年，这个小组的任务扩大到包括防卫战斗机的布置，并对未来的战斗进行预测，以供决策之用，这个小组的工作对后来的不列颠空战的胜利起了积极的作用。第二次世界大战中，运筹学被广泛应用于军事系统工程中去，除英国外，美国、加拿大等国也成立了军事数学小组，研究并解决战争提出的运筹学课题，例如，组织适当的护航编队使运输船队损失最小，改进搜索方法，及时发现敌军潜艇；改进深水炸弹的起爆深度，提高了毁伤率；合理安排飞机维修，提高了飞机的利用率等。这些运筹学成果对盟军大西洋海战的胜利起了十分重要的作用，对许多战斗的胜利也起了积极的作用。战争结束时，英美及加拿大军队中工作的运筹学工作者已超过了700人，正是由于战争需要的促进，运筹学有了长足的发展，并且形成为科学。第二次世界大战后，运筹学开始用于民用工业和政府管理方面。一些原在军队中工作的运筹学工作者，在英国成立了一个民间组织“运筹学俱乐部”，定期讨论如何将运筹学转入民间工业的问题，并取得了一些进展。他们的活动受到各方面的重视。

1948年，美国麻省理工学院率先开设了运筹学课程，许多大学群起效法，运筹学成为一门学科，内容也日益丰富。1950年，美国出版了第一份运筹学杂志；1951年，莫尔斯和金伯尔出版了《运筹学方法》一书，这是第一本以运筹学为名的专著，书中总结了第二次世界大战中运筹学的军事应用，并且给出了运筹学的一个著名的定义：运筹学是

为执行部门对它们控制下的"业务"活动采取决策提供定量依据的科学方法。1952年,美国成立了世界上第一个运筹学会"美国运筹学会"。1957年,切齐曼等人合著的《运筹学导论》一书出版,使运筹学的理论体系完善化,书中提出了运筹学的另一个著名的定义:运筹学是对于有关系统运用的问题,应用科学的方法、技巧和工具,向管理系统运用的人们,提供对问题的最优解答。1959年,国际运筹学联合会成立,运筹学在世界范围内得到全面的发展,到1986年国际运筹学联合会已有35个会员国,大多数都有自己的杂志。中国的"中国数学会运筹学会"于1980年成立,于1982年加入国际运筹学联合会并创办我国的《运筹学杂志》。50年代末,计算机科学的发展和电子计算机的广泛应用对运筹学的发展起了巨大的推动作用;60年代,运筹学的理论有了深入的发展;70年代,运筹学的重点转向实际实用;80年代,在理论和应用两个方面都有比较重要的新进展。

为什么运筹学在20世纪40年代后有这样突飞猛进的发展呢?那就是因为40年代以来出现的电子计算机和核能技术及50年代兴起的航天技术拉开了新技术革命的序幕,科学技术和生产的发展出现了重要的现代化趋势:大批新兴产业迅速发展,人们改造自然的活动日益复杂化,要求对生产规模及其生态、自然影响作全面的预测,对产业的发展作出评价和选择;工业的迅速发展使同行业间的竞争加剧,迫切需要对大型工业的复杂结构和管理关系进行研究,以作出科学的分析和设计,产品更新换代的加速,要求生产者必须迅速对市场情况和消费心理进行分析。系统论、控制论、信息论等横向科学的发展,迫切需要新的数学工具。这些因素的综合促使了运筹学的迅速发展。

运筹学的基本特点是:①主要向经营管理部门提供服务;②所用的科学方法主要是数学模型,因而是以模型的合理性能够与实际资料对比而进行检验为基本要求;③莫尔斯定义中所说的"业务"(operation)要成为这样的科学研究的对象,必须满足以下三个条件:它的客观确定性,业务的作用结果,效应和影响可以客观地测量,有可重复性;④运筹学虽然是以科学方法为基础的,但并不是以建立某一个一般的科学性命题为目的的,目的在于求得面临的实践行动的指导策略。因而运筹学没有构成一个知识的统一体,它成为一个庞大的学科体系,没有一个整体的理论,各分支学科都有自己特定的研究对象,研究内容、发展沿革,但以对有限资源的合理分配问题最为主要。运筹学的方法,比较集中于关注输入与输出之间的关系,而能对整体有更全面更深刻的理解,一般不去详究过程的内部机制。采用所谓黑箱方法作为基本方法。因而虽然运筹学要利用各学科综合的方法,但其所有的变量及其关系都可以归结为一个数学模型,然后通过计算(计算机)分析可能性和经济效果。

运筹学的主要分支有:数学规

划、决策分析、排队论、库存论、对策论、搜索论、计算机模拟等。

60 年代以来，运筹学主要用于处理大型的复杂的问题，诸如军事问题，教育问题、污染问题、交通运输问题、人力资源管理问题等；还广泛应用于这样一些部门：能源、预测、会计金融、销售、存储、计算机与信息系统、设计、城市服务系统、保健与医疗、电气、加工工业、第三产业等。

数学规划(**Mathematical programming**) 研究在变量 $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 受到某些条件约束之下，如何寻求一 x^*，使得某一个(n 个)给定的函数在 x^* 处取极小(或极大)值的一门学科。用 D 表示满足所给定的条件的 x 的全体，则数学规划的主要内容就是要对某函数 $f(x)$ 寻求一 $x^*\in D$，使得对于所有的 $x\in D$，都有 $f(x^*)\leq f(x)$，或者 $f(x^*)\geq f(x)$，$f(x)$ 称为问题的目标函数，D 称为约束集，属于 D 的 x 称为问题的可行解，x^* 称为问题的一个最优解，也称总体最优解。若存在 $x^0\in D$ 的一个邻域 $U(x^0)$，使得对于 $U(x^0)\cap D$ 中之 x，都有 $f(x)\leq f(x^0)$，则称 x^0 为问题的一个局部最优解，若 $D=R^n$，即 n 维欧氏空间，则上述规划称为无约束规划，否则称为带约束规划。

在生产实际中，有大量的问题都可化为数学规划问题来处理。例如，关于物质运输的组织，在一定要求之下厂房建筑的最优结构、厂址的选择、水利资源的分析等等。根据问题的性质以及处理方法的不同，数学规划分成不同的分支。

将数学方法用于生产的组织和规划的思想，在很早以前就产生了。中国古代《九章算术》"均输"章，就是用数学方法来研究中国古代社会国家收的实物税和劳役税的合理负担的规划问题的。《数书九章》"赋役类"进一步用数学方法规划了更复杂的赋税合理负担的问题。17 世纪费马提出求一点使其到三点的距离之和为最小的问题可视为厂址选点问题的一个雏形。但是首先认识到某些重要的大量存在的生产安排问题均具有某种共同的明确的数学结构、且应用数学方法去处理，首先是苏联数学家 Π·坎托罗维奇，他在 1939 年发表的名为《生产组织与计划中的数学方法》的小册子，是关于数学规划的最早的文献。此后，美国的 F·L·希契科克开始研究的运输问题及其解，也是数学规划的早期工作。但他们的工作都没有受到重视。第二次世界大战中，由于战争的需要，军事中有关规划、计划、侦察、后勤、生产等方面的组织规划问题都提出来了，因而系统的数学规划研究就开始了，最先发展的是线性规划，其他规划的发展也随之展开。

线性规划。是数学规划的一个最简单，最基本，应用最广的形式，它可以表示如下：

求 $Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ 在条件 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leq b_i, i=1,2,\cdots,m, x_j\geq 0, j=1,2,\cdots,n$ 之下的最小值。

许多实际问题可以化为线性规划来求解。例如一大类运输问题可

以表成求 $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$ 在条件 $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i$，$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, x_{ij}\geq 0$，$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$ 之下的最小值。一大类任务分配问题可以化为求 $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$ 在条件 $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1, x_{ij}=0$ 或 1 之下的极小值。

坎托罗维奇和希契科克的工作正是线性规划的前驱。1947 年 G·B·丹齐克提出一般的线性规划模型和理论，线性规划的名称也是他提出的，他还提出著名的单纯形方法，从而奠定了线性规划作为一门学科的基础。从 50 年代起，线性规划的作用逐渐从军事扩大到社会其他领域。1951 年 T·C·库普曼斯结合 W·列昂季耶夫的投入产出模型将线性规划应用于生产问题；冯·诺伊曼研究矩阵对策与线性规划的关系，将它应用于经济平衡问题；50 年代初中国的运筹学工作者和实际部门的工作人员提出解运输问题的图上作业法。大型电子计算机的应用对线性规划的理论及应用的发展起了决定性的作用。在经济领域中广泛地应用线性规划方法，并且用电子计算机已能解决变量个数达数百万之多的具有特殊结构的大型线性规划问题。由于计算机的采用，有效算法的问题就提出来了。由于最重要的单纯形法不是多项式算法，人们努力探索有效算法。1979 年，苏联数学家 Π·哈奇扬提出著名的线性规划多项式算法，从理论上证明了线性规划问题属于 P 问题；1984 年，印度数学家 N·卡马卡提出一个新的多项式算法——投影算法，不仅在理论上优于哈奇扬算法，并且具有高速计算的实际效果。

非线性规划。目标函数是非线性函数或约束条件不全是线性式的一类数学规划。其问题一般有如下形式

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P})\quad & \min\ f(x)\\
& s.t.\ \ g(x)\leq 0,\\
& \quad\quad x\in G, G\leq R^n。
\end{aligned}
$$

这里 $g(x)=(g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))$ 为一给定的 m 维向量实函数，$g(x)\leq 0$ 表示它的所有分量皆不大于 0，G 是一给定的凸域，在大多数情况下，$G=\{x\in R^n \mid x\geq 0\}$。$\Omega=\{x\in R^n \mid g(x)\leq 0, x\in G\}$ 称为问题(P)的约束集，Ω 中的点称为问题的可行解。若 $\Omega=R^n$，则此规划称为无约束规划，否则称为带约束规划。

非线性规划是极值理论的一部分，早在 17 世纪费马所提出的那个问题及其对偶问题：过给定三点作一最大的等边三角形，即可以看作最早的非线性规划问题。对具有等式约束的非线性规划的解应满足的条件的研究可追溯到欧拉和拉格朗日。W·卡鲁什在 1939 年开始了对具有不等式约束的非线性规划的解的必要条件的研究，但由于他的工作没有正式发表，同时由于当时没有有力的计算工具，非线性规划未能在生产中产生影响，他的工作湮没无闻。现代非线性规划的发展是由于线性规划的发展而带动的。

1951年，H·W·库恩和A·W·塔克尔给出了一组非线性规划解的存在的必要条件，而且在凸性条件下，它又是充分条件。这个条件的解决促进了非线性规划的发展并得到十分广泛的应用，如设计问题、经济平衡问题都可用非线性规划来解决，同时也应用于数学之中，促进了诸如凸分析、数值分析等学科的发展。

多目标规划。研究多于一个的目标函数在给定区域上被同等地最优化（极大化或极小化）的问题（称为多目标最优化或向量极值）的一个数学规划分支。多目标极小化问题通常记为

$$(\mathrm{VMP})\qquad \mathrm{V}-\min f(x),\quad x\in X$$

其中 $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))^T(m\geq 2)$ 是给定的一个向量值目标函数，T表示转置，$X\subseteq \mathrm{R}^n$，V－min表示在区域X上的函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_m(x)$ 被同等地极小化。若（VMP）中的 $f(x)$ 是 x 的线性（向量）函数，X 是 R^n 中的多面体，则相应的问题称为多目标线性规划问题。若（VMP）中的 $f(x)$ 是 x 的非线性（向量）函数，或X不是 R^n 中的多面体，则称为多目标非线性规划。

多目标最优化的思想，最早是法国经济学家V·帕雷托提出来的，他从政治经济学的角度考虑把本质上是不可比较的许多目标化成单个目标的最优化问题，从而涉及了多目标规划和多目标的概念。1947年冯·诺伊曼等人从对策论的角度提出了有多个决策者在彼此有矛盾的情况下的多目标问题。1951年，T·C·库普曼斯从生产和分配的活动中提出多目标最优化问题，引入有效解概念，并得到一些基本结果。同年，H·W·库恩和A·W·塔克尔从非线性规划的角度提出向量极值问题，引入的解的充要条件对多目标规划也是有意义的。1963年，L·A·札德从控制论方面提出多指标最优化问题，也得出一些基本结果。1968年，A·M·日夫里翁引入了真有效解概念，并得到有关结果。自70年代以来，多目标规划的研究越来越受到人们的重视。但至今关于多目标最优解尚无令人十分满意的定义，在理论上多目标规划仍处于发展阶段。

动态规划。研究具有广泛实际背景的一类决策过程的最优化问题。更一般地说，任何最优化问题，只要具备适当的结构，使得通过某种技巧可以对它建立起动态规划模型的，都是动态规划的研究对象。动态规划的方法主要是动态规划基本方程和最优性原理。

1953年，R·贝尔曼总结了40年代末以来对一些决策过程最优化问题的研究，他的论文“动态规划理论导引”提出了动态规划这一名称，并阐述了最优性原理。1957年，他的专著《动态规划》一书问世，标志着这一学科创立了。在动态规划的初步理论建立后，大部分研究工作是结合运筹学的其他学科及控制工程两方面的实际应用展开的，在确定性和随机性问题方面都有进展。在后一方面，1960年R·A·霍华德发表了“动态规划和马尔可夫过程”，1962年和1965年，D·布莱克

韦尔先后发表了“离散动态规划”和“带折扣的动态规划”，这些工作使R·贝尔曼在动态规划中所开始研究的马尔可夫决策过程得到重要的发展，成为动态规划的一个分支。动态规划的中心问题是：最优性原理和动态规划的适用范围及其在动态规划理论中的地位和作用，建立动态规划理论的公理化的可能性等。由于实际应用的需要，寻找适于在计算机上使用的动态规划数值计算方法和与此有关的理论，则是动态规划的另一个方向。60年代中后期以来，这一方向也有较大进展。现在动态规划则发展到更广泛的领域。

投入产出分析（**Input-output analysis**） 亦称投入产出法、产业关联、部门联系平衡法等。它是以最终产品为经济活动目标，研究各种经济体系（例如企业、公司、部门经济，地区经济、国民经济）中，各个组成部分间的投入和产出之间相互依存关系的一种数量分析方法。“投入”指的是生产产品所消耗的原材料、燃料、动力、固定资产折旧和劳动力；“产出”指的则是生产出来的产品的使用方向和数量，即分配的流量。投入产出分析是进行经济分析、加强综合平衡、改进计划编制的重要工具。

投入产出分析的初步思想可追溯到18世纪经济学中的重农学派的F·魁奈，他的主要经济著作《经济表》就是把一个企业，一个农场由一定的生产增长所引起的财富生产活动的连续循环用表格表现出来。19世纪后叶的数理经济学派的M·E·L·瓦尔拉斯提出的一般均衡理论和数学模型，更是投入产出分析的直接先驱。1924年，苏联为了统一计划和安排全国的生产活动，曾经编制了“1923—1924年度国民经济平衡表”，这也是投入产出分析的先行工作之一，但未能深入研究，并在1929年受到批判。

1925年，W·列昂季耶夫写出一篇名为《俄国经济的平衡——一个方法论的研究》的论文，第一次阐述了投入产出分析的基本概念。1931年他开始用投入产出分析研究美国的经济结构，并根据美国国情普查资料编制了1919年和1929年的投入产出表，1936年他发表了《美国经济制度中投入产出的数量关系》一文，这是应用投入产出分析的第一篇论文。1941年列昂季耶夫的《美国经济结构，1919—1922》中详细阐明了投入产出分析的内容和方法。1953年他与H.钱纳里等人出版了《美国经济结构研究》一书，阐述了投入产出分析的基本原理及其发展的几个主要部分。40年代，美国开始了投入产出法的实际应用，1942—1944，美国劳工部劳动统计局在列昂季耶夫主持下，编制了美国1939年的投入产出表；美国空军及战备和裁军总署等机构在二次大战期间及战后，曾利用投入产出分析及有关资料，制订战时生产计划和研究裁军对国民经济的影响。此后，美国先后编制了1949、1958、1963及1966年的投入产出表。战后40多年来，投入产出分析逐步为世界各国所重视，现在已有90多个国家和地区编制过投入产出表。联合国成立了“投入产出协会”，

1950—1979，曾先后召开过 7 次学术会议。由于从事投入产出分析的研究和应用，列昂季耶夫获得 1973 年诺贝尔经济学奖。50 年代末，苏联重新重视和研究投入产出分析，1974 年正式把投入产出分析(称之为“部门联系平衡表”)列入计划方法论的体系中，作为国民经济计划平衡体系的一个重要组成部分。我国在 60 年代初就开始重视投入产出分析，1974 年编制出 1973 年的(61 个部门的)投入产出表。近年来，大量应用了投入产出分析。

马尔可夫决策过程(Markovian decision process) 研究一类可周期地或连续地进行观察的随机动态系统的最优化问题。在各个时刻根据观察到的状态，从它的允许对策(控制、行动、措施等)集合中选用一个决策而决定了系统下次的转移规律与相应的运行效果，并假设这两者都不依赖于系统过去的历史。在各个时刻选取决策的目的，是使系统运行的全过程达到某种最优运行效果，即选取控制(影响)系统发展的最优策略。

马尔可夫决策过程(MDP)是确定性动态规划与马尔可夫过程结合的产物。1953 年 L·S·沙普利在“随机对策”一文中曾讨论过对策一方是无意志的情形，其实是一种 MDP 模型。1957 年，R·贝尔曼正式提出 MDP 的名称和借助于最优性原理求解最优策略的方法。1960 年，R·A·霍华德在动态规划基础上对一类 MDP 模型提出了策略迭代法。同年，有人发现寻求最优策略问题可以化为求解相应的线性规划问题。在这项工作中，S(状态空间，系统的全体状态构成的集合)和 A(决策空间，$A(i)$是状态 $i\in s$ 允许的决策集。$A=\bigcup_{i\in s} A(i)$)都假定为有限集，而且只在 Π_s^d(平稳策略类)或 Π_s(随机平稳策略类)上探讨最优策略。1962 年，D·布莱克韦尔在较大的 Π_m^a(马氏策略类)上探讨最优策略。他和 E·B·登金于 1965 年分别研究了 S、A 都是完备可分距离空间中的波莱尔集与 S、A 都是可数无限集且转移律是非时间齐次的 MDP，推动了 MDP 理论的发展。

MDP 在许多最优化问题，如林业管理，电话网络、水库调度、设备更新和维修、控制工程等方面都有应用，并正在向工程、生物、经济更多的领域渗透。

目前 MDP 有独立发展的趋势，研究者注意的问题主要有：模型一般化；连续时间模型、状态部分可观察模型、半马氏模型、适应性模型等的理论探讨；特殊模型的有效解法；用易处理的模型逼近复杂的模型等等。

决策分析(Decision analysis) 决策是人对未来实践方向、目标、原则和方法所作的决定，是将要见之于客观的主观能力。人的任何活动都离不开决策。决策分析是一种为复杂的和结果不肯定的决策问题提供旨在改善决策过程的合乎逻辑的系统的分析方法，决策分析的任务是为决策者提供优的或满意的决策及其可能结果的分析、供作决策时参考。

决策问题古已有之，在人类几千年的历史记载中，不乏著名的决

策范例。随着社会的进步和科学技术的发展，决策问题越来越表现出这样一些特点：多目标性；决策影响的长期性；后果的不确定性；可供选择方案的多样性及决策大多数情况下的一次性。决策的实践要求系统的理论研究，而这种关于决策的系统的理论研究，相当晚才出现。J·杜威1910年写出的《怎样思考》，是现代决策理论的较早的著作。1938年，美国人C·I·巴纳德在他的《经理的职能》一书中，首先引入了决策概念，并在管理理论中加以应用。1939年A·瓦尔德提出统计决策的思想，为决策分析的发展，尤其在其定量研究方面，迈出决定性的一步。40年代以后，H·A·西蒙和I·G·马赫等人吸收了行为科学、系统理论、运筹学、计算机技术等学科的成果，发展成为现代决策分析理论。1958年他们二人合著的《组织》，1960年西蒙的《管理决策新科学》形成了管理科学中的决策学派。西蒙因对"经济组织内的决策程序"进行了开创性的研究，获得1978年诺贝尔经济学奖金。此后决策分析成为诸多学科（如统计学、管理学、会计学等）的研究课题，并且成为运筹学的一个分支。"决策分析"作为一个专门的名称，在20世纪60年代才出现在文献中。首先是在公司或政府机构的决策中得到应用，如对海底石油开采的决策、政府为预防犯罪问题的决策、保健计划的决策等。现在的研究多集中在多目标决策、多个决策者的情况、偏好随时间而改变的情况。为更好地实施决策分析，相应软件的开发也日益受到重视。

计算机模拟（**Computer simulation**） 是现代采用的主要模拟方法。所谓模拟，广义地理解就是为了考察现实事物所具有的性质而用类似事物进行实验或观测的方法。如果对现实事物直接进行实验，需要的费用、时间是无法接受的，或测定困难或实验无法进行，一般就采用模拟方法，模拟方法古已有之，最早产生的模拟方法是模型实验法，我国古代的各种天象仪器就是典型的模拟工具，古已有之的地图也是有效的模拟手段之一；中国古代产生的围棋和象棋，可以说是模拟古代战争的一种游戏。现代仍有大量的模型实验法应用，如飞机的风洞实验（1902年起应用），战斗的沙盘模拟（19世纪70年代普法战争中开始应用）等。

计算机模拟指的是在数字计算机上对一个复杂系统的行为进行大量的动态仿真或重演，从而获得刻划该系统特征的数量指标，为决策过程提供依据的一种方法。它产生于机电式计算机产生之后，即20世纪40年代，最先是J·冯·诺伊曼和S·M·乌拉姆在原子弹研究中引入的，他们利用计算机模拟中子在裂变物质中随机扩散的某些概率计算问题。这种基于大量统计试验的计算方法，就是蒙特卡洛法（见蒙特卡洛法）。这种利用大量重复试验的结果来进行数值计算的方法可追溯到18世纪中叶G·比丰的投针试验——用投针的结果来计算π值。后来由于高速度大容量的电子计算机的制成和广泛应用，促使了

计算机模拟的迅速发展，前面所举的所有模拟（投针试验及各种模型实验）都可以在电子计算机上进行，快速而准确地得出需要的结果。电子计算机的发展使计算机模拟逐渐成为运筹学的独立分支。

现代计算机模拟已在生产管理、工程技术、军事指挥、科学实验以及社会科学中得到广泛的应用。为了便于在数字计算机上实施模拟，自60年代起人们开发出许多通用软件，如模拟语言 GPSS、SLAM 等。但是计算机模拟所获得的是一些不精确的统计量，若要使其精度提高要付出大量时间，这是它的最大缺点。因此，在能用解析方法求解时，通常就不用计算机模拟。计算机模拟主要应用于对大型复杂系统进行分析，例如用于经济预测、决策，以及用于各种高费用、高危险和不可能进行的（如恒星演化）试验等等。

搜索论（**Search theory**） 关于在资源和探测手段受到限制的情况下，如何设计寻找某种特定目标的方案，并如何加以实施的理论和方法、目的是希望以最大的可能和最短的时间找到该目标。是运筹学的重要分支之一。搜索论主要研究：在用于搜索的资源和手段已经给定的情况下查明特定目标有多大可能存在于某个区域内，并以最大可能或最快速度找到它，通常用发现目标的概率、期望个数、期望面积、体积或期望搜索时间来描述。通常采用概率论，数理统计、线性规划，对策论、决策论等方法来求解。

搜索论是在第二次世界大战中为搜索水下潜艇由美军军事运筹小组建立起来的，其成果1951年在莫尔斯和金伯尔的《运筹学方法》一书中发表。1953—1957年B·库普曼在美国《运筹学》杂志上连续撰文"搜索论"，对它作了系统的理论综合。从此搜索论成为运筹学的分支学科。现代搜索论已超出军事领域，在资源（地下或海域）勘探、捕鱼、书籍检索、寻找故障及公安部门都广泛应用搜索论，其理论也在应用中不断得到发展。20世纪60年代美国寻找在大西洋失踪的核潜艇以及在地中海寻找丢失的氢弹，都是依据搜索论获得成功的。

排队论（**Queueing theory**） 研究服务系统中排队现象的随机规律的一门学科。所谓排队，指在服务系统中要求服务的"顾客"所形成的等待线。其主要研究课题是如何合理地设计与控制服务系统，使之以最经济的服务机构满足顾客的需要，由于服务系统中顾客的到达及服务时间和次序都是随机的，因此，排队论又称为随机服务系统理论。

研究排队问题的第一篇论文，是1907年约翰森所写的"电话呼叫数与等待时间"。但第一个从严格的数学处理角度来研究排队问题的是丹麦工程师A·K·埃尔朗，在他1909年发表的论文中，把电话排队现象作了数学处理，提出"等待时间"等刻画服务系统性能的主要数量指标，并提出"排队论"的名称。30年代以来，辛钦、波拉采克等人的工作为排队论打下理论基础，例如提出"服务强度"等概念，提出著名的辛钦—波拉采克公式等。第二次世

界大战期间，排队论在军事中得到应用，如飞机跑道的容量估计问题等由于排队论的应用而得到较好的解决；在应用中排队论也有了进一步的发展。战后，排队论迅速发展，首先是在电讯工作中发展（至今，电讯部门仍然是占支配地位的排队论应用领域），并在工农业、商业、交通运输、旅游得部门得到应用。1951年，D·G·肯德尔引入随机服务系统分类记号，并对服务台数为1的系统引入嵌入马尔可夫链的概念，取得一些有用的结果；1953年又推广到服务台为n的系统上。至此，理论上研究的都是系统处于统计平衡时的情况，即平稳性态的状况。50年代中期开始，"瞬时性态"引起人们的注意并逐渐成为排队论研究的焦点。60年代起随机服务系统的最优化问题受到普遍重视，包括设计最优化和控制最优化两方面的问题。

20世纪60年代，把排队论应用于计算机的性能分析而产生了一门崭新的分支学科：计算机设计的数学理论。计算机系统本身就是一个大型的复杂的网络式的随机服务系统，因而可用排队论的方法来研究计算机的性能及设计。在实时处理、分时系统、多道程序、计算机网络和存贮分配中，都有排队论的应用。排队论已成为计算机设计的数学理论基础之一。

库存论(Theory of inventory) 研究物质储备的控制策略的理论。在工业、农业、商业、军事以及其他的各行各业中，要想不断维持正常的生产和工作，就必须储备一定数量的所需物资。储量过多，会引起积压，或因存放过久产生变质而造成浪费，占用仓库和需要保持一定人数的维护人员也会带来经济上的损失。但是，储量过少，又会供不应求，会引起停工待料，失去时机等问题从而造成损失。如何控制物质的库存数量，即何时补充库存，应该补充多少，是库存论的基本课题。

20世纪初就有人对这一课题进行研究，1915年F·哈里斯就稳定需求，即对供应的情况得出关于存储费用的"简单批量公式"。1929年，L·梅厄（奥地利人）出版的《仓库业的经营经济学》是与库存论有关的早期著作之一。二次大战中，由于军事上的需要，库存问题得到比较深入的研究，理论上亦有很大的发展，开始成为一种专门学问。战后，由于成批生产的日益普遍，同时由于运筹学的其他分支和管理科学的建立，库存论得到深入的发展，例如随机性模型得到进一步的研究，20世纪50年代，库存论成为一门应用广泛的运筹学的分支学科。T·M·惠廷，R·贝尔曼、P·A·P·莫兰等人的工作具有奠基的意义，惠廷的著作被认为是库存论的第一本专著。现在，库存论应用到更广泛的领域：停车场大小，铁路车场侧线数量、电力系统发电设备容量、电子计算机容量等的决策问题都可应用库存论解决。

对策论(Game theory) 又称博奕论，是一种研究由一些带有相互竞争性质的个体所构成的体系的理论，换言之，是一种研究在竞争（包括比赛、战争、改造自然等）中是

否存在制胜对方的最优策略以及如何找到这些策略等问题的理论。

对策论的思想萌芽可追溯到我国古代，著名的"田忌赛马"(战国时期)和"丁谓建宫"(宋代)的故事都含有深刻的对策论思想，前者是制订比赛中的最优策略，后者是改造自然的最优策略("丁谓建宫"，见《梦溪笔谈·权智》："祥符中(1015年)禁火，时丁晋公主营复宫室，患取土远，公乃令凿通衢取土，不日皆成巨堑，乃决汴水入堑中，引诸道竹木排筏及船运杂材，尽自堑中入至宫门。事毕，却以斥弃瓦砾灰壤实于堑中，复为街衢。一举而三役济，计省费以亿万计。")

现代对策论的一个研究起点是对"博奕"游戏如下棋、扑克等的策略研究。1921年，波莱尔考虑过一些最简单的例子，并提出对策数学化的思想；1928年，冯·诺伊曼做了深入的研究，发表了"游乐场中的博奕理论"一文，首次提出"策略"概念，开始了对策论的研究。对策论的另一个研究起点是经济学问题的数学处理，瓦尔拉斯提出的一般均衡理论(见投入产出分析)就是以完全竞争经济的分析为主要内容的。1944年，冯·诺伊曼与O·莫根斯特恩出版《竞赛论与经济行为》一书，把对策论用于经济研究，并且为对策论奠定了理论基础。第二次世界大战期间，对策论曾被用于处理军事问题，从而得到广泛的应用和发展。战后，对策论应用到处理经济问题以及一些社会科学中的问题，如心理学(研究交易与协商的作用和性质)、政治学(各政治力量之间的联合作用)等。近年来，数理经济学，特别是关于竞争平衡性问题、经济的增长问题、资本的积累问题等的研究，受到对策论的极大影响。对策论也在应用中得到迅速的发展，并且在数学研究中也得到应用。1950年，A·瓦尔德在其统计决策理论中，把数理统计问题看成是统计学家与大自然的对策，用这种观点把各种各样的统计问题统一起来，用对策论加以研究，此举促进了数理统计学的发展。

军事运筹学(**Military operations research**) 应用各种数学方法来描述与分析军事作战及有关行动，寻找最优决策的一门学科。实际上，整个运筹学研究就是从解决军事问题开始的。由于后来，运筹方法广泛用于非军事领域，因此，专门用于军事领域的就称为军事运筹学。

军事中的运筹思想可追溯到我国古代，例如《孙子·虚实》说："故形人而我无形，则我专而敌分。我专为一，敌分为十，是以十攻其一也，则我众敌寡。能以众击寡者，则吾之所与战者，约矣。"即提出集中兵力的运筹问题。沈括在《梦溪笔谈·官政》中对军队的后勤供应进行了运筹计算，得出"因粮于敌"的重要思想，在我国古代战争指导中有较多的应用。

在中国共产党领导的中国国内革命战争和民族解放战争中，毛泽东为首的老一辈无产阶级革命家、军事家，以辩证唯物主义指导战争实践，以定性分析和定量分析相结合的方法进行战争的运筹指导，取得一系列辉煌的胜利，毛泽东的军

事思想是军事运筹方面的宝贵财富。

军事运筹学的数学理论是在20世纪初产生的。最初的问题是估计炮兵射击的效果问题,在第一次世界大战前后,人们曾用古典概率论的方法来计算炮弹的命中率,开始建立起火力运用理论的基础。第一次世界大战初期,英国人兰彻斯特于1914—1916年间发表了有关用数学研究战争的大量论述,建立了描述作战双方兵力变化过程的数学方程,称为兰彻斯特方程。1917到1920年间,美国科学家爱迪生在研制军舰防护用的水下听音器(声纳)的过程中,根据作战数据统计分析的结果,提出商船应在夜晚通过敌潜艇活动区,而在白天进入狭窄航通或港口的建议。这在当时是合理的。但当时由于这些方法尚处于探索阶段,未能直接用于军事决策。后来英国国防部成立以希尔为首的研究高射炮系统的防空试验小组,他们的工作也是军事运筹学的早期工作,(当然也是运筹学的早期工作,见运筹学)。

在第二次世界大战期间,军事运筹学正式形成。火力运用理论,经柯尔莫戈洛夫的工作,完成了多发齐射毁伤目标的效果计算方法。有关大面积杀伤武器、对集群目标以及采取不同瞄准射击方式等射击效果问题,也陆续有所解决。目标搜索的理论,也在同一时期产生,并密切与实践相结合。雷达探测飞机及与火炮的协调、商船防空、深水炸弹定深、护航队的规模、飞机搜索潜艇的策略、舰船防空机动、飞机布雷方式及轰炸瞄准等问题都有深入的研究和解决。莫尔斯等的《运筹学方法》一书,对此作了系统的论述。第二次世界大战后,军事运筹学开始转向和平时期内军事装备规划、后勤物质管理和战略决策的运筹研究。兰彻斯特方程、军事对策在电子计算机上进行对抗模拟以及军事指挥控制的运筹模型等的研究都受到重视。现代军事运筹学的主要课题为:军队日常管理;作战指挥运筹;武器装备发展;国防战略决策等。各种运筹学方法在军事运筹学中都得到应用和发展。

对抗模拟(**War gaming simulation**)又称为作战模拟,研究作战和对抗过程的仿真实验,即对于一个在特定冲突态势下的对抗过程,根据事先规定的规则、步骤和数据加以模仿复现,以取得统计结果,为决策者选择合理方案提供实用的建议。

我国古代的围棋和象棋表现出初步的对抗模拟思想。近代的作战模拟起源于18世纪欧洲军队中流传的军事对阵游戏。1811年,普鲁士的战争顾问官冯·莱斯维茨,以1∶2373的比例作了一个沙盘模型,代替兵棋玩战争游戏,其子把作战经验和军事行动的时间观念引进这种游戏中。他利用沙盘、地图表示地形、地貌、以标识器表示军队和武器配置情况,并建立反映实战条件约束的行动规则。经过不断改进和完善,发展成为沙盘演习法。19世纪下半叶以后,世界各国军队普遍采用它作为军官战术训练和研究作战方法的重要手段。作战模拟的方

法如下：扮演交战双方的指挥官及参谋人员在隔离的两个作战室中，在同样的标志有地形、地貌和适当比例尺的沙盘或地(海)图上，根据事先给定的任务和情况，设想以及导演仲裁人的指导，利用各种代表兵力、兵器或军舰、飞机的小模型来布署兵力、分析战况，进行策略谋划，并以适当的方式请示报告和下达命令。导演仲裁人同时扮演双方的上级领导和下级部队，因此，双方的策略都汇集到导演仲裁人那里，他在一个专门的控制室里把双方的一双策略结合成一个局势，并馈送给双方作战室；双方再根据新局势开始新的策略谋划过程、从而推演整个战争过程。导演仲裁人员负责整个模拟过程的时间控制、推演指导、评定每次作战行动中双方胜败和伤亡结局等。19 世纪末到 20 世纪初，作战模拟主要用于军事训练；第一次世界大战中开始用于实际战争的战术策划；第二次世界大战中，交战各国都广泛采用作战模拟来编制和检验作战计划，在具体模拟时采用了各种计算方法和数学理论，如蒙特卡罗法、概率论、统计技术，对策论、决策分析等。专用的计算工具也由手工计算到机械辅助。20 世纪 50 年代后，逐步采用电子计算机辅助模拟及电子计算机模拟。

1954 年，美国物理学家加莫和齐默尔曼等人设计成功第一个计算机战术模拟模型，1958 年起，齐默尔曼领导的一个小组开始发展名为“CAR-MONETTE”的计算机战术模拟模型系列，先后发展了四种类型。

现代对抗模拟主要用于发现武器系统的缺陷，评价作战方案，检验某些新概念在不同的紧急情况下的可能效果，参量的灵敏度分析，为更高一级的或解析的模型提供数据，训练指挥人员，作实战演习的预演等。按其目的可分为教育训练的和分析研究的；按其规模可分为战略的、战役的和战术的；按其人机结合程度可分为有人干预的和无人干预的；按结局判定方法可分为严格的(即由数学方法计算的)和经验的；按所模拟的行动性质可分为确定型的和随机型的。

可靠性数学理论(**mathematical theory of reliability**)　运用概率统计和运筹学的理论和方法，对单元或系统的可靠性作定量研究，是可靠性理论的基础之一。可靠性是指单元或由单元组成的系统在一定条件下完成其预定功能的能力。单元指元、器件、部件、设备等。单元或系统的功能丧失，无论其能否修复，都称之为失效。可靠性理论即以失效现象为其研究对象，因而涉及工程设计、失效机理分析、失效数据的收集和处理、可靠性的定量评定以及使用、维修和管理等。

可靠性的数学处理的思想的渊源之一是寿命数据的统计分析，它的起点可追溯到英国 17 世纪定期公布的寿命表。后来由于人口统计学，特别是保险数学的发展，寿命数据的分析逐渐采用了现代统计理论和方法，并且寿命概念也逐渐从人和生物体的寿命扩大到工业产品的寿命。可靠性的数学处理思想产生的一个现实的原因是工业生产的发展，虽然单元的可靠性不断得到提

高，但大型设备系统的结构复杂性越来越高，功能越来越多，定量判定并改善系统的可靠性日益成为一个重要的现实课题。1935 年，法国的龚贝尔首先引入了工业产品的“寿命”——从启用到失效的时间——及可靠性概念，并对它们采用了统计处理，从而开始了可靠性数学理论的研究。第二次世界大战期间，由于战争的需要，可靠性数学理论有了较大的发展。战后，特别是 50 年代以后，随着核能、航天、电子计算机等新技术部门的出现，可靠性数学理论日益受到重视，在技术发展中发挥了巨大的作用。例如网络可靠性问题，对于计算机、通讯、油气输送都有重要意义，发展出专门的网络可靠度计算，有很广的应用；再如故障树分析(FTA)，产生于 20 世纪 60 年代，现用于宇航、核电等事业中。近来复杂系统的可靠性分析有较大的发展，通过数学模型，使用马尔可夫过程、补充变量法等对其进行研究，其处理方法与排队论相近。更换策略及备件最优化也是较新的研究课题。

数学物理（**mathematical physics**） 以研究物理问题为目标的数学理论和数学方法。它探讨物理现象的数学模型，即寻求物理现象的数学描述，并对模型已确立的物理问题研究其数学解法，然后根据解答来诠释和预见物理现象，或者根据物理事实来修正原有的模型。

最早的物理问题研究就与数学息息相关。公元前 6 世纪古希腊毕达哥拉斯学派用整数之比论述琴弦的振动，发展起一套音乐理论。公元前 3 世纪阿基米德使用严格的几何方法论证力学原理，求出若干平面图形的重心。他还应用浮力定律研究旋转抛物体在流体中的稳定性，应用杠杆原理得到许多几何图形的面积。公元 2 世纪托勒密利用三角方法研究光学。这些都是数学物理的早期例子。

文艺复兴以后数学物理有了长足发展。17 世纪初意大利科学家伽利略建立了落体运动的正确定律；德国科学家开普勒发现行星运动三大定律；1666 年牛顿建立起万有引力定律，1686—1687 年完成巨著《自然哲学的数学原理》，以牛顿运动三定律为基础建立起牛顿力学体系。其中的三体问题和各种经典的动力系统都是数学物理长期研究的对象。

微积分的发明为解决各种物理和力学问题提供了有力工具。对三体问题、摆的运动及弹性理论等问题的数学刻画引导出一系列常微分方程，求解这些方程就成为牛顿力学中的重要数学问题。到 18 世纪，对弦振动问题、电磁场理论、流体力学和热传导等问题的深入研究开始了偏微分方程和偏微分方程组的研究，后人将这些偏微分方程以及具有物理意义的积分方程、微积分方程和常微分方程统称为数学物理方程。从 17 世纪末开始，对最速降线问题、等周问题的讨论引发了变分学的创立。到 18 世纪中期，牛顿力学的基础开始由变分原理刻画，此后许多物理理论都以变分原理作为自己的基础。

19世纪末由动力系统内行星和卫星轨道的稳定性问题导致微分方程定性理论的发展,到20世纪初,数学物理方程成为数学物理的主要内容。此后等离子物理、固体物理、非线性光学、空间技术、核技术等方面不断提出新的偏微分方程问题,使数学物理方程的内容进一步丰富起来,同时对这些方程的研究也促进了复变函数、积分变换、特殊函数、变分法、调和分析、泛函分析乃至微分几何、代数几何、拓扑学等数学分支的发展。

20世纪初,对电磁理论和引力场的研究,使闵可夫斯基空间和黎曼空间的几何大大发展,成为爱因斯坦狭义相对论和广义相对论的基础。许多物理量以向量、张量和旋量作为表达式。20年代量子力学的诞生依赖于希尔伯特空间理论,并应用了算子的谱理论,量子力学发展成为量子场论时,再次应用了泛函分析的新工具即30年代由匈牙利—美国数学家冯·诺伊曼发展起来的算子代数理论。40~50年代核结构和基本粒子理论兴起时,另一位匈牙利—美国数学家威格纳开创的群表示论又成为主要工具。这些理论在数学的其他分支也起着重要作用。

近几十年来,对基本粒子的内在对称性研究导致了杨—米尔斯理论(即规范场理论)的产生,并推动了纤维丛理论的发展;对经典统计物理学的研究促进了统计理论的深入研究;应用电子计算机后又发展起计算力学、计算物理等学科。数学物理内容日益丰富,同时又促进了数学的发展,成为产生数学新思想、新问题及新方法的一个源泉。数学物理中的许多方法和结果对数学在其他学科中的应用起了借鉴作用,推动了诸学科的发展。

牛顿力学(**Newtonian mechanics**) 以牛顿运动三定律为基础建立的力学,亦称经典力学。这三条定律分别称为惯性定律、运动定律和作用与反作用定律,发表于1686—1687完成的巨著《自然哲学的数学原理》一书中。在此之前,已有一些表述物体运动现象的规律,例如17世纪初期伽利略的落体定律,开普勒的行星运动三大定律等,牛顿是第一个给出系统阐述的科学家。之后牛顿力学成为描述自然界物质运动的标准理论,对其中物体运动规律的研究导致一系列数学新分支的产生。18世纪末法国数学家拉格朗日等人在牛顿力学的基础上发展起分析力学。19世纪末,奥地利物理学家*E.*马赫提出马赫原理,修正了牛顿第一定律,爱因斯坦受此启示,于20世纪初建立相对论,牛顿力学成为相对论的一个特殊情形。20年代又建立起量子力学,在微观现象方面补充了牛顿力学的不足。但在物体运动速度远小于光速的宏观世界里,牛顿力学依然继续发挥作用。

分析力学(**analytical mechanics**) 用数学分析的方法研究力学的方法。始于瑞士数学家欧拉于1736年出版的《力学或运动科学的分析解说》,其中考虑了自由质点和受约束质点的运动微分方程及其解。1788年法国数学家拉格朗日出

版《分析力学》,奠定了该学科的基础,其中采用单值地表示力学位置的所谓广义坐标,导出拉格朗日运动方程、拉格朗日函数等结果。书中不借助几何图形,摆脱了牛顿力学所依赖的几何方法,被认为是运用分析学理论的典范,成为牛顿之后最重要的经典力学著作。1834年英国数学家哈密顿发表《动力学的一般方法》,提出适用于动力学完整系统中的变分原理,被称为哈密顿原理,发展了分析力学。在量子力学建立之前,物理学家曾用分析力学研究微观现象的力学问题,爱因斯坦提出相对论时也曾把分析力学的一些方法应用于相对论力学。由分析力学导出的微分方程、变分学、积分方程等问题成为这些学科发展的动力,反之,也为分析力学提供了许多新的数学工具。

天体力学(**celestial mechanics**) 应用力学规律来研究天体的运动和形状的学科。主要内容是用力学方法研究太阳系内的行星、彗星、月球、卫星等天体的运动,包括确定它们的轨道、编制星历表、计算质量并根据它们的自转确定天体的形状等。其基础是17世纪牛顿创立的力学体系,根本问题是解动力方程。法国数学家克莱罗1743年发表《地球外形理论》,论述了旋转体的构成,描绘了地球在各部分相互之间万有引力作用下的形状,成为最早将纯粹分析理论应用于天体力学的数学家。他还与1752年发表《月球理论》,通过微分方程的级数理论,首次给出三体问题的近似解。此后许多数学家从事天体力学研究,取得结果。1799—1825年拉普拉斯出版《天体力学》5卷,试图给出由太阳系引起的力学问题的完整分析解答。该书讨论了地球形状、行星摄动、月离理论和三体问题等内容,是天体力学的经典著作,标志天体力学全貌的确立。20世纪天体力学有了重大发展,相对论的出现把天体力学和天体物理学结合起来,其影响超出天体力学范围。空间科学的发展产生了实验天体力学和航空动力学,给天体力学增添新的内容,这种发展正方兴未艾。

弹性理论(**theory of elasticity**) 亦称弹性力学,研究弹性物体在外力和其他外界因素作用下产生的变形和内力。人类很早就不自觉地应用了弹性理论的基本原理:将外力所作的功转化为弹性体的应变能,然后将它迅速释放,转化为动能。例如弓箭的使用。但有系统地定量研究弹性理论始于17世纪,英国自然科学家胡克自1660年研究弹性理论,1678年发表了弹性体的变形与所受外力成正比的"胡克定律"。法国科学家E·马略特于1680年也独立得到这一定律。1821年法国工程师纳维埃发表《弹性体平衡与运动法则》,导出三维空间的弹性介质方程。1822年柯西建立起弹性理论的数学结构,将弹性平面的平衡方程奠基于单纯的力上,使用了几乎全部连续介质的基本力学概念。同时期的泊松利用分子间相互作用的理论导出弹性体的运动方程,并给出一般积分法,引入"泊松常数"等。19世纪中叶弹性理论广泛应用于解决工程问题,同时

在理论方面建立许多重要定理，并提出许多有效的算法。例如1872年意大利数学家提出的功的互等定理；1877—1908年提出使用的瑞利—里茨法等。20世纪30年代发展起弹性力学复变函数法，同时积分变换和积分方程在弹性理论中的应用也有新发展。此外还建立了弹性力学广义变分原理，发展起非线性板壳理论、非线性弹性力学、热弹性力学、气动弹性力学等一大批新的分支。

几何光学(geometrical optics) 不考虑光的波长和频率，将光看成是光线的集合，只以光的直进性、光的反射定律和光的折射定律为基础来研究光的路径的数学理论。光学自古希腊以来一直是数学家着重探讨的对象之一。公元前300年左右，欧几里得的《光学》和《镜面反射》是第一批系统的著作，也是几何光学的开端。欧几里得已知道光的反射定律，此后阿基米德、阿波罗尼奥斯、帕波斯等希腊数学家都利用它论述了曲线和曲面有关的几何性质。光的折射问题在古希腊、阿拉伯和中世纪欧洲都有人研究，但直到1621年才由荷兰数学家斯内尔给出正确公式，被称为斯内尔定律。1637年法国数学家笛卡儿在《折光学》里重新给出这一定律，但却给出一个错误的证明。1657—1662年费马提出光线行进的最短时间原理，并由此导出折射定律。17世纪末，英国数学家、物理学家惠更斯证明了光线在具有变折射率的介质中传播时费马原理也是成立的。1827年哈密顿发表《光线论》，开始建立一套光学的数学理论，后来又为此发表一系列论文，不断补充完善。此外德国数学家高斯、英国物理学家麦克斯韦等人也提出一些补充定理。几何光学的研究方法对其他学科亦有启发，如带电粒子在磁场中的运动等。

统计力学(statistical mechanics) 用概率统计方法研究微观力学的一个分支。其基础是18世纪后发展起的气体分子运动论。1859年英国物理学家麦克斯韦利用数理统计方法导出分子运动的麦克斯韦分布规律，成为统计力学的先驱。1896—1904年，奥地利物理学家波尔茨曼提出遍历性假设，认为遍历曲面是闭曲面，如果系统的运动轨道不是闭曲线，则这种轨道就把全部遍历曲面几乎全部覆盖。该假设成为经典统计力学的基础。此外他还提出分子速度变化的波尔茨曼方程。1902年，美国物理学家吉布斯出版《统计力学基本原理》，建立起热平衡状态的统计力学。在量子力学建立以前，以上工作被称为经典统计力学。20世纪20年代，发展起量子统计力学，玻色、费米等统计学家对此做出贡献。另一方面统计力学提出的微分积分方程的求解也有发展，瑞典数学家恩斯科格、英国数学家查普曼充实了这些数学理论。统计力学的研究正在不断深化和扩展，不局限于统计热力学，而以一般系统为研究对象，发展起广义统计力学及不可逆过程的统计力学等新的分支。

统一场论(unified field theory) 又称大统一理论。是粒子物

理学中一种企图把已知的各种力和模式以及存在于粒子之间的各种关系都用一个统一的概念来描述的理论。1864年英国物理学家麦克斯韦出版《电磁场的动力学理论》,将静电学和磁学中的力用一个现在称为电磁场张量的基本量统一起来。1915年爱因斯坦创立广义相对论,将引力现象同描述时空中任一点的几何性质联在一起,并开始试图建立一种能将引力与电磁力统一起来的理论。

1918年德国数学家外尔引入了现在称为线性联络的概念,提出所谓规范不变几何用以概括万有引力和电磁场,作出了建立统一场论的第一次尝试。1921年另一德国数学家、物理学家卡卢察在4维黎曼流形的基础上,引入了5维流形的概念,用来解释电磁效应,以谋求重力和电磁现象的统一描述,被认为是5维统一场论。此后爱因斯坦于1928年以容许绝对平行性空间为基础,美国数学家维布伦等人于1930年以射影联络空间为基础,罗马尼亚数学家弗伦恰努于1936年以非完整空间为基础,霍夫曼于1948年以保形联络空间为基础相继提出了几种统一场论。50年代利用调合积分论对质量和中荷给予解释,60年代末和70年代初提出定域规范不变性概念,为建立现实的统一场论做了准备。目前统一场论仍不断有新理论提出,其中的数学“大统一理论”也在建立之中。

理论计算机科学(theoretical computer science) 关于计算和计算机械的数学理论,也称为计算理论或计算机科学的数学基础。

在漫长的数学的历史发展中,人们研究了各种各样的计算,创立了许多算法,但以计算或算法本身的性质为研究对象的数学理论却是在20世纪30年代才发展起来的。当时为了要解决数学基础的某些理论问题,即是否有的问题不是算法可解的,一些数学基础工作者提出了几种不同的算法定义,后来证明它们是等价的,从而建立了算法理论(即可计算性理论)。30年代前期,K·哥德尔和S·C·克林等人创立了递归函数论,将数论函数的算法可计算性刻划为递归性。30年代中期,A·图灵和E·波斯特彼此独立地提出了理想计算机的概念,将问题的算法可解性定义为理想计算机的可计算性。30年代发展起来的算法理论,对在40年代后期出现的存储程序计算机的设计思想是有影响的。图灵提出的理想计算机(图灵机)中的一种通用机就是存储程序型的。

图灵机是一类自动机,50年代以来一些学者开始考虑与现实的计算机更相似的理想计算机,J·冯·诺伊曼在50年代初提出了有自繁殖功能的计算机的概念。王浩在50年代中期提出了一种图灵机的变种,这比原来的图灵机更接近现实机器。60年代前期,又有人提出具有随机存取存储器的计算机(简称RAM)及多带图灵机等。由此创立了理论计算机科学的一个分支学科:自动机理论。

50年代,乔姆斯基的数理语言学理论把形式语言分成四种:0、1、

2、3 型语言。60 年代中期，人们发现这四类语言与四类自动机之间有对应关系：0 型语言对应图灵机；1 型对应线性有界自动机；2 型对应非确定性的下推存储自动机；3 型语言对应有限自动机。所谓对应是指这类语言正好能为这种自动机所识别。由此产生了形式语言理论。

40 年代后期冯·诺伊曼和图灵等人提出了程序正确性证明和程序验证问题及有关的基本概念和方法。冯·诺伊曼提出借助于证明来验证程序正确性的方法，后来图灵又证明了一个子程序的正确性。但他的方法长期未受注意。1963 年 P·瑙尔，1966 年 E·费洛伊德重新提出图灵的方法，引起广泛的重视。70 年代中期，E·戴克斯特拉曾指出，实际有效的方法是边设计程序边验证之，在设计完毕时证明或验证的过程同时也结束了。J·施瓦兹和 M·戴维斯于 70 年代后期提出他们称之为“正确程序技术”的软件技术。这种方法是先选定成千种基本程序模块，并借助已知的各种验证方法(包括程序正确性证明)来保证这些基本程序的正确性，然后再提出一组能保证正确性的程序组合规则，就可以通过不断的组合，生成各种各样的程序。这些就构成了程序设计理论。

理论计算机科学还包括形式语义学、算法分析和计算复杂性理论。

信息论(**information theory**) 关于信息加工、存储与分析的理论。一般分为狭义信息论、一般信息论和广义信息论三大类。狭义信息论主要研究信息量与通信编码问题，关于信息量的引进与通信编码的可行性问题为尚农信息论，而编码的构造算法及它们在计算机上的实现问题为编码理论，因为它大量应用代数理论，又称代数编码理论。一般信息论除研究上述编码理论外、还研究信号在噪声中的预测、滤波、检测和调制等问题，通常又称为维纳信息论。广义信息论涉及信息处理的有关问题，如计算机科学、经济、社会、心理、生物中的信息处理问题都属于这个范围，是多学科的综合性科学，又称信息科学。

信息论是在长期的通信工程实践和理论研究的基础上发展起来的。

由于通信系统在人类社会中具有神经系统的重要意义，所以这方面的社会实践有悠久的历史，用电的通信系统(电信系统)的采用也有 150 年的历史了。通信系统的历史发展有这样的性质：物理学的电磁理论及电子理论的每一个发展，都直接、迅速地促进了电信系统的新的改进。例如，法拉第于 19 世纪 20 年代发现了电磁感应的基本定律，不久莫尔斯(1932—1935)就发明了电报系统，1876 年，贝尔发明了电话系统。1864 年麦克斯韦预言了电磁波的存在，1888 年赫兹用实验证明了这一预言。紧接着马可尼(1895)、波波夫(1903)就发明了无线电通信系统。1907 年福雷斯特发明能把电磁波放大的电子管，很快就出现了远距离无线电通信系统。大功率超高频电子管发明以后，电视系统迅速问世(1925—1929)。电子在电磁场运动过程中能量交换的

规律被人们认识后，就出现了微波电子管，接着，第二次世界大战期间，微波通信系统、微波雷达技术都投入应用。50年代后期发明了量子放大器。60年代初发明的激光技术，使人类进入了光纤通信的时代。

随着通信工程技术的迅速发展，有关理论问题的研究也不断深入。1832年，莫尔斯建立了电报系统的高效编码方法，可以说是尚农信息论最早的先驱工作。1885年，开尔文曾研究过一条电缆的极限传信率问题。1922年卡孙对调幅信号的频谱结构进行了研究，建立了信号频谱概念，两年后，奈奎斯特把信息率与频谱带宽联系起来。1928年，哈特莱发展了奈奎斯特的工作，并提出把消息考虑为代码或单语的序列。在 S 个代码中选 N 个码即构成 S^N 个可能的消息，他定义"信息量 $=N\log S$"，即定义信息量等于可能消息数的对数。这一点对尚农信息论的建立有直接的影响。1936年阿姆斯特朗提出了宽偏移的频率调制方法，这是一种抗噪声方法，不仅有重要的实践意义，而且是维纳信息论的重要前驱工作。1939年达德利发明了声码器，他提出：通信所需要的带宽至少同所要传送的信息的带宽一样才行，他也是编码理论的重要开创人之一。以上这些先驱性理论工作的主要弱点是把消息看成是一个确定性的过程，主要使用的数学工具是经典傅立叶分析。其结果与许多实际情况不符，表现出较大的局限性。

20世纪40年代初，维纳在研究防空火炮的控制问题时，把随机过程和数理统计的思想方法引入通信和控制系统，揭示了信息的传输和处理过程的统计本质。并对信息系统中的随机过程进行谱分析。为通信系统的理论研究开辟新径，导致维纳信息论的创建。

1948年，尚农用概率测度和数理统计方法系统地讨论了通信的基本问题，得出一些重要的有普遍意义的结论，从而奠定了现代信息论的基础。其理论核心是：在有噪信道中只要信息传输速率低于某个值——信道容量，就存在着一种编码方法，它可以使消息传输过程的差错概率任意小。这个结论具有划时代的意义，从数学方面看，是一个最优编码的存在定理；从工程方面看，促进人们去寻找有效通信系统。50年代后，尚农的数学结论得到进一步的严格论证和全面推广，尚农本人做了大量的工作，发展了尚农信息论各方面的内容。同时，维纳信息论也有了长足的发展，50年代后期，已推广到非平稳过程及时变系统中。60年代初，卡尔曼和伯西将状态变量法引入到滤波理论中。用信号和噪声的状态空间模型代替了协方差函数，用时域的微分方程来表示滤波问题，得到了递推滤波算法，这就是卡尔曼滤波理论。这一理论很快就成功地应用于卫星轨道测量、导弹制导和自动化等许多领域。整个60年代，信息论的主要发展方向是应用。进入70年代，在理论方面又有新的重要发展，如卡拉思等人发展的信息过程理论。

40年代后，信号检测理论（维纳信息论的一个分支理论）也有极

大的发展。1943年诺恩提出了匹配滤波理论。1946年卡切尼可夫提出了判断错误概率为最小的理想接受机理论。50年代,统计检测理论发展很快,米德尔顿等人用最小平均风险准则(贝叶斯准则)来处理最佳接受问题,使检测理论发展到一个新阶段,并使各种准则统一于风险理论。50年代末卡庞提出采用非参数统计判断方法,70年代这一方法得到广泛的实际应用。

现在,维纳信息论和尚农信息论都有更大的发展。在尚农信息论方面,现在重要的动向是:信息概念的深化;多址和多用户信道理论;多重相关信源编码理论等的发展。这些领域都与80年代信息工程—空间通信,计算机网络,图象电子学等密切相关。在维纳信息论方面,光纤通信已成为现实,成象雷达以及二维图象信息处理也有迅速发展,为此,量子检测和估计理论、非参数检测和估计理论及非线性检测与估计理论都有新的发展。现代的一个重要动向是这两种信息论的互相渗透和互相促进。

随着电子计算机的产生和广泛应用,信息处理问题逐渐推广到社会、经济、心理、生物等的各个领域,产生了广义信息论。它本质上就是上述两种信息论在前述各个领域中的应用,以及由应用促进了的信息论本身的发展,同时,也包含了"信息"的哲学问题等,它们随着两种信息论的发展也有了长足的进展。

信息论是一门"横向科学",与数学密切相关,它不仅深刻地应用了许多数学理论,而且它的一些分支就是数学的分支。

控制理论(control theory) 研究系统的调节与控制的一般规律的科学。

自动控制的思想可以追溯到遥远的古代。我国古人发明的指南车(公元前200年或更早)就是一个按扰动原理构造成的开环自动调节系统,而北宋时(1086—1089)苏颂等人制成的水运仪象台则是一个按被调量偏差进行调节的闭环非线性自动调节系统。近代的自动控制装置,要数俄国人普尔佐诺夫1765年发明的蒸汽锅炉水位调节器和英国人瓦特在1784年发明的蒸汽机转速离心式调节器为最早。麦克斯韦、巴贝吉等人也在自动控制思想的发展上做过一些工作。但自动控制正式成为一门学科还是20世纪40年代的事。1947年,出现了关于自动控制原理的第一本教材《伺服机件原理》。次年,维纳出版了他的名著《控制论——关于在动物和机器中控制和通讯的科学》,宣告了控制论作为一门学科的产生,这本著作概括了广阔领域里的丰富经验和许多自然科学的理论成果,包括工业控制、火炮控制系统、通讯系统、生物系统等,为早期控制论的发展奠定了理论基础。维纳把这门学科起名为"控制论"(Cybernetics),它的原始含义是非常广泛的。作为与工业等系统的调控直接有关的那一部分内容,后来发展成为"control theory",汉语译为控制理论(有时也译为控制论)则是50年代末到60年代初形成和发展起来的现代控制理论。

50年代,由于当时的数字电子

计算机在当时主要是电子管式的，它的生产工艺复杂、价格昂贵、体积庞大，还不可能在生产过程的自动控制系统中得到普遍的直接应用。当时自动控制所需要的运算主要是用模拟计算装置实现的。当时的控制理论也适应于这种技术手段，主要使用传递函数分析方法，称之为“频率域方法”。50年代末60年代初，由于空间技术的需要，对自动控制的精确性及各种经济指标都提出了严格的要求，晶体管及随后集成电路计算机的出现为实现这些要求提供了现实的工具，这促进了控制理论的大发展。首先是从频率域方法过渡到时间域方法(状态空间方法)。这种方法是R·E·卡尔曼提出的，他先用一个状态方程和一个观察方程来完整地描述线性动态过程，并在此基础上引入了能控性和能观测性的概念，它们为控制理论的发展开辟了广阔的道路。

1958年，Л·C·庞特里雅金提出最优控制的极值原理，1960年，卡尔曼提出数学滤波理论，它们与能控性和能观测性概念一道，成为控制论进入现代控制理论阶段的三大标志。现代，控制理论为实际系统的描述、分析综合和设计、预测和决策等问题提供了系统的理论和方法，成为系统科学的一个组成部分，又可以说是信息科学的一个基本方面。

控制理论不是直接研究现实世界中的受控对象，而是研究受控对象的模型——数学模型，简称为控制系统。由数学模型的不同，可分为不同的控制系统理论，如线性控制理论，非线性控制理论、微分控制论和分布参数控制论等。还有最优控制论和大系统理论也是现代控制理论的分支理论。它们都是当代控制理论的发展方向。其中线性控制理论和最优控制理论是较早发展起来的(50—60年代)，非线性控制理是60年代末、70年代以后发展起来的，以R·W·布劳克特等人运用李代数、微分几何等工具研究流形上的非线性控制系统较有代表性，他们在系统的能控性、能观测性、可逆性、干扰解耦、最优控制等方面得到了很有启发性的成果。近年来、分岔，失稳与控制、混沌等问题成为非线性控制理论的一个新领域。大系统理论则是70年代才开始发展的现代控制理论的分支。有一种说法，认为大系统理论是第三代控制理论(第一代为维纳的经典控制论，第二代为以状态空间方法为主要特征的控制理论)，使控制理论从研究单个系统的控制，发展到研究带有多个相互作用、相互影响的复杂系统的控制。尤其是“大系统”有时要包括人的因素在内。它所研究的对象为：整个自动化车间、工厂、铁路、航空、城市交通运输的管理和控制，国民经济的计划、协调，生态系统和环境保护，生物控制等等。它的对象和方法实际上已超出原有控制论的范畴，而与运筹学、管理科学等结合起来了。目前，大系统理论的研究十分活跃，它的关于整体最优化、稳定性等的思想已经渗透到许多重大的工程、管理问题中去了。但是离理论上的成熟，还有不小的距离。大系统理论是当代控制理论的一个重要发展

方向。

数理语言学(**mathematical linguistics**) 用数学思想和数学方法来研究语言现象的一门语言学科,数理语言学使语言学研究与现代数学、计算机科学、控制论及人工智能等联系起来,是现代数学的一个重要应用领域,因而也成为现代应用数学的重要分支学科。

用数学思想方法研究语言现象的想法在19世纪就产生了。首先是俄国数学家布里亚柯夫斯基,他于1847年指出,可以用概率论来研究语法、词源并可对语言进行历史比较。1894年,瑞士语言学家索绪尔进一步指出,在基本性质方面,语言中的量和量之间的关系可以用数学公式有规律地表达出来。后来,在他1916年出版的名著《普通语言学教程》中进一步指出,语言学好比一个几何系统,可以归结为一些待证的定理。1904年,波兰语言学家古尔特内指出,语言学家应掌握尽可能多的数学知识,因为语言学日益接近精密科学,将根据数学的模式,一方面“更多地扩展量的概念”,一方面“将发展新的演绎思想的方法”。1933年,美国语言学家布龙菲尔德提出一个著名的论点:“数学不过是语言所能达到的最高境界”。还有许多人用数学方法对语言进行了实际的研究。例如,俄国数学家马尔可夫在1913年就用概率论的方法研究过普希金的长诗《叶夫根尼·奥涅金》中的元音和辅音的序列。但是,所有这些早期的想法和研究,都没有对语言学本身发生显著的影响,它们只起到前驱的作用。

20世纪中叶,以原子能技术、电子计算机技术和航天技术为标志拉开了新技术革命的序幕。由于科学技术的突飞猛进的发展,人们面临着科技文献资料飞快增长,有时被称为“信息爆炸”的困境。面对排山倒海而来巨量文献,人们为了解最新科技成果、获得有价值的情报,不得不花费大量的人力、物力从事大量的翻译、检索工作,这大大地影响了科研工作的效率。

电子计算机产生并得到广泛应用的50年代,人们开始考虑用电子计算机完成信息处理工作,提出了机器翻译、机器自动文摘和机器自动检索等问题。要使计算机能处理语言问题就必然要先把语言“数学化”,建立语言的数学模型,即首先要用数学思想和方法来研究语言现象。用自然语言进行人机对话是新一代电子计算机的设计目标,这要求电子计算机能理解自然语言,这也提出语言数学化的要求。

在20世纪中叶,科学技术的发展也具备了使语言学数学化的条件。首先,数学有了长足的进展,概率论、数理统计、信息论、集合论、数理逻辑、图论、格论和抽象代数有了突出的发展,为用数学研究语言这一极其复杂的现象提供了有力的工具。其次,语言学进一步精确化,例如叶斯泊森的“分析句法”,哈里斯等人的替换一分布研究法,乔姆斯基的“转换文法”等使语言学严格化、精确化,使其数学化有了可能。再次,控制论、计算机科学和人工智能等的发展为语言学的数学化提供了技术保障。由于有了用数学思想

方法研究语言现象的需要和可能，20世纪50年代，数理语言学成了一门独立的分支科学。

数理语言学的研究领域有三个：应用数理统计、概率论等方法计算各种语言单位在语言中出现的频率或概率；应用数理逻辑等方法编制机器翻译系统中的代码语言和媒介语，并制定情报文献自动检索中的代码系统；应用数学方法模拟自然语言，使语言成为一种精密的形式化的系统。

数理语言学的发展至今经历了三个发展阶段：统计语言学、代数语言学和算法语言学。这三个阶段的语言研究构成了数理语言学的全部内容。

第一阶段的统计语言学又称计量语言学，研究工作主要有两项：语言统计研究，即借助数理统计的方法来研究语言结构与语言单位、语言变化与语言差异，以及语言类型之间的一系列规则；语言概率研究，即借助概率论的方法对字、词的出现频率进行分析研究，据此来制定最简便而有效的编码设计方案。它主要应用于教材编写、学校教学、辞书编纂及各类频率词典的编写等方面。采用统计语言学的方法还可以较准确地测定和分析作家的作品词汇、修辞手法、文章风格。在军事上可用于破译密码、刑事侦察上可用之分析确定匿名文章和信件的作者等。

马尔可夫对普希金著作的统计工作可以看作是统计语言学的先导工作。在他之前，德国人凯定于1898年就用统计方法编出世界上第一部频率词典《德语频率词典》，20世纪初，美国人桑戴克做了大量英语词汇的频率统计工作。他的名著《教师二万词词书》、《教师三万词词书》，至今仍有重要的参考意义。这方面的工作后来普遍展开，出现了各种语言，各种用途的频率词典。与此同时，人们考查了词的出现频率与词的序号的关系，即词的序号分布规律。1916年，艾思杜(法)最先提出一条规律：词的绝对频率(n_r)与它的序号 r 的乘积大体上稳定于一个常数 k，即 $n_r \cdot r=k$。1928年，贡东(美)改进了艾思杜的结果，1935年齐普夫(美)，1936年裘斯又对贡东的工作做了新的改进。50年代初斯曼德布洛特(英)利用概率论和信息论来研究这个问题，提出了分布规律公式。其他方面的工作也逐渐展开，并在统计工作中应用了电子计算机，在语言风格及一些文学著作研究(如《红楼梦》研究)中取得许多成果。密码的编制和破译甚至形成为独立的学科。

第二阶段的代数语言学又称为形式语言学，主要研究如何对语言的形式结构进行严格的数学描写，其目的是创立一种形式化的普遍语法或普遍语法理论。目标之一是把语言的递归机制公式化，使其成为普遍语法的数学模式。自动机理论和程序设计语言是它的两个重要领域。

乔姆斯基(美)的形式文法是代数语言学的首批重要成果之一，50年代，他提出转换文法，后来又进一步提出生成转换文法的标准理论和扩充的标准理论，为语言学的数学

化、形式化奠定了基础，他的理论，成为当代数理语言学的重要研究课题。60年代，苏联的库拉金娜和罗马尼亚的马尔库斯进一步建立了语言的集合论模型，解决了一大类精确描述自然语言语法分析的过程。同一时期，美国的巴希勒和兰姆别克提出了句法类型演算理论，可以通过有穷步骤对句子进行判定。1970年前后，美国的蒙太格把内涵逻辑学应用于自然语言研究，后来他又与克勒斯威尔一道，把它与生成转换文法结合起来，提出一种对自然语言进行逻辑分析的方法，称为蒙太格方法。近来这方面有很多新进展，人们认为它不仅对语言学、而且对认知科学都有着重要价值。

第三阶段的算法语言学也称为计算语言学，其目的是把语言研究归结为建立语言表层结构和深层结构的关系，并对深层结构进行研究，以揭示"程序文法"(与数学中的算法相对应的文法规则)的产生和形成的规律，为发展智能模拟创造条件。这一阶段的数理语言学具有较大的应用性。在这方面许多人做了重要的工作。例如，美国人佩里和肯特设计过一种适用于检索冶金学文献的信息语；1970年，美国人伍兹研究出一种语言自动分析法ATN；1973年，美国的卡普兰提出通用句话生成器GSP；1972年，西蒙和斯乐康等采用语义网络来生成句子的表层结构，对同一个深层结构，可得出许多同义的表层结构来；1975年戈尔德曼提出分辨网络。50年代开始了机器翻译的研究工作，至今已取得重大的成果，正在得到深入而全面的发展。自然语言理解是算法语言学的主要研究领域之一，这也是新一代计算机设计的关键问题之一。早在60年代人们就建立了一批自然语言理解系统，例如1963年，美国林德赛设计的SAD－SAM系统，格林的BASEBALL系统，1968年，拉菲尔设计的SIR系统，波布洛设计的STVDENT系统等；70年代建立了一些更先进的系统，如1972年伍兹建立的LUNAR系统，曾用于比较、评价阿波罗火箭带回的月球岩石化验数据；同年，维诺格拉德建立了SHRDLV系统，用自然语言指挥机器人手排布积木，1975年，杉克研制了MA－RGIE系统，同年，斯查克建立了SAM系统，1978年，威林斯基建立了PAM系统，其目的是使用脚本和打算来理解自然语言写的简单故事。1980年，我国学者研制成RJD－80汉语人机对话系统。至此，人们研究的还限于书面语言的理解。80年代末，又提出口语的理解问题，这涉及到十分复杂的理论和技术问题，是数理语言学的前沿课题之一。

组合数学(**combinatorial mathematics**) 又称组合论、组合分析或组合学，是数学的一个分支。粗略地说，它是研究任意一组离散性事物按照一定规则安排或配置方法的数学。当符合要求的安排并非显然存在或不存在时，首要的问题就是证明或否定它的存在；当符合要求的安排显然存在或已被证明存在时，求出这样的安排的个数，以及构造出这样的安排；如果给出了最

优化的标准，往往还需要寻求最优的安排；等等。上述各方面的问题依次被称为存在性问题、计数问题、构造问题及最优化问题。图论中的计数问题，各种条件下的排列、组合、复合、划分、分类、检索、区组设计、递归、母函数、数列变换等方面的许多问题，都是组合数学研究的具体对象。

组合数学是一个既古老又新兴的数学分支。相传、早在公元前2200年左右，中国的大禹治水时发现过一个"神龟"，背上刻有花纹，其中有一个方形阵列，如用阿拉伯数码表示，则为

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

其中，每行、每列及每条对角线上的三个数之和都等于15。这个神话传说表明，中国人早在古代可能就构造出这种组合结构。公元前1100年左右，在中国已隐约产生了排列的概念。宋代杨辉造出过表明二项式系数间的基本而重要的关系，即 $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$ 的杨辉三角形(也叫贾宪三角形，见〔二项式定理〕)，朱世杰得到了组合恒等式

$$\sum_{1\leq r\leq n}\binom{r+p-1}{p}=\binom{n+p}{p+1},$$

清代李善兰则证明了此恒等式对一切正整数 p 成立。中世纪阿拉伯和印度的学者也研究过某种递归关系和一些有趣的排列与组合问题。

在西方，组合数学的基本概念的产生和发展与其他一些数学分支，如代数学、数论、概率论等的发展交叉在一起。组合数学和数论可以说是姐妹学科，它们在内容上有一定的共同部分，而且彼此真正地互相充实丰富。一些著名的数论函数，如欧拉函数 $\varphi(n)$，麦比乌斯函数 $\mu(n)$，划分函数 $p(n)$ 等，至今仍是组合数学研究的对象。组合数学与概率论的关系更为密切。早在17世纪中叶，帕斯卡、费马、惠更斯等人研究一些复杂的赌博问题，用的就是排列与组合的方法。他们的工作不仅奠定了早期概率论的基础，而且建立了组合方法的原理。

莱布尼茨最早把有关组合数学的问题作为一种数学提出。在他1666年的研究论文《组合的艺术》中，表述了某些现代计算机理论的先驱思想：一切推理和发现，不管是否用语言表达，都能归结为诸如数、字、声、色这些元素经过某种组合的有序集合。在此文中，他第一次给出"组合学"这一术语，并希望这门学问能应用于"整个数学领域"。

瑞士数学家雅各布·伯努利的著作《猜度术》(1713)对组合数学的形成也有重要意义。该书是早期概率论中最重要的著作，作者运用所谓伯努利数通过完全归纳法证明了 n 为正整数时的二项式定理，他把排列与组合的方法应用于概率论中，给出了24个有关在各种赌博情形中利益预测的例子。

一般认为，由于莱布尼茨和伯努利的工作，组合数学开始成为数学的一个分支。

在18世纪，欧拉对组合方法的发展做出了重大贡献。他关于自然

数的分解与合成的研究为组合构形的枚举方法之一——母函数方法奠定了基础(母函数的一般方法是由法国数学家拉普拉斯在1812年发展起来的),他提出的欧拉猜想也刺激了这门学科的发展。

在很长一段时间内,许多人从数学游戏的角度来接触组合数学的课题,例如,巴歇砝码问题、柯克曼女生问题、欧拉36名军官问题等都是这方面有名的例子。这些问题很能推动人们去思考,它们的解答也常常是机智和精巧的。在这个过程中、人们得到了组合数学中一般的存在性定理和计数原理,诸如抽屉原理、母函数方法、递归关系解法、容斥原理,等等。

20世纪以来,特别是由于计算机科学的巨大发展,使组合数学改变旧有面貌,成为一门极富生命力的新兴数学分支。现代组合数学的主要特点是它大量地应用抽象代数学工具和矩阵工具,使问题的提法和处理方法表现出极大的一般性。另一个重要特点是它适应着计算机科学发展的现状、趋势和要求、很注重方法的能行性和程序化的要求。

20世纪30年代以来所建立的关于存在性的三大基本定理已成为组合数学经常使用的工具。它们是"相异代表组定理"、"偏序集分解定理"和"广义抽屉原理"。

如果要从一批社团中各自推选出一名代表来组成一个代表组,规定每一代表只代表一个社团,这个代表组就叫作相异代表组。美国数学家霍尔在1935年给出了在一般情况下存在相异代表组的充要条件,即"相异代表组定理"。这个定理对区组设计、图论问题等分析都很有用。现代组合数学的若干理论都是建立在偏序集基础之上的,由有限个元素构成的有限偏序集往往可分解成若干条"链"。狄尔华斯在1950年发现"一个偏序集分解成链的最少条数与该偏序集所含最大无序子集的元素个数相等",这个定理不仅对一般组合数学而且对生物科学也有很大用处。"如果有N个抽屉,要放入$N+1$件以上的物品,那么至少要有一个抽屉内放入两个以上的物品"。这就是早为人所共知的看上去十分简单的"抽屉原理"。1930年,英国数理逻辑学家拉姆齐把它做了极为宽广的扩充,证明了一个深刻而有用的定理,即"广义抽屉原理"(发表在论文《论形式逻辑问题》之中)。对于与此相关的"拉姆齐数"的研究已经成为近年来组合数学的热门课题。"广义抽屉原理"对现代计算机设计研究也有重要应用。

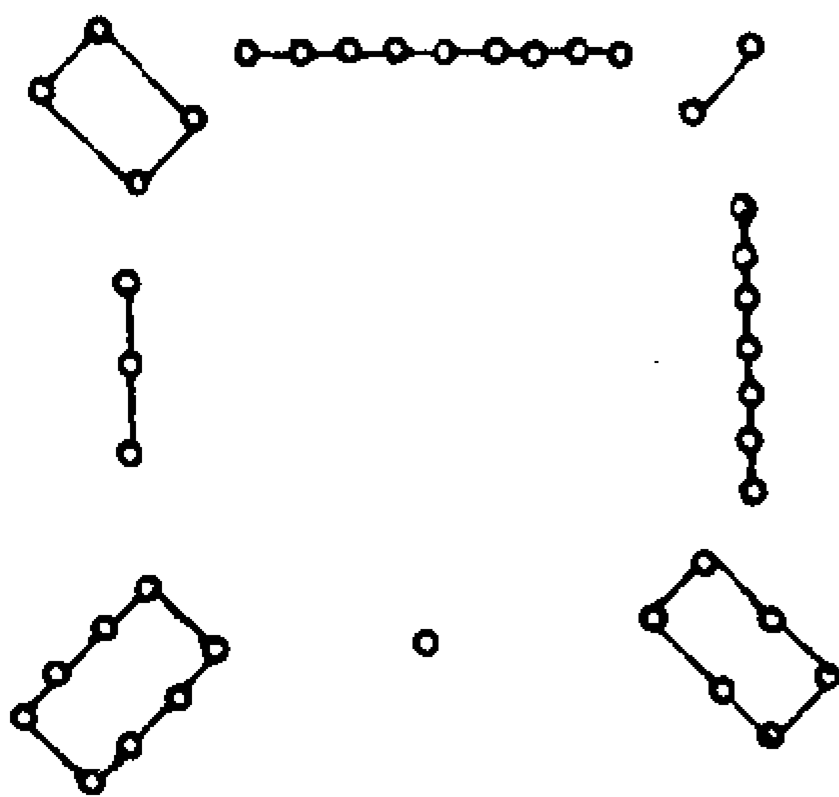
组合数学中的计数理论在20世纪也有重大发展。在伯努利时代即已熟知的"包含排除原理"得到扩充和发展。由美国数学家波伊亚在1937年左右建立起来的"计数定理"是从群、树形、结构图等个数的计算过程中分析总结出来的。波伊亚把19世纪末英国数学家伯恩赛德关于置换群的计数定理与"循环指标"结合起来,构成著名的枚举定理或计数定理。波伊亚计数定理已成为组合数学中强有力的计数工具。1964年,英国数学家罗大把数

论中的麦比乌斯函数及反演公式应用于定义在一般偏序集上的二元函数类构成的“结合代数”之上，引进广义麦比乌斯函数及反演公式。这样，他为组合数学提供了一个极为有用的工具。

自 20 世纪 50 年代以来，许多理论学科和应用学科，向组合数学提出了大量的具有理论和实际意义的课题，促使它产生许多新理论，如区组设计、组合优化、组合算法、组合矩阵论等。这门具有悠久历史的数学分支变得异常活跃并且取得丰硕成果。

纵横图(magic square)　将 1 至 n^2 的自然数排列成纵横各有 n 个数的正方形，使每行、每列、有时还包括两条主对角线的 n 个数的和（或连乘积）都相等〔等于 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$〕，这种排列称为 n 阶纵横图，也叫 n 阶幻方。

纵横图的起源可以追溯到公元前 2200 多年。相传，我国大禹治水时，发现一个神龟，背上刻有图案



表示神赐给他的一种旨意。与此有关的传说具有很强的神秘色彩。上面这个图案如用阿拉伯数码表示，则是一个三阶的纵横图

4	9	2
3	5	7
8	1	6

中国东汉学者郑玄(127—200)注易纬《乾凿度》中“太一取其数以行九宫，四正四维皆合于十五”，大意是：太一神依照一定的顺序巡行于九宫，九个位置的图案所显示出的数字表明太一神巡行的次第。因此古代人也称三阶纵横图为九宫数或九宫图。如北周学者甄鸾注《数术记遗》说：“九宫者，二、四为肩，六、八为足，左三右七，戴九履一，五居中央”。与前面所说的龟文暗合。

我国历代学者对纵横图有过许多研究。“纵横图”，一词最早出现在南宋杨辉所著《续古摘奇算法》(1275)之中。杨辉在其中还给出了三至十阶的纵横图及其变体共 13 种。明代王文素的《算学宝鉴》(1524)中载有多种纵横图，程大位的《算法统宗》(1592)卷 17 载有 14 种纵横图。清代方中通的《数度衍》(1661)卷首之一“九九图说”后附纵横图 14 种，与杨辉著作中的基本相同；张潮的《心斋杂俎》卷下“算法图补”中又增补纵横图若干种。

中世纪的阿拉伯学者对纵横图也有研究，并传入中国。在 1956 年西安市郊出土了 1278 年阿拉伯学者扎马鲁丁为西安王推算历法期间所作的“东阿拉伯数字”的铁制六阶纵横图，如用现代阿拉伯数码表示，如下图：

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

在欧洲，研究纵横图造法大约始于 14 世纪。德国著名艺术家兼数学家迪勒(A. Dürer，1471—1528)曾研究纵横图，他在 1514 年所制作的四阶纵横图在 1878 年由英国人傅兰雅传入中国。大数学家欧拉和凯莱都曾指出过，纵横图不仅仅是一种数学游戏，也有研究价值。

现在，人们已经发现了各式各样的纵横图，如广义幻方、双重幻方、同心幻方、分块幻方、质数幻方、幻体、双随机矩阵等。中国古人对纵横图的研究是组合数学发展初期的重要内容，现在纵横图仍然是组合数学的研究课题。

图论(**graph theory**) 数学的一个分支。它以图为研究对象。图论中的图是由若干给定的点及连接两点的线所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系，用点代表事物，用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。

图论本身是应用数学的一部分，因此，历史上图论曾经被好多位数学家各自独立地建立过。关于图论的文字记载最早出现在欧拉 1736 年的论著中，他所考虑的原始问题有很强的实际背景。后来，德国自然科学家基希霍夫对于电网络的研究导致他发现了图论的基本概念和定理；英国数学家凯莱为了计数有机化学中的同分异构而考虑到树；英国数学家哈密顿提出了一个与图论有关的难题；不久又出现了著名的四色猜想，这些工作都促进了图论的产生和发展。在 20 世纪内，图论中又有大量的新发现，并被应用到许多领域。

图论起源于著名的柯尼斯堡七桥问题。在柯尼斯堡的普莱格尔河上有七座桥将河中的岛及岛与河岸联结起来，如图 1 所示，A、B、C、D 表示陆地。

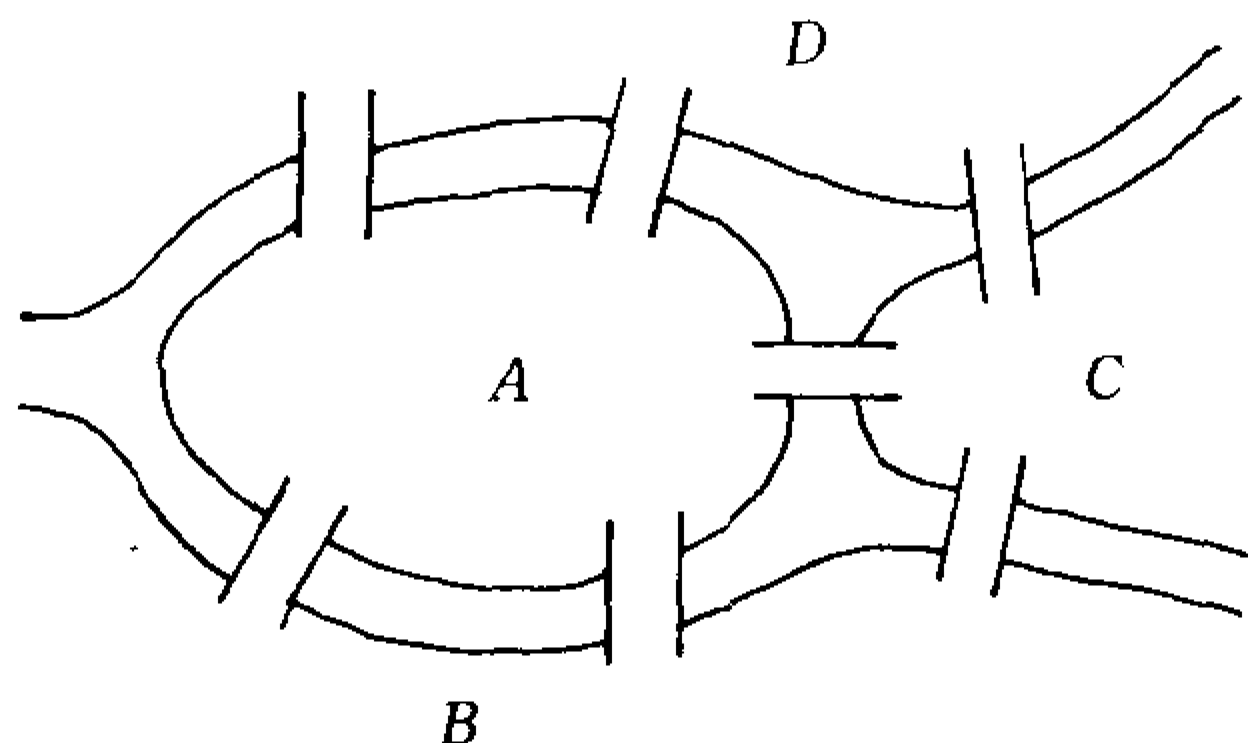


图 1

问题是要从这四块陆地中任何一块开始，通过每一座桥正好一次，再回到起点。然而无数次的尝试都没有成功。欧拉在1736年解决了这个问题，他用抽象分析法将这个问题化为第一个图论问题：即把每一块陆地用一个点来代替，将每一座桥用联接相应的两个点的一条线来代替，从而相当于得到一个"图"(图2)，欧拉证明了这个问题设有解，并

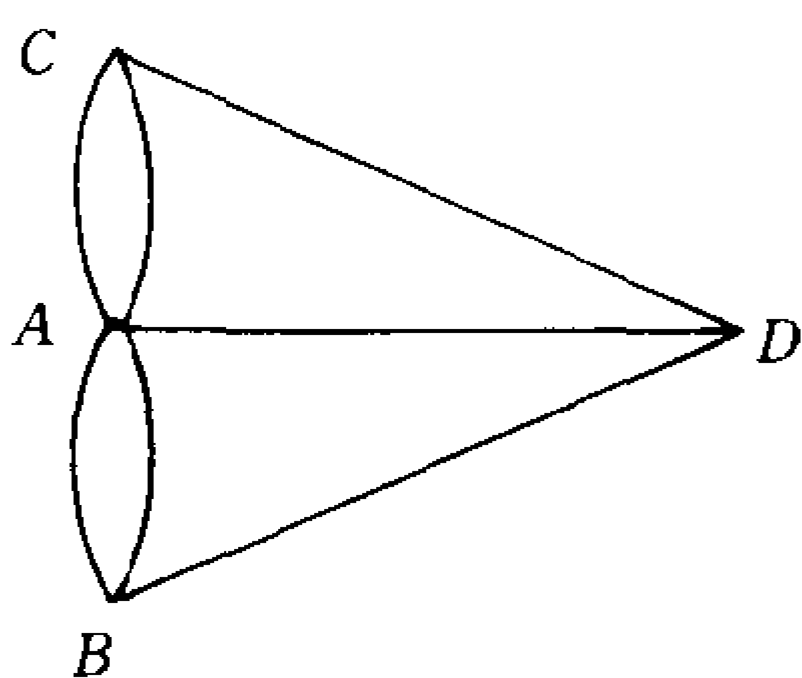


图 2

且推广了这个问题，给出了对于一个给定的图可以某种方式走遍的判定法则。这项工作使欧拉成为图论(及拓扑学)的创始人。

1847年，德国学者基希霍夫在研究物理问题时建立了树的理论。他用一类线性方程组来描述一个电网络的每一条支路中和环绕每一个回路的电流。他象数学家一样抽象地思考问题：用一个只由点和线组成的相应的组合结构来代替原来的电网络，而并不指明每条线所代表的电气元件的种类。事实上，他把每个电网络用一个基本图来代替。为了解相应的方程组，他用一种结构方法指出，只要考虑一个图的任何一个"生成树"所决定的那些独立圈就够了。他的方法现已成为图论中的标准方法。图3表示一个电网络 N 及基希霍夫为它设计的基本图 G 和一个生成树 T。

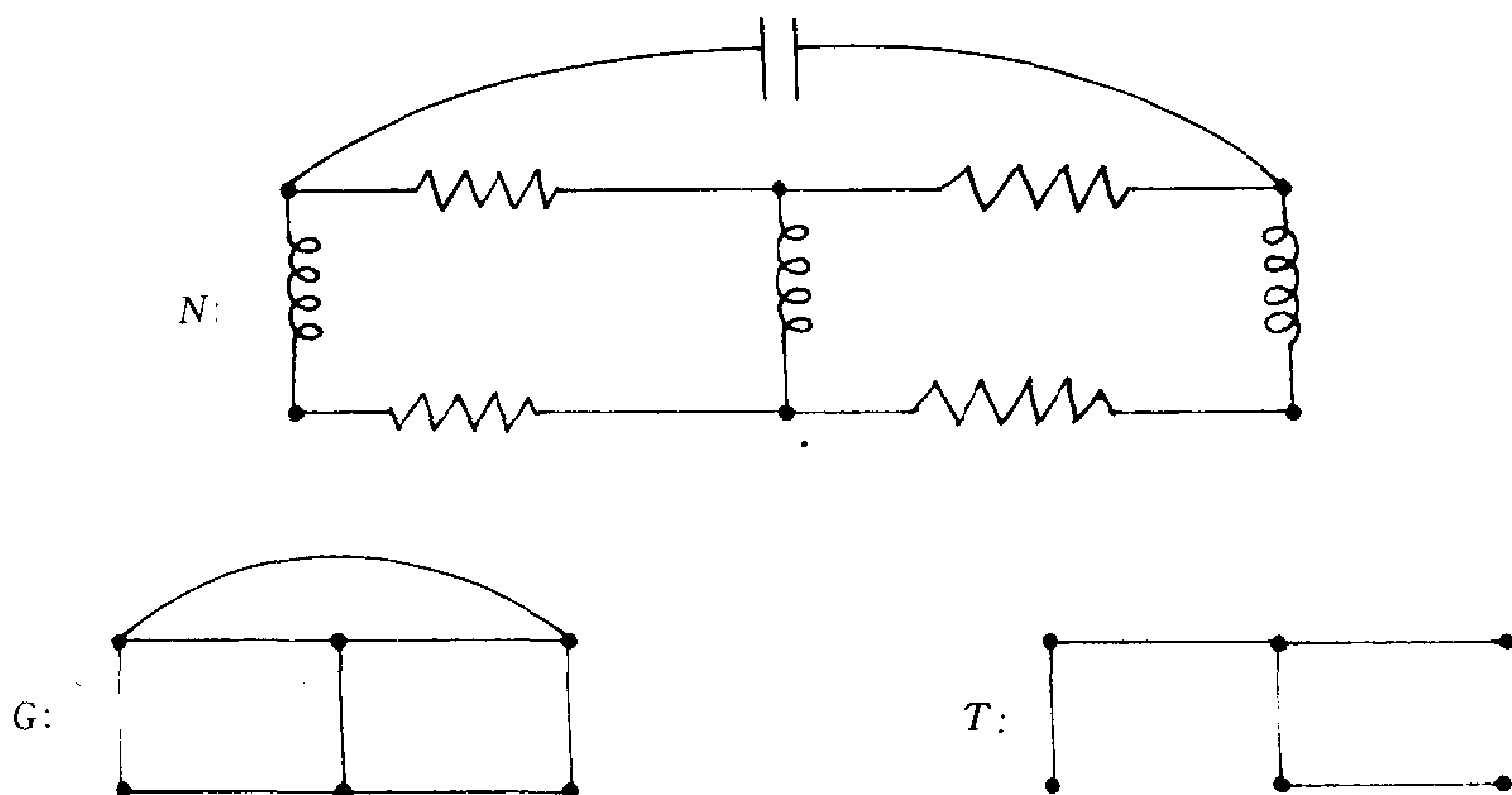


图 3

1857年，英国数学家凯莱从事计数有给定的碳原子数 n 的饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的同分异构物(如图4所示)，独立地提出了树的概念。凯莱把这个问题抽象地叙述为：求有 P 个点的树的数目，其中每个

点的度等于 1 或 4，树上的点对应一个氢原子或一个碳原子。凯莱的工作是图的计数理论的起源。法国数学家若尔当在 1869 年作为一个纯数学对象独立地发现了树，他并不知道树与现代的化学学说有关。

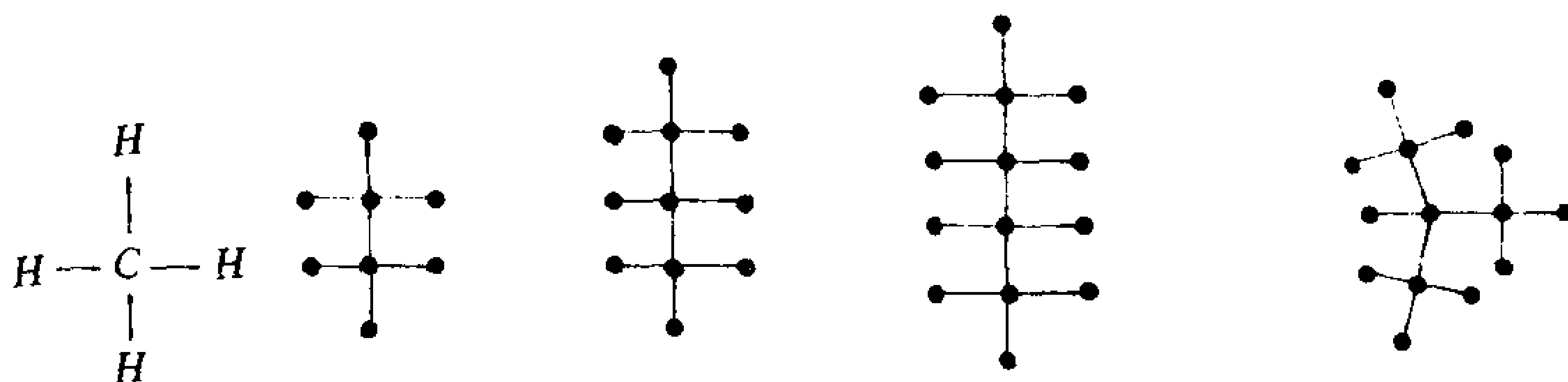


图 4　最小的饱和碳氢化合物

1859 年，英国数学家哈密顿发明了一种游戏：用一个规则的实心十二面体，它的 20 个顶点标出世界著名的 20 个城市，要求游戏者找一条沿着各边通过每个顶点刚好一次的闭回路，即“绕行世界”。用图论的语言来说，游戏的目的是在十二面体的图中找出一个生成圈。这个问题后来就叫做哈密顿问题。由于运筹学、计算机科学和编码理论中的很多问题都可以化为哈密顿问题，从而引起广泛的注意和研究。

在图论的历史中，还有一个最著名的问题——四色猜想。这个猜想说，在一个平面或球面上的任何地图能够只用四种颜色来着色，使得没有两个相邻的国家有相同的颜色。每个国家必须由一个单连通域构成，而两个国家相邻是指它们有一段公共的边界，而不仅仅只有一个公共点。四色猜想有一段有趣的历史(见四色问题)。每个地图可以导出一个图，其中国家都是点，当相应的两个国家相邻时这两个点用一条线来连接。所以四色猜想是图论中的一个问题。它对图的着色理论、平面图理论、代数拓扑图论等分支的发展起到推动作用。

20 世纪以来，图论不断地发展和完善，并获得广泛的应用。1936 年，德国社会心理学家莱温把图论应用于心理学研究。他提出，一个人的“生活空间”可以用一张平面地图来代表，其中各个区域代表一个人的各种活动。他所处理的实际上是图，其观点影响了当时的一批心理学家，他们提出了图的一种心理学解释，其中点代表人，而线代表人与人之间的关系，包括爱、恨、交往与支配等。他们对图论有一些独到的发现。1960 年，荷兰血统的美国物理学家乌伦贝克用图论来研究统计力学，他以点来代表分子，两个点间的连线表示分子间的相互作用。在杨振宁和李政道的工作中也有类似的解释，他们以点表示欧氏空间中的小立方体，每一个立方体可能被一个分子占有或不被分子占有，两个点的连线则表示两个空间都被占有。图论还被应用于概率论中的马尔可夫链的研究。例如，南斯拉夫血统的美国数学家弗勒引进了有向图：点代表事件，有向线表示两个事件直接相继有正的概率；有向图的

一种类似的表示法还出现在数值分析的矩阵求逆和特征值计算之中，美国数学家瓦尔加1962年建立的一种对方阵构造有向图的方法与处理马尔可夫链的方法相类似。在线性规划和运筹学的各领域中，也利用图论的方法来研究网络上流的形式，1962年以来已有许多工作。在纯粹数学中，图论被用来研究拓扑学中的单纯复形，美国数学家维布伦在20世纪20—30年代就做出了先驱性的贡献。他把一个图定义为维数等于1或0的一个复形，1－维单形是一条线，只由点组成的复形是零维的。除了这些特殊情形外，每一个图都是一个1－维复形。正因为这个原因，在1936年出现的第一本图论的书(柯尼希著)的副标题是“线复形的组合拓扑学”。

图论的广泛应用，促进了它自身的发展。20世纪40—60年代，拟阵理论、超图理论、极图理论，以及代数图论、拓扑图论等都有很大的发展。

模糊性数学(**mathematics of fuzziness**) 研究和处理模糊性现象的数学理论和方法。1965年美国控制理论学者扎德发表了论文《模糊集合》(或译不分明集合、弗晰集合)、标志着这门新学科的诞生。它的产生是为了适应处理那些运用传统数学方法无法适当模拟的现象的迫切需要，因为这些现象或是很难给予确切定义，或是它们包含着实质上是模糊的相互关系。具有不确定性的事物和现象不能用经典集合论来刻画。扎德引进“隶属度”的概念：对论域中的子集A，通过它的特征函数x_A来描述

$$x_A=\begin{cases}1 & (u\in A),\\ 0 & (u\notin A)。\end{cases}$$

x_A称做u对A的隶属度，对于经典集合论来说，x_A非1即0，$x_A=1$表示u百分之百地隶属于A，$x_A=0$表示u不属于A；模糊集合则突破这一限制。所谓给定u的一个模糊子集A，乃是指给定了映射$u_A: u\to[0,1]$。u_A叫做A的隶属函数，也叫做u对A的隶属度。

为了研究上述所谓的隶属度，发展起来模糊性统计，模糊算子理论、模糊逻辑代数、模糊线性代数、模糊矩阵理论等许多研究方向。从纯数学的角度讲，集合概念的扩充使许多数学分支增添了新的课题，如不分明拓扑、不分明线性空间、模糊测度与积分、模糊群，模糊范畴、模糊图论，等等。

模糊性数学的发展主流是在它的应用方面。人们用模糊数学的方法来刻画运用概念进行判断，评价、推理、规划、决策和控制等过程。于是发展起模糊聚类分析、模糊模型识别、模糊综合评判、模糊规划、模糊决策、模糊控制等方法。这些方法已被广泛应用到图象识别、人工智能、自动控制、信息处理、经济学、心理学、社会学、生态学、语言学、管理科学、医疗诊断、法律和哲学等研究领域。然而，模糊性数学最重要的应用领域是计算机智能。

模糊性数学自1965年创立以来，已经取得很大的发展。以下关于模糊性数学研究论文的统计数字足以说明问题

截止年限	论文及文献总数
1976	763
1980	约 1,500
1982	2,410
1983	3,064
1984	约 5,000

国内外出版了多种关于模糊性数学的杂志、专著及论文集，开展了各种规模的学术活动。

中国的数学家、科学家和工程师对模糊性数学的理论及应用都作出了重要贡献。

但是，模糊性数学还没有成熟，对它也还存在着不同的意见和看法，有待实践去检验。

数学游戏（**mathematical recreations**） 一种运用数学知识的大众化的智力娱乐活动。流传于民间或出现于报纸杂志和小册子等各种出版物，参加者一般只需要具有一些初等数学知识，但问题的表述常常显得很复杂，以增加参与者的兴趣。在世界各地都流传一些著名的数学游戏，其中许多问题已成为数学名题。例如韩信点兵(孙子问题)，百鸡问题，九连环、迷宫、莲花问题，斐波那契兔子问题，哥尼斯堡七桥问题等等。还有围棋、象棋、扑克、桥牌等娱乐项目也可以引出数学游戏问题。对数学游戏从理论上加以研究不仅为许多古老和新兴的数学学科提供了素材，而且促进了这些学科的诞生和发展。

算术游戏。包含两方面的问题，一种是算数，常见的有数字间的有趣关系及各种数字逸事等。例如对数码 123456789 不改变排列顺序，只添加运算符号和必要的括号，使其运算结果等于某个预先给定的 N；另一种是运用算术知识解决的问题。例如 3 世纪古希腊数学家丢番图逝后，相传他的墓碑上刻着猜他年龄的诗歌碑文。许多算术游戏可以用代数方法来求解，使问题大大化简。

代数游戏。一般指用代数方程或代数方程组来求解的问题、公元前 3 世纪古希腊数学家阿基米德提出"群牛问题"，导致包含 8 个未知数的代数不定方程组。5～6 世纪《张丘建算经》记载的"百鸡问题"导致 3 元不定方程组。这些问题促进了代数学的发展。

数论游戏。公元 3 世纪成书的《孙子算经》中记载了著名的"孙子问题"，实际上是一次同余式问题。因题解理论深奥而被后人详加研究，于 13 世纪由秦九韶成大衍求一术，该问题也被多种数学专著改头换面地采用。由数论中的基本定理可以构造出许多游戏问题，能激发起人们学习数学的兴趣。

几何游戏。例如由勾股定理设计出来的问题在许多国家都出现过，象莲花问题等。古希腊提出了几何作图三大问题，后人又提出直尺作图问题、圆规作图问题乃至定角圆规作图问题。再如用相同形状的图形铺满整个平面的问题等。

组合游戏。例如幻方，中国古代称为纵横图，13 世纪杨辉曾系统阐述过，后来在理论上有很大发展。再如"抽屉原理"，它可以构造出大量有趣的问题。19 世纪中提出柯克曼女生问题，对它的求解导致组合论的不断发展。

图论游戏。例如18世纪提出的柯尼斯堡七桥问题，后人也改为邮递员问题、周游世界问题等形式，它直接引起图论的创立，并对网络理论和拓扑学的建立起了促进作用。

概率游戏。在15世纪末提出，17世纪中叶引起广泛讨论的“合理分配赌注问题”影响深远，成为概率论创始的基本问题之一。18世纪出现的“比丰投针问题”开创几何概率的先河，是用随机数处理确定性数学问题的最早例证。

分割游戏。中国古代流形的七巧板被认为是典范，18世纪末已有了专著论述，20世纪后从严格的数学理论上进行探索，例如1942年证明了七巧板最多拼成13个不同的凸多边形等。公元3世纪刘徽证明勾股定理所用“出入相补”原理也属于分割之列。

博弈游戏。例如中国的“翻摊”(Nim)游戏，可以引出很深奥的组合数学理论。还有各种棋类游戏等等。博弈游戏还为对策论提供了素材，并对人工智能的发展有一定影响。

此外还有许多需运用逻辑推理进行解答的智力游戏等等。数学游戏不仅对创立新的数学分支有一定作用，还对数学知识的普及与传播作出独特贡献，成为数学教育的有效方法。近年来美国数学科普作家马丁·加德纳出版和发表了一系列有关论著，包括《数学游戏和娱乐》、《数学故事》等。译成中文的有《啊哈！灵机一动》等。

数学哲学和数学方法论

数学哲学(**philosophy of mathematics**) 是科学哲学的一门分支学科,是研究数学概念、数学理论和数学发展中的哲学问题的学科。或者说,是对数学的哲学分析。它研究数学的一系列认识论和方法论问题,例如数学的对象问题、数学理论的真理性问题,数学思维的特点问题,数学理论的价值评价问题等等,在一些方面,数学哲学与数学基础和数学方法论有所交叉,但探讨的是有关问题的哲学方面而不是数学方面,因而采用的方法是哲学方法而不是数学方法。

人们的数学研究从哪里开始,数学哲学问题也就在那里产生。当然,它最初表现为不完整、不自觉的形式,但是人们有了数的概念,就一定要探讨"数是什么"的问题,从而开始了数学哲学问题的初步探讨。

当数学有了系统的发展之后,就产生了早期的数学哲学思想。例如古希腊的毕达哥拉斯认为数是万物的本原,柏拉图认为数是一种独特的客观存在,亚里士多德认为数是物的特性;中国古代的商高认为数是从测量等活动中产生的,秦九韶认为"数与'道'非二本也"。古希腊一直到19世纪的西方人都认为数学有必然的真理性;中国古人则认为数"大则可以通神明,顺性命;小则可以经世务,类万物"。这些数学哲学思想,都是当时的哲学思想的组成部分,并对后世的数学哲学产生深刻的影响。

17世纪笛卡儿把变量引入数学,创立了解析几何学,他强调了数学方法对于认识自然的重要意义;牛顿、莱布尼茨创建了微积分。数学有了前所未有的大发展。一方面,数学的基础出现了"危机",另一方面,数学在其他科学、技术、社会中得到成功的应用,这促使人们对它的哲学思考的发展。同时,这一时期哲学有了重要的发展,促使人们从更多的角度去考察数学,这无疑也促进了数学哲学的发展。数学哲学的发展无疑对哲学也有巨大的促进作用,近代的哲学家几乎没有不考察数学的。无论是唯理论哲学家(笛卡儿和莱布尼茨本身就是数学家,斯宾诺莎甚至以数学的公理法写过《伦理学》),还是经验论的哲学家(霍布斯认为思维就是计算,几何学方法是取得理性知识的唯一方法;洛克则认为只有数学知识才具有确实性与必然性,尽管这与他的经验主义观点相悖)。集西方古典哲学之大成的康德专门探讨了"纯数学如何可能"的问题。黑格尔则专门论述了数和量的问题。这些工作都推动了数学哲学的发展,并对现代数学哲学产生巨大的影响。马克思主义哲学的建立为解决数学的哲学问题指出了正确的方向,并提供了强大的思想武器和正确的思维方法。

集合论的建立使数学达到新的严格性层次，集合论悖论的发现所引起的第三次数学“危机”促进了数学基础学科的建立和发展（见数学基础），同时也使前述数学哲学问题对于数学发展也有了解决的迫切的要求。因此，数学哲学作为一个学科也就在这时得以确立起来，其确立的标志也是数学基础三大学派的形成，从数学哲学的角度看，它们是数学哲学的三大派（见逻辑主义、直觉主义、形式主义各条）。此外，西方数学哲学中还有柏拉图主义、经验主义等比较著名的派别，它们对数学哲学问题也做过相当深入的分析，并推动了数学哲学的发展，但是由于它们基本哲学观点上的缺陷，对数学的基本哲学问题未能给出令人满意的解答（见数学的对象、数学理论的真理性）。我们的数学哲学的研究领域之一，就是以马克思主义哲学为指针，对西方数学哲学进行认真的理论分析，努力吸收其中的积极成果，扬弃其错误的东西，丰富和发展辩证唯物主义的数学哲学。

数学的对象（**object of mathematics**） 数学的对象问题是数学哲学的首要问题。从哲学上来看，一门科学的对象一般就是科学作为人的认识来说所指向的认识客体。马克思主义认为，“认识是人对自然界的反映。但是，这并不是简单的、直接的、完全的反映，而是一系列的抽象过程，即概念、规律等等的构成，形成过程，这些概念和规律等等（思维、科学＝“逻辑观念”）有条件地近似地把握着永恒运动着的和发展着的自然界的普遍规律性。在这里的确客观上是三项：（1）自然界；（2）人的认识＝人脑（就是那同一个自然界的最高产物）；（3）自然界在人的认识中的反映形式，这种形式就是概念、规律、范畴等等。人不能完全把握、反映、描绘全部自然界，它的‘直接的整体’，人在创立抽象、概念、规律、范畴等等时，只能永远地接近这一点”。就是说，人的认识对象（亦即所有科学的对象的总和）就是整个现实世界：首先是自然界，还包括在自然界基础上发展出来的人类社会和作为客观存在的人自身。一门科学则只能以现实世界的一定领域、一定部分作为自己的对象。

恩格斯指出，数学的对象是现实世界的空间形式和量的关系。这已解决了数学的对象这一数学的哲学问题，那么“数是什么？”数（以及量、函数、数学结构等所有的数学概念）都是人们用以表述自己对数学的对象——现实世界的空间形式和量的关系这一领域——的认识的思维形式，它们是人脑对数学对象的反映形式，并不是认识的对象。

毕达哥拉斯认为，“数是宇宙万有之物质”，即数是世界的本原、始基，认识世界归结为认识数。因而，对他来说，数是数学（以至整个认识）的对象。这里有个不大不小的差错：把认识的产物——用以表述人对对象的认识的思维（反映）形式——数（的概念）当做了认识的对象自身。这一点，对后世影响极大，历史上无穷无尽的“数是什么？”的探讨都与把反映形式看作反映的对象有关。

柏拉图发展了毕氏的观点，并

给以更准确的表述:数(和其他数学概念)是某种独特的、绝对的客观存在(称为理念),即是独立于人和事物的实在,这些客观存在或实在就是人们数学认识(他说是一种回忆)的对象。

亚里士多德反对柏拉图的观点,他认为现实的物才是客观存在,数、点、线等不是客观存在物,它们只是客观事物的属性,在人们认识它们之前,它们作为实在的物的属性就已经存在了,数学家不过是用某种方法把它们从物中分离出来。把数学概念当作客观事物的属性,本质上也没有弄清认识对象和认识形式(认识结果)的分野,其结果仍然把数等反映形式看作数学的对象。

古希腊人总的来说是把数(等数学概念)当作客观实在自身或它的属性从而当作数学(及整个认识)的对象。这与当时的数学结论基本上符合于人们的经验,数学要求严重依赖于人的感性直观和对它的信念(见数学的逻辑严格性)有关。实际上,这种数学对象和数学反映形式的混淆正好说明了当时的数学概念多是直接由现实世界通过人的实践抽象而来的,虽然人们往往自以为是相反,是由数学推出世界的,但真正遇到相反的情况,例如从数学的研究中得出无理数,却因其不合于人们对现实世界的感性直观而受到拒斥。

由于在古希腊之后的相当长的时间里,西方数学发展缓慢,没有出现很多超越古希腊人的东西,因而也就不能突破古希腊人关于数学的对象的思想。而且宗教势力先后把柏拉图和亚里士多德的学说(被歪曲了的)奉为教条。因此直到16、17世纪,人们关于数学对象的观点仍然是古希腊人的观点,尽管有些细节的争议。

由于文艺复兴的巨大推动,由于东西方文化的交融汇合,16世纪开始,数学有了较快的发展,其结果是迅速出现了一些并不符合人的感性直观的新概念(负数、无理数、虚数等),这使得依赖于人们的感性直观的古希腊人的观点遇到了挑战:一方面,按他们的观点,数学对象就是数学的概念,而数学概念是客观存在的;另一方面,对他们来说,客观存在就是符合人的直观。那么这些不符合人的直观的数学概念是否是客观存在?这就产生了所谓的“数学本体论问题”。

16、17世纪的数学家有时借助于宗教观念来解决这个问题:世界是上帝按数学设计的,因此数学研究是揭示上帝的数学设计,因此可以不考虑本体问题。这已经偏离了古希腊人的数是真实的存在的原意。按这种观念,当上帝逐渐被逐出世界,进而为自然代替时,数学研究就成了揭示自然的数学“模式”,可以认为,这开始向数学以现实世界为对象转换了,虽然是以“上帝”为中介实现的。

康德把数学对象问题向前推进了一大步。他在回答“纯数学何以可能”的问题时指出,人是通过先天感性直观来掌握数学知识的,这种先天直观有两种形式——时间和空间。用先天的时间直观整理关于事

物的多与少的经验，便创造了数的概念；用先天的空间直观整理关于事物的形状的经验，便创造出了几何公理。他认为，几何是关于空间的知识，算术是关于时间的知识，而时空都是客观存在的。因而数学的对象就是事物的多少和事物的形状，或者是有关的客观存在着的时间和空间。就是说，数学的对象是事物的某些方面，是客观存在的某些领域。康德终于区分了数学认识的对象和表述人对对象的认识的反映形式，这是一个重大的进步，但由于他认为，人们对数学对象的认识是建立在先天直观的基础之上的，并且认为这种认识是有客观必然性的。先天的知识为什么会有客观必然性呢？他无法回答。

恩格斯从辩证唯物主义出发，科学地完整地解决了数学的对象这一数学哲学问题。

20 世纪西方出现许多新的数学哲学观点，在数学对象问题上，它们多数又把数学概念当做了数学的对象，即重又把认识的对象和认识形式混淆起来，例如柏拉图主义、实在主义、客观主义、形式主义以至结构主义都是这样，它们可以说由康德的观点向后退。结果在这个问题上都陷入了困境（见后面有关条目）。另一方面，西方也出现了认为数学的对象是现实世界的与人的实践活动有关的部分的观点。例如美国的麦克莱恩（1981 年）认为：“数学研究现实世界和人类经验各方面的各种形式模型的构造。一方面，这意味着数学不是关于某些作为基础的柏拉图式现实的直接理论，而是关于现实世界的形式方面的间接理论。……我们认为数学不是对虚无飘渺的柏拉图式世界的研究，而是对起源于人类实践活动的实在的形式系统的研究”。接近了辩证唯物主义观点。

数学的高度抽象性（high abstaction of mathematics） 数学的基本特点之一。任何科学都具有抽象性，否则不成其为科学了，数学与其他科学相比较，特殊在“高度”抽象，即比其他科学更抽象。通常，从数学概念、理论、方法三方面来考察这一特点。

1. 数学概念没有直接的现实原型。这是直接由数学的对象决定的，数学概念反映着数学的对象，数学对象是现实世界的空间形式和量的关系，并不是某种具体的物或场，所以数学概念不可能有直接的现实原型。其他科学的概念，都反映现实世界的物质运动形式，因而都有其直接的现实原型，例如物理学中的“物质”概念，作为一个概念来说，当然是思维的产物，是抽象的，但它是直接从现实世界的存在着的实物和场抽象出来的，因此，这个概念是有直接的现实原型——作为最基本的存在形态的实物和场——的。再如经济学中的“生产”概念，当然也是抽象的，指“人们利用生产工具改变劳动对象以适合自己需要的过程”，即“人们创造物质财富的过程”，而这种过程是社会中具体地存在着的现象，这一现象即“生产”概念的现实的原型。这就是说，这些科学概念有这样的性质：当我们说表示这些概念的词时，不仅能确定它们所表

述的概念的内容，而且也指称着这些概念所反映的具有现实世界的存在性的对象。数学概念则不是这样，以数学中最简单的“原始概念”——自然数概念——来说，它所表示的是集合的类的特征，反映着一类量的关系，因而并不指称现实世界存在的某种具体的东西。

2. 数学理论可以有多种解释。自然科学和社会科学等理论的解释都是唯一的。例如力学的解释就是现实的物体运动；经济学的解释就是现实的经济状况和经济发展。数学理论的解释则不唯一，而且每个解释都是一个自然科学、社会科学或其他科学的理论。所以数学理论比其他科学理论更少规定性，因而也更抽象。

3. 数学方法是抽象的。数学的表述系统中所允许使用的方法只有演绎推理的方法，虽然在发现数学新知识方面离不开归纳推理、类比推理及其他方法，但作为数学表述体系中采用的却只有演绎推理——从某些基本的命题和概念出发，按一定的逻辑规则得出所有其他命题来。因此，数学中实验、观察等具体方法都无效，只有采用抽象的演绎推理方法才行。其他科学一般都要采用实验、观察等具体方法。此外，数学方法本身适用于几乎所有科学领域（见数学的应用广泛性），也说明数学方法有较少的规定性，远较其他科学方法为抽象。

数学的抽象程度也是一个不断提高的历史过程，其发展表现为一个多层次的过程：在已经达到的抽象产物基础上进行新的抽象。例如人们最初由现实世界的量的关系（和空间形式）抽象出自然数的概念，然后在自然数的基础上抽象出“任意数”的概念，在近代，进一步抽象出变数和函数，再由各种函数抽象出“泛函”概念。每次抽象都在前一抽象的基础上进行，数学的历史就是数学的抽象由一个层次向更高层次抽象发展的历史，正如人的认识发展一样，这一过程也是永无止境的。

数学的逻辑严格性（**logical strictness of mathematics**） 数学的逻辑严格性是指数学的推理方式：从一些初始概念（不定义概念）和一些初始命题（不证明的命题，公理）出发，按一定的逻辑规则，定义出所有需要的概念，推导出所有需要的其他命题（定理）来。推导是一种严格的证明，其依据只能是初始命题（公理）或已由它们证明了的命题（定理）。除此而外，不得依赖其他任何东西。如果实现了这点，就认为是逻辑严格的。数学的逻辑严格性是数学的主要特点之一，它是一个历史地发展着的概念。

1. 古代数学的严格性

古希腊人最早趋向于逻辑严格性的数学理论体系，欧几里得的《几何原本》充分表现出这一点：它提供了一个由少数初始概念和公理（公设）出发的理论体系，其各个定理的证明尽力按前述“严格性”的要求去作，但在许多情况，例如认为三角形一内角的平分线必然与此角的对边相交，把一个三角形放到另一个三角形上，“放”的过程中三角形无变化等等，是缺乏相应的公理或已证

定理保证的。这时无疑在证明中依据了人们的直观。因此可见，欧几里得的《几何原本》中，数学的逻辑严格性是以下述三点为标准的：

(1) 逻辑要求(亚里士多德的两条逻辑要求：①公理必须是自明的；②遵守逻辑规则)。

(2) 人的感性直观。

(3) 对(1)和(2)的正确性的信念。

最后一条标准也是十分重要的，带有较强的心理色彩，实际上，“自明的”本身就是感性直观和心理的东西。因而也就有不严格的因素，为了解决由此产生的问题，信念是十分必要的了。当然，这与古希腊人认为数学有必然的真理性(见数学的真理性)有关：它们互为因果，相辅相成，在相当长的时间里在西方数学界成为一种强大的思想倾向，直到变量数学产生，甚至直到 19 世纪初叶，数学的逻辑严格性一直是这样一种带有很大心理选择性的强烈依赖于感性直观的演绎体系的逻辑严格性。牛顿引入的“无穷小量”就是一例。

中国古代数学有自己的特点，使得数学的严格性问题表现为这样几个方面：

(1) 对于给定的问题，数学的可应用性。

(2) 应用某算法的合理性。

(3) 算法的可行性与计算工具的可能性。

(4) 计算结果对实际的符合性。

对这几个方面并没有进行系统的逻辑分析，前三方面基本上依赖于对计算工具(算筹、算盘)的直观认识和对数学可应用性的信念。后一个方面则是当时人们衡量数学理论的主要标准。值得注意的是，这一标准在 17—18 世纪也在一定程度上为西方数学界所采用，在现代应用数学中也是一个极其重要的严格性标准。

2. 集合论基础上的逻辑严格性

19 世纪初建立的非欧几何动摇了人们对公理自明性和人的感性直观的信念。面对由逻辑上推导出的与人们的直观相矛盾的命题(无疑在逻辑上是正确的)，尤其对用同一种逻辑甚至能推导出在很多方面都互相对立的结论的情况，信念就破灭了。人们开始把公理系统的无矛盾性作为逻辑严格性的首要标准，并且力图证明这一点。无矛盾性的证明采用了解释方法，最后把数学的无矛盾性化归为集合论的无矛盾性，于是集合论成为整个数学的基础(见数学基础)。

集合论的重要基础作用表现在两个方面。一是集合论的概念如“集合”、“元素”等，有极大的普遍性，因而可以为许多数学理论提供解释；一是提供了一种严格的数学方法，使人们有可能对数学作一次真正数学而非思辨的综合和统一的努力，首先就是为数学的逻辑严格性提供一个新的标准——必须满足形式公理体系的要求(见公理法)，即要求数学理论都要用形式公理体系来表述，其公理系统的无矛盾性，可以用集合论解释从而获得相对性的保证。现代数学理论基本上都是用形

式公理体系表述的。

当然，在集合论基础上的逻辑严格性中也存在问题：集合论为什么能保证公理系统的无矛盾性呢？人们又一次使用了感性直观——集合论是这样的清楚明白，其中不能也不可能含有任何矛盾。

严格性的一个含义就是在数学中排除直观：每个结果都要有逻辑依据。由于集合论，人们几乎实现了这一点，由集合开始的各种理论(表述为形式公理体系的形式)都作到了这一点，但集合论自身却依赖于人们的直观！

3. 形式系统的严格性

20 世纪初集合论中发现了悖论。原来，集合论本身的无矛盾性就不是真的，这不啻是对数学在集合论基础上的严格性的当头一棒。人们深入进行了数学基础研究，引入了形式系统以进行元数学探讨(见集合论、数学基础)。形式系统的引入从数学证明中完全排出了感性直观及心理因素，把数学证明转化为纯粹的符号变换。在形式系统中，不仅概念、命题等形式化了，而且证明的逻辑自身也形式化了。形式证明中任何一个证明程序都是一义确定的，形式系统中，证明作为严格演绎的逻辑程序潜在地蕴涵于所采用的公理系统和推演规则之中。因此，数学的逻辑严格性达到了新的层次。

但是整个数学的形式化即使在理论上也是不可能的，而且一个充分丰富的形式系统的无矛盾性不可能在系统内加以证明，所以形式系统理论也并没有最终地解决严格性问题。总地看来，数学的严格性随数学的发展而不断提高，但永远达不到，也不存在绝对的严格性。

数学的应用广泛性(**universal application of math**) 数学的主要特点之一。“广泛”对现代数学来说就是人类活动、人类科学的几乎所有的领域都要应用数学，与其他科学相比，这是十分独特的。

数学产生于人的实践之中，即数学是在人的应用需要中发展起来的。萌芽时期的数学都具有直接的应用性，例如古埃及数学、巴比伦数学、中国商周时期数学等都是这样。古希腊由泰勒斯开始，转入了理论研究，但泰勒斯还应用过数学，例如预言日食，测量金字塔的高度等，后来数学日益发展，经毕达哥拉斯、柏拉图、亚里士多德到欧几里得，古希腊数学发展为纯理论数学，一般地距实际应用较远。柏拉图认为数学有另一种“应用”——发展人的思维的教育应用。

中国古代数学则是一种应用数学，《九章算术》(公元 1 世纪)就按数学的应用领域和常用数学模型为数学分类。后来数学随社会生活的发展而不断发展，这使得中国古代数学中计算技术十分高明，并使数学与实践有密切的关系。中国古代数学在许多领域里、在相当长的时间里在世界上处于领先地位。

近代数学的大发展是由数学在科学技术中的应用开始的，应用促进了微积分的产生(17 世纪)，此后分析数学、统计数学的发展都与应用有直接的关系。随着数学的发展，数学的应用能力也不断提高——不断提供更有力的工具，因而可能在

更广泛的领域中得到应用。

电子计算机的产生和广泛采用为数学应用提供了前所未有的有效工具，促使了数学应用的大发展。它使得数学得以应用到人类实践、人类科学的几乎每一个领域。

伽里略第一个把数学方法与实验方法相结合，揭示了数学方法的科学方法论意义。笛卡儿建立“万能方法论”，把数学方法看作一种万能的方法。这不仅促进了数学的应用，而且促进了数学方法作为一种方法论原则的发展。从此，科学与数学就成为密不可分的整体了，人们一再注意到数学的方法论意义。从这个角度看，几乎所有的数学理论，都能够得到实际应用。特别是计算方法，成为科学方法的一个主要环节（见计算数学）。

数学的应用为什么有如此的广泛性？那就是因为数学对于人的实践和其他科学具有下述重要意义：

1. 数学为各领域的问题及其解决提供了科学的表述语言。

2. 数学为其他科学提供了一种抽象思维的模式，即充分发挥人的主观能动性和创造性思维能力，解决各种现实问题的途径。其一，是数学理论对于其他科学有重要的示范作用：数学是人类最早发展起来的科学之一，是人类思维发展的重要成果之一，因而对人类的其他科学思维起着巨大的示范作用。其二，为解决各门科学问题提供数学模型。

3. 为解决各领域的问题提供计算方法。

由于数学的广泛应用，数学中形成了由在各领域中应用而产生和发展起来的数学内容构成的应用数学——20世纪40年代由库朗等人的倡导而得到进一步的发展，现代可以说已成为一个独立的学科了。应用数学通常包括概率论、数理统计学、运筹学、数学物理以及控制理论、信息论、生物数学、经济数学、数理语言学等，模糊数学和计算数学通常也列入应用数学中。与应用数学相对应的是理论（纯）数学，包括数学基础、数理逻辑、集合论、代数学、数论、几何学、拓扑学、分析学等等。但这种划分并不是绝对的，例如分析学中微分方程等问题与应用有不可分割的关系，数论、数理逻辑等都有广泛的现实的应用课题，而计算数学、数理统计等又都有深刻而抽象的理论内容。现代数学的发展趋势之一是应用数学与理论数学的统一，它们本来就是数学科学的两个密切联系着的方面。

数学理论的真理性（**trustiness of math theory**） 真理是认识主体对存在于意识之外、并且不以意识为转移的客观实在的规律性的正确反映。理论的真理性问题就是理论是否正确反映了客观实在的规律性的问题。

真理问题是一个哲学问题，因而对数学理论真理性的理解与哲学观点有关，实际上就是哲学观点的一个组成部分。因为马克思主义的真理观是唯一科学的真理观，因而只有在马克思主义哲学指导下，才能正确地解决数学理论的真理性问题，才能开辟出排除谬误达到真理并在真理指导下正确地改造世界的

道路。

数学真理实际上是人对于数学的对象的规律的正确反映，因而人们对数学理论真理性的认识又与对数学对象的认识密切相关。

古希腊人使用真理这一术语具有确实、符合事实的意思。柏拉图认为真理是某种超验的、永恒的理念，数学概念也就是某种理念；亚里士多德认为“真理是思想和物的符合”，但他又认为最高真理是思维和理念形式的一致，数学概念在他看来是物的性质，又是思维的产物，因而既是二者的符合，又是思维和理念形式的一致。所以在他们二人看来，数学必然是符合事实的（它自身就是事实），所以数学有必然的真理性，从他们的“数学对象”观点看，也得出这一结论——数学的对象就是数学概念（数、形等），关于这些概念的认识当然符合它们自身。正象古希腊人的数学对象观念在漫长的历史年代中影响了西方一样，数学具有必然真理性的观念在西方也产生了巨大而持续的影响。

中国古代的荀况提出“知有所合谓之智”，肯定“智”即真理是认识与实际的符合。他进而提出“有符验”、“可施行”作为真理的标准。韩非、王充等也有这种观点，中国古代数学界是受此哲学观点影响的，数学中能用于实际并获得成功的是正确的理论。

文艺复兴，在某种意义上也可以说是古希腊文化的复兴。数学具有必然真理性的观点也得到复兴，当然也是借助于上帝实现的：宇宙是上帝按数学设计的，数学科学只不过把宇宙的数学设计揭示出来，所以数学本身的真理性是无可怀疑的。16—17 世纪的数学（哲学）家大多持这种观点，如哥白尼、开普勒、伽里略、帕斯卡、笛卡儿、牛顿和莱布尼茨都是这样。应该注意的是这一期间“上帝”和数学关系的变化：由用数学证明上帝的英明到用上帝来证明数学的正确，由上帝按数学设计了世界到上帝只保证世界按数学揭示的规律运行，再到世界的运动与上帝无关。“上帝”日益为“自然”所代替了。

数学揭示上帝的数学设计，从而数学有必然的真理性。但这也产生了一个新的问题：用数学来揭示某种东西，哪怕只是揭示“数学设计”，总有一个是否符合的问题，因而“必然真理性”就会动摇。笛卡儿发现了这个问题，因而他强调几何学原理之类都是清楚明白的“天赋观念”，是理性所固有的与上帝的数学设计是必然符合的。莱布尼茨则认为数学真理具有先天的必然性，因为它可以从原始的不需证明的理性原理得出，而这种原始理性原理就是逻辑的同一律和矛盾律。试图从思维本身来解决数学的必然真理性。这标志在数学真理性问题上，人们开始把上帝驱逐出境了。

康德是突破神学自然观，阐述世界的自然发生的第一个人；同时，他也是真正区分了数学的对象和用以表述人对对象的认识的认识形式的第一个人。因而对他来说，真理性问题就是认识形式是否与认识对象相符合的问题。他认为，真理是思维与他的先验形式的一致，严格的数

学命题都是感性直观基础上的先天综合判断，它们与先验的直观的空间和时间形式是一致的，因而具有真理性。康德的成就是指出数学的真理性是与其对象的符合，因而是需要判定的，尽管他在先验直观基础上的判定又回复到数学具有必然真理性的老认识。康德的成就是一个巨大的进步——第一次从数学外部来考察数学理论的真理性，因而实质上动摇了数学具有必然真理性的观念。为正确解决数学理论的真理性问题指出了新路。

非欧几何的发现使数学具有必然真理性的观点陷入困境，这也提示人们，在数学内无法解决其自身的真理性问题。人们开始把问题缩小：考察数学的无矛盾性问题。这也是无论持怎样的数学真理观的人都一致的看法：只有无矛盾的理论才能是真理。由此展开了数学基础研究。20世纪初发现了集合论悖论，原来数学连无矛盾性的要求也不能实现。为解决有关的问题，形成了许多数学基础以至数学哲学的派别，尽管它们对数学以及数学基础学科的发展做出了重要的贡献，但由于它们大多在数学对象问题上由康德后退——重新把数学概念等数学认识形式即认识产物当作数学的对象，因此重新在数学理论范围内寻找数学真理性的答案，在真理问题上必然地重新陷入困境(哥德尔不完全性定理指出了数学形式系统的一个深刻的本质属性：一个充分丰富的形式系统的无矛盾性不能在系统内得到证明，连无矛盾性尚且如此，更何况数学理论的真理性了)。

马克思主义哲学指出了解决数学理论真理性问题的正确方向，其要点如下：

数学理论的真理性指的是数学理论是否正确反映了客观实在(确切些说，数学的对象——现实世界的空间形式和量的关系)的规律性。

由于数学具有高度抽象性、逻辑的严格性等特点，所以数学理论的真理性还表现出如下特点：数学理论的真理性往往可归结为这个理论所采用的公理系统和逻辑规则的真理性；逻辑上不成立的理论或命题不可能具有真理性；由数学逻辑地发展起来的理论，在没有验证它是否是对客观存在的规律性的正确反映之前，并不是前述意义下的真理，但它们在一定的前提(一般是部分地得到过检验)下，在逻辑(一般是经过或部分地经过检验的)上是正确的，因此具有一定的真理性，可以称为逻辑真理，当验证了它是对客观世界的正确反映时，就成为现实的真理。

怎样检验数学理论的真理性？通过人的实践——实践是检验真理的唯一标准。由于数学的特点，检验标准也表现出这样一些特点：数学证明是数学理论成为真理的必要条件；数学理论的实践检验对逻辑推理有较大的依赖性；实践标准在数学理论的真理检验中表现出特别鲜明的确定性和不确定性。数学理论的真理性检验是一个极其复杂的历史过程，它既通过人们在实践活动中的直接应用得到检验，又通过人们在其他科学中的应用与有关科学理论一同得到实践的检验。

逻辑主义(logicism) 逻辑主义是20世纪初产生的数学哲学和数学基础的重要学派之一。逻辑主义主张把数学"还原"为逻辑,认为数学就是逻辑的一部分,全部数学都能从逻辑推导出来。

逻辑主义的思想可追溯到17世纪莱布尼茨建立科学的普遍语言和一般的推理演算的想法,其创始人可以说是德国逻辑学家弗雷格,而最有代表性并努力去实现逻辑主义主张的则是英国数学家、哲学家罗素。罗素和怀特海的巨著《数学原理》(1910—1913),就致力于从逻辑推导出数学的工作。但正是在这部书中,人们看到,根本无法做到这点:要从逻辑推出全部数学,至少要增加两个非逻辑公理,无穷公理和选择公理,而这是不合乎逻辑主义的要求的。虽然没有达到把数学还原为逻辑的目的。逻辑主义者对数学逻辑的发展做出巨大的贡献,《数学原理》具有重要的方法论意义,它提出形式化、公理化等一系列重要的方法论思想,对数理逻辑的发展有重要的促进作用;罗素提出的类型论更构成一种公理集合论,是现代数理逻辑的研究领域之一。

从数学哲学的角度看,逻辑主义在数学对象和数学真理性两方面都存在谬误。在数学的对象方面,他们把数学概念等数学认识形式看作数学的对象,并且认为它们是客观存在的,只有这样,才能只用逻辑就建立起整个数学来。他们认为数学就是逻辑,实际是认为数学就是纯形式的逻辑语言,亦即是一种人为的分析命题——一种同义反复。这显然是从康德的观点后退。康德认为数学是对空间和时间的认识,因而要依赖于人的感性直观。逻辑主义连直观也不要了,认为逻辑命题是先验的真理,因而数学也是具有先验的"依形式而真"的必然真理性的。这就完全回到柏拉图那里去了。

直觉主义(intuitionism) 20世纪初产生的数学哲学和数学基础的重要学派之一。直觉主义者强调数学的对象就是数学概念,而这些概念只有由直觉得到,或者由直觉构造出来时才是存在的(反对柏拉图主义关于数学概念是客观存在的观点)。他们认为,如果"存在"指的不是"构造出来",则在数学研究中是没有意义的;数学家的活动就是构造一定的对象,各种对象都是由原始对象构造出来的,因此,数学理论反映的不是外部世界的真理性,而是仅仅与人的智力结构联系着的真理性(反对柏拉图主义的数学具有必然真理性的观点)。对数学,直觉主义有两个著名的引起巨大争议的论点:①不承认实无穷(因无法构造出来);②反对在无穷集合中无条件地使用排中律,即不承认反证法在证明关于无穷集合的命题时的有效性,只承认构造出来的对象,不承认数学中一般的存在性证明(用反证法)的有效性。

康德是直觉主义的创始人,他关于先天直观的理论是直觉主义的直接前驱。德国19世纪著名数学家克罗内克,法国数学家庞加莱都是早期的直觉主义者,他们认为数学在直观上是清楚的可以构造的。荷兰数学家布劳威尔是20世纪直觉

主义的主要代表人物之一，1909年，他发表著名著作《数学基础》，系统阐述了直觉主义观点。前述两个论点首先是由布劳威尔系统化的。波莱尔、海廷也是著名的直觉主义数学家。这些直觉主义数学家在数学上做出巨大的成就，尤其在数学基础方面。一个十分有趣的现象是，他们的许多数学成就是超越他们上述两个论点而取得的，如布劳威尔的主要数学成就之一“不动点定理”恰恰是用他所不承认的反证法作出的存在性证明。直觉主义所倡导的构造性数学的发展具有重要的意义，现代计算机科学算法研究的一个要点就是可构造性。

从数学哲学的角度看，直觉主义的主要哲学观点是谬误的：他们认为数学的对象是数学概念，从康德的观点上后退了；在数学理论的真理性问题上也是这样，在康德看来，数学命题是先天综合判断，是符合客观（时间、空间）的，因而是真理，尽管是由先天直观得出来的。直觉主义者却把数学直观看成纯粹的心智构造性活动，和外部世界无关。他们只就理论思维本身来考察理论的真理性，真理概念就出了问题——否认了真理的客观性。直觉主义是从反对柏拉图主义关于数学对象和数学真理的观念出发的，但由于离开了客观世界，只在思维中，在心智构造中探讨的结果，又必然返回到柏拉图那里去，他的所谓“客观存在”的数学对象恰恰也是思维的产物。

形式主义（**formalism**） 形式主义是20世纪初产生的数学基础和数学哲学学派之一。它的观点与希尔伯特的数学形式化方案（见希尔伯特方案）有关，但希尔伯特本人并不是形式主义者。

形式主义者也把数学概念等数学思维形式看作是数学的对象，这也是从康德达到的程度向后退，但他们认为，这些概念不是客观存在的，却比柏拉图的观点高出甚远；他们还认为，在数学家处理问题时把这些对象“当作真正存在”，这只是为了说话的方便。而在实际上，数学只是研究符号的组合的科学，它的对象只是一种虚构，显然不具有客观性。正因为这样，数学理论的真理性亦无客观性可言，这种真理性只是数学理论的无矛盾性或可推导性的同义语。

形式主义者对数理逻辑和数学基础的发展也做了许多杰出的工作。60—70年代，形式主义还有较大的发展，其代表人物是鲁宾孙（模型论的创立者之一，非标准分析的创始人）和科恩（连续统假设独立性的证明人）等，在数学上做了重要的工作。

形式主义在数学理论真理性问题上有明显的错误：数学理论的真理性就是它对现实世界（对象）反映的正确性，数学理论的无矛盾性当然是重要的，但它只是理论具有真理性的必要条件。逻辑上无矛盾仍然停留在理论思维的范围内，不能解决理论本身的真理性问题。真理性是对现实世界的正确反映，只有通过实践来检验（见数学理论的真理性）。

柏拉图主义（**Platonism**） 柏

拉图主义是数学历史上影响最大的数学哲学观点，它起源于古希腊的柏拉图，此后在西方数学界一直有着或明或暗的柏拉图主义观念，19世纪，它在数学界几乎占了统治地位。20世纪初，数学基础三大派的争议刚趋平息，柏拉图主义观点又成为讨论的热点之一。

柏拉图主义的基本观点是：数学的对象就是数、量、函数等数学概念，而数学概念作为抽象一般或“共相”是客观存在着的。柏拉图认为它们存在于一个特殊的理念世界里，后世的柏拉图主义者并不接受“理念论”，但也认为数学概念是一种特殊的独立于现实世界之外的客观存在，它们是不依赖于时间、空间和人的思维的永恒的存在。数学家得到新的概念不是创造，而是对这种客观存在的描述；数学新成果不是发明，而是发现。与之相应的，柏拉图主义认为数学理论的真理性就是客观的由那种独立于现实世界之外的存在决定的，而这种真理性是要靠“心智”经验来理解，靠某种“数学直觉”来认识的，人们只有通过直觉才能达到独立于现实世界之外的“数学世界”。

由于认为数学概念是一种真实的存在，所以现代柏拉图主义也称为“实在主义”。柏拉图主义在西方近现代数学界有相当大的影响，一些数学巨匠如康托尔、罗素、哥德尔、布尔巴基学派基本上都持这种观点。一般认为，所以如此不是偶然的，这是数学反映客观世界，数学具有客观真理性这一素朴信念在哲学上的反映。而正因为如此，柏拉图主义对数学的历史发展就具有一定的积极作用：它促使数学家们在自己的研究中采取客观的科学的立场，而且，当某些高度抽象的数学理论因找不到现实原型而为人们所怀疑时，它也有可能给人们以一定的信念。尽管这种信念是盲目的，从而就有可能导致错误。

柏拉图主义的错误是显然的：把反映形式当做了认识对象；把抽象当做具体的客观存在；认为一种思维形式本身是客观的当然具有客观的真理性。离开人的实践来考察真理性必将导致谬误。柏拉图主义，在哲学上是一种客观唯心主义。

数学理论的价值评价(**Evaluation of value of mathematical theories**) 数学理论的价值指的是它与人的需要之间的关系。这个关系是客观的：人们需要什么样的数学理论是由人们的生产力水平、即社会发展程度决定的，而社会发展、生产力发展的需要在实践中就是主体创造价值的需要，人们对这种需要的认识就是价值评价。价值评价则有主观性，是依主体的需要为转移的。一般地，人们是努力使数学向当时允许的高价值评价方向前进的，人们进行活动(包括数学活动)的目的就是创造出更高的价值来，即最大程度地满足自己的需要，所以对数学理论的价值评价是数学理论发展的直接动力。从历史上看，对数学理论的价值评价的标准在不同的时期是不一样的，但每一个时期的价值评价标准都是这个时期的数学界大多数人的意见。

中国古代数学家及应用数学的

其他人非常重视数学理论的应用价值，当时是把数学看成一种“技艺”，因而对数学理论的价值评价标准是理论的可应用性，可应用的数学理论是价值较高的理论，数学理论应用的领域越广其价值就越高。这种价值评价标准无疑对中国古代数学体系、内容的特点的形成有重大的作用。

古希腊人十分重视数学理论的知识价值，他们所推崇的“学术不是一门制造学术。古今人们开始哲理探索，都应起于对自然万物的惊异；……一个有所迷惑或惊异的人，每自愧愚蠢；他们探索哲理只是为想摆脱愚蠢，显然，他们为求知而从事学术，并无任何实用目的”(亚里士多德语)。因而古希腊人认为知识性较强、能推导出更多的智慧结果的数学理论的价值为高，由少数符合直观的公理演绎出整个数学体系来，这正是一种具有高度知识价值的智慧的产物，因而使研究抽象命题与社会生活没有直接关系的公理化数学成为古希腊的典型数学。这使得逻辑严格性成为数学理论价值评价的标准。

17 世纪数学发生了极其深刻的变化，从价值评价的角度看，是与数学理论的价值评价标准的变化有关。由于社会生产和人的思想的变革，数学的价值评价的标准也产生了新的发展，能够解决其他科学问题的数学具有较高的价值。因此，一些理论的严格性尚未得到证明的数学理论，因为具有较高的解决问题的能力，并且解决了当时的一系列科学问题因而成为具有较高价值的理论，促使了人们对它们的钻研。17—18 世纪分析数学就是在这种价值评价标准中得以发展起来的。

与此同时，古希腊的价值评价标准也得到了复兴——逻辑严格的理论是价值较高的理论。这与应用标准产生了矛盾冲突，所谓第二次数学“危机”与这两种价值评价标准的冲突有直接的关系——一方面，微积分是应用的产物，并且在应用中表现出极高的应用价值，因此人们推崇它，发展它；而另一方面，它在理论上又确是不够严格的，因而受到另一些持不同价值评价标准的人的指责。这种冲突的另一个表现是 19 世纪关于非欧几何的争论——非欧几何是纯理论的产物，在逻辑上是严格的，因而有人研究它。但它在产生之初并没有什么实际的应用，也不符合人们的直观，因而在以“有用”为价值评价标准的人们看来，它是没有意义的，因而被搁置了数十年。后来人们努力于把有较高应用价值的数学理论严格化，并且把纯理论产生的非欧几何理论化归为欧氏几何，使之也与直观无矛盾，并且找到它在科学中的应用。这些工作是在 19 世纪特别是它的后半叶实现的。这使得应用价值评价标准和逻辑严格性标准不再是矛盾的而是互相结合的。从 19 世纪以来数学在纯数学和应用数学两方面都得到空前的发展。

现代的对数学理论进行价值评价的标准应该是：

1. 逻辑严格性

(1) 无矛盾性；

(2) 可证明(可计算)性；

(3) 可构造性。

2. 高度概括性

(1) 有助于培养和发展抽象思维能力;

(2) “包含”原来理论的内容。

3. 广泛应用性

(1) 在社会实践用的用途(经济效益和社会效益);

(2) 提供解决问题的思想方法。

4. 理论审美性

价值较高的理论不必4个方面都较原来的理论高,只要有一个方面高于原来的理论就是价值较高的理论。而且一个方面也不可能十分全面,例如就逻辑严格性来说,有时一个理论不可能同时具备三点,要求只有其中之一即可,所谓无矛盾性指的是相对无矛盾性——相对于某个已有的数学理论,例如集合论或实数理论等的无矛盾性。

通常的价值评价只就上述内容分别进行考察,就其主导方面进行评价。当然上述各方面横向之间也存在某种关系,如概括性越高,应用性可能就越广,但一般地,它们并不是可比的。至于两个“待评”理论,只能就其各项内容分别评价,结合理论之间的相互联系,探讨它们各自的价值。促进数学理论向应用价值及精神价值高的方向发展,对于我们的物质文明和精神文明建设,对我们的社会主义现代化建设事业无疑是非常重要的。

方法(method) 人们为认识世界和改造世界所进行的活动的方式、手段的统称。

汉语“方法”一词源于《墨子》:“则方法明也”,原意是指量度矩形(方)的工具、方式或标准,“法”即方式、工具或标准的意思,后来用“方法”来表述“法”的意义,即方法;西文中的“method”一词源于希腊文,是从“Μεzα”(沿着)和“oδos”(道路)而来的,即沿着道路运动,有达到某一目标的途径的意思。两者的意义有细微的差别,但基本意义还是共同的:人的活动的方式、手段。后来人们对方法的认识虽有各种不同的表述,但基本意义仍如此。

亚里士多德把方法看作工具或手段,还认为方法是科学的实际程序。F·培根认为方法是一种规则(比作圆规和直尺),他也明确指出,方法是一种工具、一种程序。霍布斯则认为,方法就是根据结果的已知原因来发现结果,或者根据原因的已知结果来发现原因时所采取的最便捷的道路。康德认为,方法就是那些能够完全认识一个客体的方式。黑格尔则认为“在探索的认识中,方法也就是工具,是主观方面的某种手段,主观方面通过这个手段和客体发生关系”。

辩证唯物主义从人类活动的结构来考察方法。人的活动有三种结构要素:活动的目的、活动的前提(要达到目的所具备的条件)和活动的方法。目的是人在思维中对活动的结果,即活动要创造的未来的对象的主观观念形式。目的是人的需要的反映。客观世界不会自动地满足人,目的是通过人的对象性活动才能实现的。目的虽然是以主观观

念形式建立起来的活动对象，但它不是在人的头脑中主观自生的，而是客观世界所产生的，是以客观世界为前提的。同时，它还要受一定社会历史条件的制约。人们只能根据由一定社会历史条件所决定的需要和本质力量提出目的，并通过改造客观事物来实现自己的目的。

人们用以实现目的的手段、方式就是活动的方法——它是在有目的的对象性活动中介于主体和客体之间的一切中介的总和。尤其指实现目的的工具和运用工具的操作方式、活动方式。

借助于一定的方法，在一定条件（客观世界的条件和社会历史条件）下实现一定的目的，是人类自觉的对象性活动的一个根本特点。对人来说，他在活动中所直接掌握的东西不是活动的客体，而是作为中介的方法。他通过方法来发挥自己的力量，从既定的条件出发，把自己的活动传导到客体上去，依照自己的目的作用于客体，改变客体的形式并从中实现自己的目的。

创造方法和使用方法是人的本质特点。但方法的创造和使用不是随心所欲的，它依赖于活动的条件。在人类的活动中，方法在很大程度上是由目的和前提决定的，但它们不能唯一地规定方法，因为从前提到目的可以有多种不同的途径。人们在活动中要遇到不同的方法之间进行选择的问题。这一点具有重要的意义——方法具有一定的随意性和极大的创造性。因此，人类活动的最关键的要素就是方法。方法论具有重要意义的原因即在于此。从这个角度看，人类的所有认识都可以转变为方法——人们已有的认识可以作为进一步认识、改造世界，达到目的的手段。方法和规律可以说是并行的东西，遵循规律就成为一种方法。

科学方法（scientific method）

人们从事科学活动所采用的方法、手段。科学活动指的是生产以范畴、定理、定律形式反映现实世界各种现象的本质和运动规律的知识体系的一种活动。科学方法是方法的一个子类，宗教方法和艺术方法是另两个子类。

古希腊的泰勒斯是把科学和宗教加以区分，并提出科学方法的第一个人，他提出演绎推理的方法。亚里士多德提出归纳—演绎法：由归纳得出科学的一般原理，然后再由一般原理推论出需要解释的现象，这就要用演绎法，要用他努力研究并作出重大贡献的逻辑工具——三段论。为了得出演绎的起点，他规定，每门科学的最普遍的规律——第一原理都是自明的，实际上认为它们是由归纳得出的。欧洲中世纪的经院哲学家则强调演绎法是唯一的科学方法，关于自然的一切可靠结论都必须从宗教教义中演绎出来。中世纪后期，一些异端哲学家发展了归纳—演绎法。如格罗塞特提出否证法；R·培根提出实验法和作为一般科学方法的数学方法。同时代的司各脱提出求同法而奥卡姆提出差异法，它们都是归纳法。中国古代把计算方法作为最重要的科学方法，各门科学都离不开计算，并且强调类比方法。

作为17世纪科学革命先驱的伽里略，在自己的科学研究中采用了实验方法和数学方法，取得一系列重要的成就。他强调归纳应充分利用抽象和理想化才能得出一般原理，他还强调应从原理中演绎出新的结论，即作出预见。F·培根建立了不同于亚里士多德和中世纪方法的新方法——归纳法。他提出渐近归纳法和排除法，通过肯定、否定和比较，逐步排除偶然的因素，得到普遍的原理，在此基础上作进一步的归纳和排除，原理的普遍程度随之升高，直到得到普遍程度最高的原理——定律。与培根相反，笛卡儿提出演绎主义的科学方法，他认为清楚明白的概念就是真理，所以由这些概念导出的命题就是先验的真理，利用演绎可推导出其他真理来。笛卡儿还用自己的方法建立了解析几何学。牛顿反对笛卡儿的方法，他提出分析—综合法和公理法，他的力学理论就是按这两种方法建立起来的，运动三定律的公式化是用分析方法得到的，它们是力学的公理，是自然哲学的数学原理。公理公式化后，就可以通过综合方法演绎出各种定理，公理是演绎的起点。最后还要把演绎的结果与现象联系起来，即确认推导出的定理与经验事实相一致。他用这两种方法解释并预见了现象。19世纪穆勒总结了归纳法，提出五法：求同法，差异法，共变法，剩余法和求同—差异法。他还认为归纳法既是科学发现的方法又是科学证明的方法。惠威尔反对穆勒的归纳法，他认为科学理论的发现，除个别例外，基本上都是依据科学家的创造性洞察力得到的，而不是遵循某些归纳类型。所洞察的理论的被证实，是要看据此理论的演绎结果是否与观测到的经验事实相一致。由此他提出假说—演绎法。耶方斯从概率归纳逻辑出发也得出假说—演绎法。这显然是19世纪自然科学有了进一步的发展，开始酝酿新的科学革命——进入现代科学的前夜，因而要求新的科学方法的产物。假说—演绎法从这时起，直到20世纪即现代科学时代一直居于“正统”的地位。其现代表述是：在科学发现中，先提出假说，然后从它演绎出一些推论，检验这些推论，如果它们是真实的，那么便可以断定这个假说是真的，即它成为科学的定律或理论。随着科学的发展，人们常用数学方法代替上述过程中的逻辑演绎，这使得数学方法日益成为一般科学方法，在许多科学的建构中起着无可代替的作用(称为科学的数学化)。尤其在20世纪中叶电子计算机产生以后，计算方法几乎成为可与实验方法、理论方法分庭抗礼的主要科学方法之一。40年代以来产生的横向科学——如系统论、信息论、控制论等——的方法也逐渐转化为一般科学方法，如功能模拟方法、黑箱方法、反馈控制等方法都成为现代科学的常用方法。

以上各个时代的科学方法，在现代科学中都得到相应的应用。这些方法，通常称为一般科学方法，是适用于一大类学科的科学方法。例如适用于自然科学、生命科学等。实际上，科学方法可分为三个层次：一是个别科学领域或科学学科中采用

的特殊科学方法，如物理学中的光谱分析法、数学中的数学归纳法等；二是适用于一类科学的科学方法，是一部分学科或一类学科采用的方法，如实验法、数学方法等；三是适用于一切科学的哲学方法。前面阐述的科学方法都是第二层次的“一般科学方法”。

20 世纪，特别是 20 世纪 40 年代以来，人们提出了科学与非科学的分界问题。科学方法作为方法的子类，也有与非科学方法的分类问题。一般认为，科学方法的可作为分界标准的性质有如下五条：①可操作性（排除任意性）；②可判别性（方法是可辨认的，它的运用过程和结果是可检验的）；③目的性（具有保证达到一定结果的倾向和可能）；④创造性；⑤可重复性（排除使用者个人，即满足条件的主体都能成功地利用）。

数学方法（**mathematical method**） 人们从事“数学活动”所采用的方式、手段。所谓数学活动指的是人们生产数学理论体系的各种活动，包括人们研究数学、应用数学、教授和学习数学的各类活动。人们通常是从三个方面理解数学方法的：(1) 研究数学的方法，它包括作为一般科学方法——各门数学分支学科普遍采用的方法——的数学方法，如公理法、关系映射反演法、化归法等；还包括作为特殊科学方法的数学方法，如代数学中的消元法，计算数学中的迭代法等。也可以按数学学科分为分析方法、代数方法、概率方法等，在这个意义上，数学方法的含意与数学知识、数学理论相近。(2) 应用数学——在其他科学或人的实践活动中应用数学——的方法。这时，把数学方法看成是用数学语言表述事物的状态、关系和过程，并加以推导、演算和分析，以形成对问题的解释、判断和预言的方法。这种情况下，所有的数学理论、定理、命题都可以转化为数学方法，起主要作用的是数学模型法。(3)数学教学的方法，如各种解题方法等。当然，这三个方面并没有明确的界限，它们能够互相转化：研究数学的方法，可以转化为应用于其他科学或实践领域的数学方法，应用的方法又可以转为研究数学的方法；二者都可以成为数学教学的内容，转化为数学教学的方法，教学的目的则是为了研究或应用数学。

数学方法是与数学同时产生和发展的，数学的发展过程也就是数学方法的发展过程。实际上，按方法所述，一切数学知识都能转化为数学方法——数学知识的大部分就是数学方法。所以数学方法的历史发展在各学科的发展史中叙述。

数学方法是一种科学方法，具有科学方法的性质，即具有可操作性、可判别性、目的性、创造性和可重复性。尤其在可操作性和可重复性方面，数学方法更有独到之处。计算方法本身就要求可操作性；数学方法的可重复性更是任何其他科学方法所无法比拟的——数学方法具有无条件的可重复性。

数学方法论（**mathematical methodology**） 是以数学方法为对象的一门学问。它涉及到数学思想方法及数学中的发现发明等问

题，其目的是探索数学思想方法的一般原则、数学科学的发展规律及数学中的发现、发明与创新的法则等。数学方法论是数学的元理论之一，又是数学理论的基础之一。

古希腊数学家泰勒斯最先提出数学方法论：数学命题要加以演绎证明；在数学中要建立一般的原理和规则；毕达哥拉斯认为可以用数学来把握自然的规律，对数学的结构作了最初的探索；柏拉图阐述了数学概念的意义；亚里士多德提出逻辑方法论，创建公理法和数学证明原理；欧几里得则在数学中实现了公理化，他的《几何原本》是一部划时代的巨著，它奠定了古希腊数学方法论的基础：采用公理法建构数学理论体系并以演绎体系表述出它来，数学的主要内容是抽象的命题及其证明，逻辑证明是数学的基本方法。因此，数学中的发现、发明与创新就表现为提出新的命题、证明未证的命题、改进已证命题的证明；由命题构成新的公理体系等。

中国古代的数学方法论与此不同，中国古人认为，数学产生于人的实践中，当然可以应用于人的实践的任何领域中。应用是中国古代数学的目的，数学知识按应用方式而系统化，内容是算法，数学的发展表现为算法的改进，新领域中的应用和新算法的提出，开创了数学模型法，计算成为中国古代数学的中心。

欧洲文艺复兴后逐渐开创了理论和应用相结合的数学方法论。伽里略提出了用数学公式表达科学知识尤其是自然规律的新的方法论原则，他还第一次把数学方法和实验方法相结合用于科学研究。笛卡儿对数学方法论作了重要的发展，提出数学—演绎法，他把数学看作方法的科学并把数学方法当作演绎推理的工具。他把代数推理方法和逻辑相结合，使之成为普遍的科学工具，利用它，笛卡儿创建了解析几何学。莱布尼茨发展了数学—演绎法，他首次提出科学数学化的思想，并开启了数理逻辑的先河。牛顿从另一个角度发展了数学—演绎法：把它应用于力学研究从而建立了古典力学体系；他的创举是在自然科学研究中用数学推导代替逻辑演绎，用数学建构科学理论，具有划时代的意义，他创建了微积分学，是从应用出发发展了理论数学的典范。牛顿之后数学应用的成功使人们仍坚持数学直观地符合现实世界、具有必然的真理性的思想。

19 世纪非欧几何的建立反驳了上述观点。人们开始提出并研究数学基础和几何基础的问题。微积分的严格化也提出同样的问题。人们为了证明非欧几何的无矛盾性，采用了“解释”方法，后来这种方法成为数学基础研究以及现代数学中具有方法论意义的方法。对数学理论无矛盾性的探讨取得了两个具有数学方法论意义的重要成果。一是康托尔的集合论，集合论能对几乎所有的数学理论作解释，因而成为数学的基础。康托尔引入了一一对应，从而在数学中接受了实无限集，使数学成为“关于无限的科学”。二是希尔伯特创建的形式公理体系，具有重要的方法论意义——现代几乎所有的数学理论都是用形式公理

体系表述的。19 世纪另一个数学方法论成果是伽罗瓦的群论，它使数学从局部性研究转向系统结构的整体性分析研究阶段。

20 世纪初，发现了集合论悖论，数学出现了“危机”，人们从各个方面去寻找解决方法。一是对集合加以限制，由此发展了公理集合论。一是从整体上对数学的思想方法，对数学理论结构进行新的探讨，由此产生了各种学派提出的方法论观点。各学派的方法虽然都没有排除悖论，但它们的方法论却对数学的发展起了重要的作用。直觉主义提出“能行性”和“构造性”的方法论原则。前者成为现代理论计算机科学的一项基本要求，后者后来发展为一大类构造性数学，如马尔可夫等人提出的算法化为特色、用构造逻辑系统重建的构造性数学。逻辑主义则完成了由传统逻辑向数理逻辑的转化。希尔伯特的元数学、数学无矛盾性标准、有穷构造方法都有着重要的方法论意义，尤其元数学，它第一次使一门数学理论整体地作为一个确定的可用数学方法来研究的对象，其划分理论层次的方法论无论在现代数学、现代科学以至于现代哲学中都有重要的意义。

形式公理化思想方法进一步发展的一个方向就是数学结构主义，以法国的布尔巴基学派为代表。其方法的要点是：数学以数学结构为研究对象；数学可按结构分类；数学理论的发展就是各种结构的建成、改进和扩充。这些观点已为人们所接受，结构分析成为现代数学的典型方法：在某一同构映射之下对某一基本结构进行分类。柯尔莫戈洛夫表述了这样一个方法论原则：数学的一些专门部分从事于结构的研究，这种结构属于某种结构类型。每一种结构类型由与之相应的公理体系所确定。数学感兴趣的只是从所采取的公理体系推导出来的结构的性质，即只以同构的观点来研究结构。

数学从一产生就是一门应用科学，中国古代数学和伽里略以来特别是 17—18 世纪微积分的发展说明了这一点。数学有着十分广泛的应用，应用又促进着数学的发展。概率统计等学科就是在应用中发展起来的。19 世纪末，F·克莱因在格丁根大学工作时，第一次提出并开设了“应用数学”课程，从此开始了应用数学作为学科的发展。但由此直到第二次世界大战前，应用数学主要指物理学和工程中应用的数学，其代表作是希尔伯特和柯朗的名著《数学物理方法》。二次大战中，应用数学有了飞跃的发展，形成了运筹学。随着电子计算机的产生和广泛应用，数学应用于更广泛的领域中，产生了诸如控制论、信息论、算法论等一系列新的数学方法论原则，产生了经济数学、生物数学、数理语言学等应用数学的新分支学科，并产生了模糊性数学这样全新的数学思想方法。应用数学推动了纯数学的发展，纯数学也越来越多地得到实际应用。这就产生了一个著名的方法论问题：应用数学和纯数学有怎样的关系？鲁札文论证了二者本质上是构成统一的数学认识过程的互相联系、互相补充的两个方面。

在数学的发展过程中，人们对数学中的发现发明、对数学中的创造性思维、对数学思想方法的研究也不断深入，尤以本世纪的研究为突出。例如庞加莱认为数学与物理科学的发现发明方法是相似的，而发现和发明就是一种“选择”，而选择决定于数学直觉；数学直觉引起的最佳的心智状态为顿悟；他认为数学归纳法是从特殊到一般的工具，有很重要的意义。阿达玛发展了庞加莱的思想，论述了选择能力的基础——数学直觉的心理要素，并认为数学直觉的本质就是某种“美的意识”或“美感”等等。波利亚指出并分析了数学发现的具体过程——合情推理过程，并提出了合情推理模式，对数学教学有重要的意义。徐利治概括了数学中发现发明的方法，提出关系映射反演原则，具有重要的方法论意义。徐利治还创建“抽象度分析”法，为用数学方法研究数学理论开辟了广阔的前景；他还提出了宏观数学方法论和微观数学方法论的二分法，为我国的数学方法论研究奠定了基础。

公理法(axiomatic method) 公理法亦称公理学，包括公理方法和公理体系两个方面。公理方法就是从初始概念和初始命题(公理)出发，按一定的逻辑规则，定义出其他有关的概念、推演出其他有关命题(定理)的一种演绎方法。由初始概念、公理、定义、推理规则和定理等构成的演绎体系叫做公理体系。公理方法是构成公理体系的思想方法，公理体系是用公理方法得到的数学理论体系。一个公理体系就是一个数学理论的表述体系，它是由不定义的初始概念和不证明的公理出发的。公理法是一种演绎方法或演绎体系，它所采用的基本上就是演绎推理。公理体系中所有其他的命题都可以由公理(借助于新概念的定义)演绎出来，它们实质上是作为特殊的东西包含于公理之中的，公理是公理体系中最一般的命题。公理法的展开过程是一个从一般到特殊的过程。

公理法的发展经历了四个阶段。

1. 具体的公理体系

欧几里得的《几何原本》是第一个用公理方法建立起来的数学公理体系。在《几何原本》中，公理系统(所采用的所有公理的组成)是“自明的”，即建立在人的直观经验的基础之上的；其论域(所研究的对象、性质和关系，它们都是用初始概念来表述的)是唯一的，并且先于公理而具体地给定。初始概念表述论域中的对象(如“点”、“线”、“在……上”等)，公理刻划对象的基本性质，所以称为具体的公理体系。《几何原本》对后世的数学以至于科学的发展产生了巨大的影响，但由于它过于依赖直观，也存在一些问题。

2. 抽象的公理体系

19 世纪建立的非欧几何，动摇了公理是“自明的”这样一种传统见解。人们认识到，感性直观并不能作为数学的依据，只有合乎逻辑的人们的正确思维的结果才是“正确”的，即使它与感性直观相矛盾时也如此。关于公理法，人们认识到：在一个数学体系内存在着不可判定的

命题(例如在绝对几何中,对欧几里得第五公设既不能证明,又不能反驳);一个公理体系中的公理系统作为一个整体应满足一定的条件;对公理系统的性质的证明可以采用解释的方法,例如用欧氏几何的无矛盾性解释非欧几何的无矛盾性,用实数的无矛盾性解释欧氏几何的无矛盾性,用自然数算术的无矛盾性解释实数的无矛盾性,用集合论的无矛盾性解释自然数算术的无矛盾性等等。在上述思想指导下建立的非欧几何和射影几何的公理体系就称为抽象的公理体系。

3.形式的公理体系

公理法的进一步发展就是形式的公理体系。形式公理体系的论域不唯一;其公理系统要满足无矛盾性、独立性和完全性的条件,它们表述的是论域中对象的性质和关系。实际上形式公理体系所揭示的是某几类对象之间的逻辑结构,这里,舍弃了一切与推导(演绎推理)无必然联系的东西,因此称为形式的公理体系。希尔伯特的《几何基础》给出了一个典型的形式公理体系,它可以解释为欧氏几何学理论,也可以解释为实数理论,它是第一个形式公理系统,对数学产生极大的影响:现代数学理论大多是用形式公理体系表述的。

4.形式系统

形式公理体系进一步形式化就得到形式系统,是希尔伯特首先提出并建立起来的。所谓形式系统就是一个由初始符号(如逻辑符号、函数符号、个体变项等),形成规则(例如形成项、公式的规则)、公理和变形规则等构成的完全符号化、抽象化了的公理体系。建立形式系统的目的不是为了提出或证明数学命题(那是非形式化的数学的任务),而是为了研究数学理论自身的性质,形式系统属于对象理论,是元数学的研究内容。现代形式系统研究主要是数学基础的内容。

数学模型法(**method of mathematical model**) 数学模型是针对或参照某种事物系统的特征或数量依存关系,采取数学语言,概括地或近似地表述出的一种数学结构。数学模型是利用数学解决问题(实际问题或理论问题)的主要方式之一。利用数学模型解决问题的方法叫做数学模型法。这时,常把数学模型狭义地理解为联系一个系统中各变量间内在关系的数学表述体系。

利用数学模型解决实际问题的思想可追溯到中国古代,《九章算术》(公元1世纪成书)就为当时社会生活各个领域里利用数学提供了系统的数学模型。特别其中"盈不足"、"勾股"、"方程"等章,本身就提供了用"盈不足术"、直角三角形、线性方程组为数学模型解决各种实际问题的方法和实例。

古希腊人托勒密(公元2世纪)提出"地心说",采用了几何模型研究天文学,这也是数学模型法的早期应用之一。1300年后,哥白尼认为托勒密的模型不能很好地解释行星运动的物理实质,他给出新的几何模型并且定量地考察了它,从而得出著名的"日心说"。数学模型法在此学说的建立中有重要的意义。

近代的伽里略(1564—1642)是在实际的科学研究中开创实验方法与数学方法相结合的第一个人,他将比率和三角形相似理论作为数学模型,并以之推导出著名的自由落体运动的规律,从而开启了数学模型法在近代科学中应用的先河。笛卡儿的"万能方法"所揭示的方法论原则(见关系映射反演方法)也就是采用数学模型法解决"任何问题"的方法论原则。从此,在解决各种科学理论和实际问题时,数学模型法成为首选方法之一。笛卡儿在数学研究中也采用了数学模型法,他为几何学建立了代数模型,并通过模型推导解决原型(几何)的问题,从而创立了解析几何学,他的这种在数学研究中采用数学模型的方法又叫关系映射反演法。所以关系映射反演方法可以看作数学模型法在数学中应用的具体发展。但是反过来,在其他科学或实际问题中应用数学模型时,也必然要求一个数学和其他科学(或实际领域)的"映射",当然,这个"映射"只是数学中映射概念的推广,所以,数学模型法也可以看作是关系映射反演方法在数学之外的应用的推广。

为证明非欧几何的无矛盾性,采用了解释的方法(见解释),一个解释也叫一个模型。数学基础研究中,形式系统的意义要靠模型来说明,形式系统的元数学性质也要依赖模型才能证明。这是数学模型法的另一个方面。

现代数学模型法在两方面都有很大的发展,在其他科学及实际问题中采用数学模型法所涉及的模型的建构、求解、说明等一系列问题的研究已构成了独立的学科。科学基础中模型的构造及模型和作为原型的形式语言的关系也构成独立的学科——模型论。

关系映射反演方法(Relation mapping inversion method) 给定一个含有目标原象 x 的关系结构 S,如果能找到一个可定映映射 φ,将 S 映入或映满 S^*,则可从 S^* 通过一定的数学方法把目标映象 $x^*=\varphi(x)$ 确定出来,进而,通过反演 φ^{-1} 又可以把 $x=\varphi^{-1}(x^*)$ 确定出来,这样,原来的问题就得到了解决。这种方法就叫关系映射反演方法。

本质上看,就是一种把要解决的问题转化成比较简单的或已解决了的问题,通过后者的解来解决原问题的方法。这是数学的一种基本的具有方法论意义的方法。

人们很早就在数学中使用这种方法。例如欧几里得《几何原本》(公元前 300 年)中把对图形的若干证明转化为"作图"问题来解,从而解决了由于公理不足所产生的证明困难(关于线、圆之间的相交问题等)。中国古代的刘徽在《九章算术注》(263 年)和《海岛算经》(263 年)中一再把各种数学问题——求面积、体积、证明公式、测量原理——归结为图形的拼补(出入相补原理)来解决,取得了重要的数学成果。17 世纪初,纳皮尔引入对数,用对数进行乘法计算是关系映射反演方法的一大成就。但直到这时,这一方法还没有成为一种明确的方法论原则,人们还没有自觉地运用它来解决问题。

笛卡儿在其《方法论》(1637年)一书中给出了一个“万能方法”：①把任何问题转化为数学问题；②把任何数学问题转化为代数问题；③把任何代数问题转化为方程式的求解。“万能”的说法有些言过其实，但把一个数学问题转化为一个较简单的或已解决了的问题来求解，从此成为数学中的一个重要的方法论原则。笛卡儿身体力行，创立了解析几何学，把许多几何问题转化为代数问题求解，是这一方法论原则的重要示范，而且对数学的发展起了重大的作用：引入变量，促进微积分的创立。此后的数学证明的历史可以说就是关系映射反演方法的应用和发展的历史。人们逐渐自觉地应用这个方法论原则。

1983年，徐利治在《数学方法论选讲》一书中提出前述定义，把这一方法论原则数学化，并正式提出关系映射反演方法的名称，强调了这一方法论原则的关键所在，把这一方法的发展和人们应用的自觉性推到了新的阶段。

解释(**interpretation**) 对于一个理论系统 Σ，如果有另一理论系统 M，M 的性质是已知的，在规定 Σ 中的每一基本概念都指 M 中的某一概念后，可验证 Σ 的每一公理在 M 中都成立，则 M 称为理论系统 Σ 的一个解释，或一个模型、一种应用。

正式应用解释的方法解决数学问题最早的是贝尔特拉米(1868)和F·克莱因(1870)，用欧氏几何解释了非欧几何(准确些，罗巴切夫斯基几何)，从而证明了非欧几何相对于欧氏几何的无矛盾性。此后解释的方法就在数学，尤其是几何基础和数学基础研究中得到广泛的应用。1899年，希尔伯特的《几何基础》使用了一个著名的解释：用实数来解释欧氏几何，同时他还用解释法来证明公理系统的独立性和完全性。一般地，关于数学理论自身的整体性质无法证明(证明只在系统内有效)，多采用解释的方法。随着数学的发展，解释有了日益增多的应用，尤其对于形式系统理论来说更加重要，因为形式系统的意义完全由它的解释来确定，命题的有效性也要由解释来确定。在数理逻辑中，解释这样表述：给定一个体域 D 和一公式 u，如果我们分别用 D 中的具体的谓词和个体来代替包含于 u 中的所有谓词变元和自由个体变元，我们便得到一个命题，这就是 u 在 D 中的一个解释。如果 u 在个体域 D 中的每一个解释均真，则称公式 u 在 D 中永真，u 可称为永真公式或有效公式。

构造性方法(**method of constructive mathematics**) 要证明一个数学命题“存在一个 x 满足 A”，如果能具体地给出满足性质 A 的一个 x，或能找到一个机械的程序，使按其进行有限步骤后，就能确定满足性质 A 的这个 x。这样的方法称为构造性方法。与之相比较，数学中应用反证法作的纯存在性的证明称为非构造性方法。

构造性方法古已用之，自然数就是最古老的“构造性”方法的结果。欧几里得《几何原本》中证明“存在无穷多个素数”就采用了构造性

方法。中国古代数学则多采用构造性方法，对每一个问题都力求给出构造性的解答。近代对构造性方法的强调始自康德，他认为数学概念是由人依先天直观构造出来的。20世纪初，以布劳威尔为代表的直觉主义者认为，数学中的“存在就是被构造”，特别强调并大力推行构造性方法，以致于形成了可以与经典数学相比较的构造性数学。希尔伯特方案所提议的元数学也采取了构造性方法，其“有穷方法”实际上就是一种构造性方法。希尔伯特和他的弟子贝尔奈斯等人为此做了大量的工作，虽然他们以及布劳威尔本人并没有在自己的数学工作中完全采用构造性方法，但构造性方法由于他们的工作而有了深入的发展。

50年代马尔可夫和沙宁等人以算法概念为基础研究数学，采用了严格的构造性方法，他们完全排出实无穷，对许多数学分支的算法化以及制定构造逻辑的语义学都作了重要的工作。60年代E·毕晓普和J·迈希尔等人开拓了构造性方法的新局面，他们关心的不是解决数学奠基问题，而是要用构造性方法来研究数学。他们把严格采用构造性方法的构造性数学看作古典数学的一个分支，在这个分支中讨论的个体或映射都要求是可计算的。毕晓普认为只证明一个个体或映射在逻辑上必然存在是不够的，还必须拟定一种有限而机械的办法把它构造出来。他们的基本作法是，采用构造性方法，把古典数学概念算法化，从而考虑哪些定理在构造意义下仍然成立，哪些定理不能成立以及如何改造等，由此发展出相当大的一部分有价值的数学。构造分析即为一例。

现在人们认为，构造性方法与存在性方法常常是同样地有效。采用构造性方法不仅可以得出较为新颖、较为深刻的见解，而且得出的成果更便于应用。得出具体的解要比纯存在性地证明有解要有意义得多。当一个数的存在能采用构造性方法证明时，则这个数不仅在理论上，而且在实际上就可以计算出来。联系到计算机科学的发展的需要，在数学中采用构造性方法或研究构造性数学更有深远的意义。

采用构造性方法有助于数学直观和严格逻辑性的结合，能提供比较直观的结果，促进人们数学直观能力的发展，因而有利于数学教育，有助于数学思维能力的开发。

等置方法(**method of equivalence**)　科学中最常用的抽象方法之一。是利用某种等价关系，得出所研究的对象的共同性质的一种抽象方法。在数学中就表现为用某种等价关系，对集合进行分类，所得到的类(商集)往往就是一个新的数学概念。即等置方法是数学中得出新概念的重要抽象方法之一。

定理　如果R是集合A上的一个等价关系，那么存在A的一个划分P，使元素$a,b\in A$处于P的同一类中当且仅当aRb成立。反之，如果P是A的一个划分，那么关系$\{(a,b)\mid$存在一类$C\in P$以及$a,b\in C\}$是一个等价关系。

定义　经过等价关系R的划分得到的A的等价类的集合，称为

A对R的商集，记为A/R

$A/R=\{[a]\mid a\in A, x\in A\wedge aRx\}$。

舍弃商集中“原来集合A”的元素的性质，收括商集自身的一些性质往往得出新的概念，从而完成等置抽象的过程。

例　设整数集Z，对$a,b\in Z$，如果正整数m除a的余数等于m除b的余数，称“a和b关于模m同余”，记为

$a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$。

易证，“同余”是一等价关系。利用同余关系划分集合Z，得商集

$\{[0],[1],[2],\cdots,[m-1]\}$。

定义商集为模m的剩余类，这就得出一个新的数学概念。

许多重要的数学概念都是按此方法定义出来的，如群论中的陪集，环论中的剩余类等等。自然数、整数、有理数、实数、复数以至于四元数、八元数等也都是按此方法定义出来的。如自然数的(基数)定义是先在“对等关系”下划分集合，得到的类称为“基数”，如果一个集合不能与它的任何真子集对等则称为有限集，非空有限集的基数就是自然数。在自然数对的集合$N\times N$上定义一个特定的等价关系，由它划分$N\times N$集得到的等价类称为整数。整数有序对$(Z\times Z\setminus\{0\})$集上定义一特定等价关系划分$Z\times Z\setminus\{0\})$集得到的等价类称为有理数，如此等等。可见等置方法在数学中有基本的重要性。

实现可能性方法(method of realization of possibility)　数学抽象方法之一，特别与数学中“无限”概念的引入有关。这一方法又可进一步分为潜在实现可能性抽象和实在的实现可能性抽象两种。

潜在的实现可能性抽象就是：舍弃了我们所处的空间和时间的局限性给我们带来的构造对象的可能性的界限，使我们在一定的条件下可能撇开实际的实现可能，而假定我们规定的构造阶段完成后，就能有实现其后继阶段的可能。例如在构造一个自然数列时，我们认为，无论我们写出多么大的一个自然数N，我们总是立即可以得到其后继数$N+1$的。这里就舍弃了实际的写出的可能性，因为要构成自然数列，就要写出任意的自然数，而显然有我们无法实际上写出的自然数，例如十分大的自然数——大到我们用印度一阿拉伯数字表示它时，写满了整个地球表面也写不完。我们说，能写出任意自然数N的后继数$N+1$时，就舍弃了这种实际写出的可能性，而认为只要我们写出了任意自然数N，就能够写出$N+1$，因此潜在着写出任何一个自然数的可能性。

在潜在实现可能性抽象中所考察的对象称为可构造性对象。例如用任何进位制写下的自然数，利用某一字母表的字母组成的任意字母组合(亦可称为“字”)以及由数或字组成的二元组、三元组和一般地由它们组成的有限序列等等。可构造性对象也组成各种总体，例如自然数集，由某个字母表的字母所组成的“字”的集合，以及一般地说，由任何类型的可构造性对象的全体组成的集合。

利用潜在实现可能性的抽象，

上述对象的总体实际上不能“完成”的，对每一个对象，总有可能实现其后继对象，因此这个总体是无限的，它总能超越任何界限。但是这种无限，只是作为一个没有界限的过程，即潜在的无限而存在的，它的元素不是同时地存在着，而是在过程中，在构造中逐渐生成的。这就是潜无限的概念。

实在的实现可能性抽象则舍弃了构成无限集合的全部元素的不可能性、舍弃了对这些集合的具体的构成，只要是不互相矛盾的对象，就认为它们是全部同时地存在着的。因此，自然数集可以看成是一个完成了的集合。这种抽象方法还隐含了这样的意思，数学中“对象”的存在，与其构成的可能性(现实的可能性)无关，它们只不过是由公理或定义的要求而推导出来的。这样得到的无限概念，即无限整体是一个完成了的“存在”的概念叫实无限(穷)。

数学中对无限的存在性、潜无穷与实无穷的存在性一直有着争议。中国古人很早就达到了实现可能性抽象，对无限、有限、无穷小等都有所认识(《墨经》、《庄子》等)，刘徽注《九章算术》，创立“割圆术”——用圆内接正多边形边数倍增的过程去逼近圆，最后求出圆面积的方法标志着刘徽已进行了实在的实现可能性抽象，有了实无穷思想。西方的亚里士多德是一个潜无限论者，它不承认实无穷。欧几里得《几何原本》的无限思想与亚里士多德相一致，书中并不涉及无限长的线段或延伸到无穷远处的直线，它只涉及有限直线，但直线可以向两端任意延长。伽里略提出的有名的“伽里略悖论”反映他已认识到无穷整体，但对此困惑不解。高斯不承认无穷整体的存在，波尔查诺承认无穷整体(实无穷)的存在，并建立了一一对应为等价的观念。在分析基础的严格化过程中，人们一再涉及到无穷整体的问题，但柯西等人仍然采用了潜无穷的观点。数学中的实无穷概念是康托尔引入的，康托尔引入的无穷集合就是一个无穷整体，是一个现实的完成的存在着的整体。这一概念立刻受到潜无穷论者的激烈反对，反对最力者是他的老师克罗内克。20世纪初直觉主义者也反对教学中采用实无穷，形式主义者则认为不应在数学中排除实无穷，柏拉图主义者更认为实无穷概念也是客观地存在着的。实际上，人们对无限的认识依赖于实现可能性抽象的方法，我们认为无限是潜无限和实无限的辩证的统一。

数学归纳法(mathematical induction) 证明有关自然数 n 的命题 $(p)n$ 为真的一种方法，是人们最早掌握的一种递归方法。其方法是：1°证明 $p(1)$ 为真。2°假设 $p(k)$ 为真，证明 $p(k+1)$ 为真。若1°、2°都得证，则 $p(n)$ 为真。数学归纳法的基本思想是：以有限来掌握无限，通过有限次的操作，证明关于无限集合的某些命题。

最早在数学中采用这种思想的是欧几里得，《几何原本》中证明存在无限多个素数时就隐含了这种思想。第一个正式用数学归纳法的是意大利人毛罗利科，在他的《算术》

(1575)一书中,他用数学归纳法证明了若干结果,例如

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

对所有的自然数 k 成立。帕斯卡则对数学归纳法作出明确而清晰的阐述,他在自己 1654 年发表的论文"算术三角形"中用数学归纳法证明了所谓"帕斯卡三角形"(二项式展开式系数表)等三个命题。由于当时还没有表示自然数的符号,因此上两人用法中的第 2°步是以例子说明的。J·伯努利 1686 年首先提出了表示任意自然数的符号,在他的《猜度术》(1713)一书中,使用了现代形式的数学归纳法。现在使用的"数学归纳法"这一名称是 A·德摩根提出来的。1893 年,皮亚诺建立的自然数理论把数学归纳法作为一条公理(递归公理或称为数学归纳法公理)纳入他的自然数公理系统中。此后,数学归纳法成为证明有关自然数的命题的首选方法,并且又发展了若干数学归纳法的变型,如第二数学归纳法、倒推数学归纳法等等。

超限归纳法(**transfinite induction**) 又称超穷归纳法,数学中用来证明关于超限数的某种类型的命题的重要方法,是数学推纳法的推广。它是在 19 世纪末康托尔引入了良序集的序数,可以利用序数把良序集编号时产生的(见集合论)。超限归纳法是集合论以至于数学基础研究的重要工具。1936 年,根岑用此法证明了自然数论的无矛盾性,在数学史上占有重要的地位。

设 $(X,\leq)$ 是一个良序集,对任意 $a\in X$, $X_a=\{b\in X \mid b<a\}$ 称为在 X 中由 a 所确定的截断。$E\subset X$ 称为归纳子集,如果对于任何 $a\in X$,只要截断 $X_a\subset E$,就有 $a\in E$。超限归纳法:设 E 为良序集 $(X,\leq)$ 的归纳子集,则 $E=X$。当 X 为自然数集 N 时,就得到一个特例——数学归纳法,表述为:若 $E\subset N$,满足①$o\in E$;②对于任何 $n\in N$,如果由一切小于 n 的自然数 $k\in E$,可以推出 $n\in E$,则 $E=N$。其中,一切小于 n 的自然数 $k\in E$ 相当于 $N_n\subset E$,而 $o\in E$ 则是 $N_o=\varnothing\subset E$ 的结果。这就是所谓第二数学归纳法(见数学归纳法)。

归谬法(**reductio ad absurdum**) 是一种间接证明方法。在论证或反驳中,设法使与自己的论题有矛盾关系的论题(否命题)归于谬误,从而证明自己论题的正确。

在论证中,归谬法又称为反证法。方法为

论题　A
假设　非 A
论证　"非 A"假(与公理或已证定理或已知条件矛盾)
结论　A 真(根据排中律,非 A 假,A 必真)

在反驳中,归谬法又称为构造反例法,方法为

论题　A
假设　A 真
论证　由 A 推出 a,a 假
结论　A 假(根据充分条件假言推理规则:$A\to a$,A 真则 a 真;反之,a 假则 A 假)

最早在数学中采用归谬法的是古希腊的毕达哥拉斯学派。当时,他

们认为“万物皆数”，即万物都可由整数及其比表示出来。后来，该学派中有人（传说为希帕索斯）发现等腰直角三角形若直角边长为1时，其斜边长不能用整数之比表示出来。这是一个著名的反例，实质上反驳了“万物都可由整数及其比表示出来”这一命题，从而引起数学第一次危机。而在证明上述斜边不能表示成整数之比时则采用了反证法。

在欧几里得《几何原本》中，反证法成为常规证明方法之一。后来在数学中得到广泛的应用，例如各门数学理论中的许多“存在性命题”的非构造性证明就依赖于反证法。构造反例对数学也有重要的作用，例如可以发现原有理论的“边界”，推动数学的深入发展，象外尔斯特拉斯1860年构造的著名的“处处连续但无处可微的函数”，就是“连续即可微”的一个反例，极大地推动了分析基础的发展。构造反例几乎是在数学中反驳某些命题的唯一方法。有人甚至认为，数学就是由证明和反例组成的，数学发现的主要目标也就是提出证明和发现反例。可见归谬法在数学中有重要的地位。

数学应用对数学发展的作用(**The role of application in the development of mathematics**) 指的是数学在实践或其他科学中的应用对数学发展所起的作用。从另一个角度来讲，指的也就是实践及其他科学发展的需要对数学的促进作用。辩证唯物主义认为，人的实践的需要是一切科学包括数学发展的根本动力，由实践发展所推动的其他科学发展的需要则是数学发展的重要动力。这两种动力对数学的促进作用就表现为数学应用对数学发展的作用。

无数历史事实证实了这一点，在古埃及人测量土地的应用中产生了几何学；在中国古代，数学在天文历法及社会生活各个领域中的应用促使中国古代数学取得一系列重要成就；牛顿在把数学应用于力学时创立了微积分；18、19世纪分析数学的大发展得益于数学在近代科学中的应用；统计数学起源于数学在人口调查、随机游戏和科学方法论中的应用；运筹学则产生于二次大战时数学在战争中的应用。总结历史上数学应用对数学发展的促进，其主要作用如下：

创设问题情境。问题情境是主体为实现自己的目的遇到了困难和障碍，而且主体认识到了这种困难，并且努力寻找克服困难的方法的一种心理情境。在问题情境中的主体将开始为实现自己目的积极的思维活动，认真地分析问题情境的各个组成部分并揭示困难的性质和特点。主体用语言把这种分析的结果固定下来，就得到了问题。而从科学方法论的角度看，科学研究是从“问题”开始的，只有提出了问题才开始了研究工作，数学也是这样。数学应用中，由于实践和其他科学对克服困难，实现目的有十分急切的需要，所以常为数学创设问题情境，提出新的数学问题。而应用的实际需要又促使人们努力解决这种数学问题。因而促进了新的数学领域的开

拓，促进了数学的发展。

提高对数学理论的价值评价。一般地，人们是向价值评价较高的方向来进行自己的活动的，人们所以研究某一领域是因为它有较高的价值评价（见数学理论的价值评价）。数学理论的价值当然具有客观性，但是对数学的价值评价则是人们的主观行为。不可否认，数学有重要的精神价值，例如知识价值和审美价值，但这种价值只是在具有高度数学素养的人群中才能得到高的价值评价。这种评价自然成为研究数学的动力，促进着数学的发展。这是数学发展史所反复证明了的。对于更多的人来说，例如对于工程技术人员、测量人员等来说，则更多地注意到数学的经济价值，即对数学理论的价值评价具有直接功利的倾向。数学应用到广泛的领域中并获得重大的成功，因而极大地提高了对数学的经济价值和工具价值的评价，这促使所涉及到的各领域的工作者努力研究数学，从而推动了数学的发展。例如，历史上促进了分析数学发展的几乎全是物理学家和天文学家。现代的模糊数学和突变理论也是这样发展起来的。

提供一种可接受性的基础。从科学社会学的角度看，任何一种科学理论都有一个社会承认的问题，就是理论的社会可接受性问题。数学的可接受性标准是什么呢？主要就是逻辑证明，从古希腊开始，这个标准就存在了，随着数学的发展，其逻辑证明的要求越来越严格。现在一般是要求在形式公理体系基础上的严格证明，而数学应用在使数学理论得到社会的接受方面也有着重大的作用。虽然不能说应用是数学理论的可接受性的标准，但在很多情况下，数学应用，尤其是成功的数学应用为数学理论的可接受性提供某种基础，这种基础增强了人们对数学正确性的信念，加强了对数学的研究，从而取得更多的成果。微积分产生之初，虽然理论上并不严格，甚至还有“悖论”，产生了“危机”，但人们仍然接受了它，就是因为它有十分广泛而成功的应用。相反的是非欧几何产生之初，虽然逻辑上是严格的，但由于找不到应用，以至于被搁置了几十年，直到爱因斯坦在物理学中应用了它，才真正为社会所接受。这两个例子充分说明了数学应用在数学理论的社会承认上起着重要的作用。

数学的结构(structure of Mathematics)　指构成数学知识体系的各种知识单元之间的一种相对稳定的结合方式和联系形式。它表明知识单元(和组成部分)在数学体系中以何种方式结合起来，在数学体系中占有什么地位，以及怎样决定着数学整体的功能等等。所谓知识单元是指知识体系中的基本构成因素，按选取知识单元的不同，可以把数学的结构分为宏观数学结构和微观数学结构。以数学理论或更大的层次体系作为结构知识单元的是宏观数学结构；以研究数学理论的构成方式，分析其具体组成部分的地位、作用和结合方式以及数学理论形成的规律性的则是微观数学结构，它可以说是以“命题”为知识单元的，数学公理法阐述了数学的

微观结构。这里只谈数学的宏观结构。数学结构又可分为动态结构和静态结构。凡是不含有时间因素，数学结构不随时间而改动的叫做静态结构；凡包含时间因素数学结构随时间而变化的为动态结构。数学的结构主要表现为两种类型：认识型结构和逻辑型结构。一般地，动态结构表现为认识型，认识型是指结构中知识单元的联系顺序恰好与历史上人类对它们的认识顺序一致。逻辑型则包括演绎型和归纳型两种，主要是数学微观结构的类型。

研究数学结构的一个条件是有相当多的知识单元，一个孤立的知识单元无所谓结合方式问题。因此数学结构的探讨是从数学理论形成时开始的。

最先提出数学的宏观结构的是古希腊的毕达哥拉斯，他的结构方式是二分法。他把数学分为两大类：数和空间的学问，即几何学。它们每一个又分为两部分：数分为自身绝对的存在(算术)和数之比(音乐)，几何则分为运动的(天文)和静止的(几何)两类。结果产生了所谓“四大科”：算术、音乐、几何和天文，这是在西方十分重要的，发生了深远影响的数学结构理论，一直到文艺复兴，西方数学教育及数学研究的主要学科仍是这“四大科”。

希腊学者普罗克洛斯，他的数学结构如图1所示

中国古代数学的结构与古希腊不同，是以数学的应用领域和常用数学模型为知识单元的。《九章算术》所提供的数学结构如图2。《数书九章》所提供的数学结构如图3。

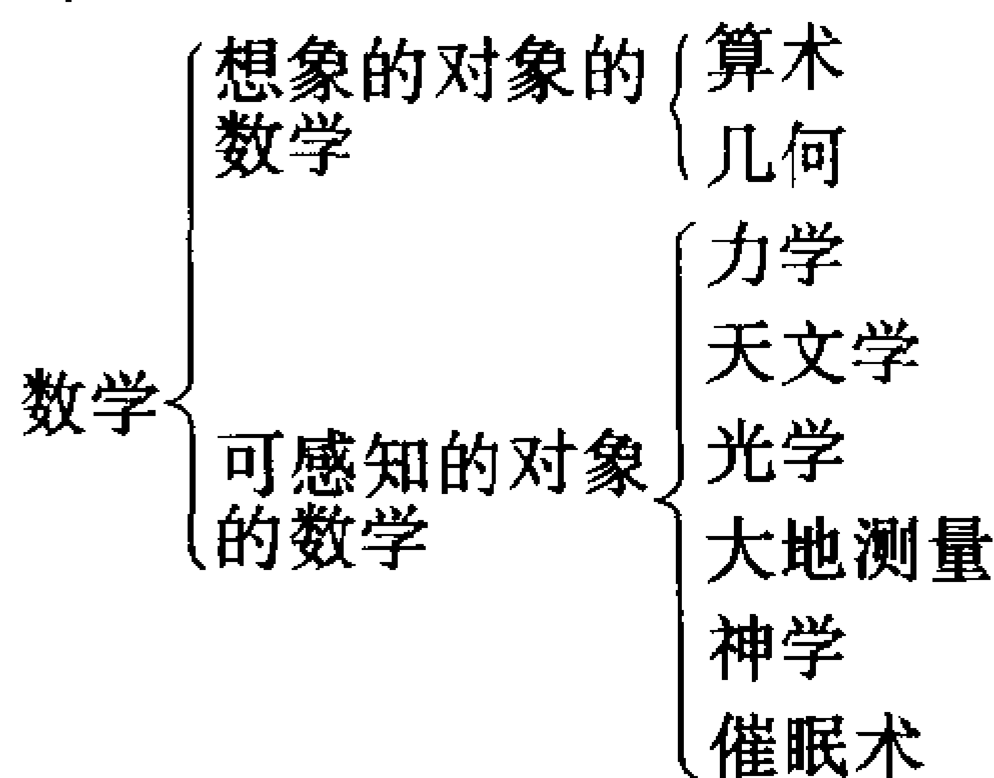


图1

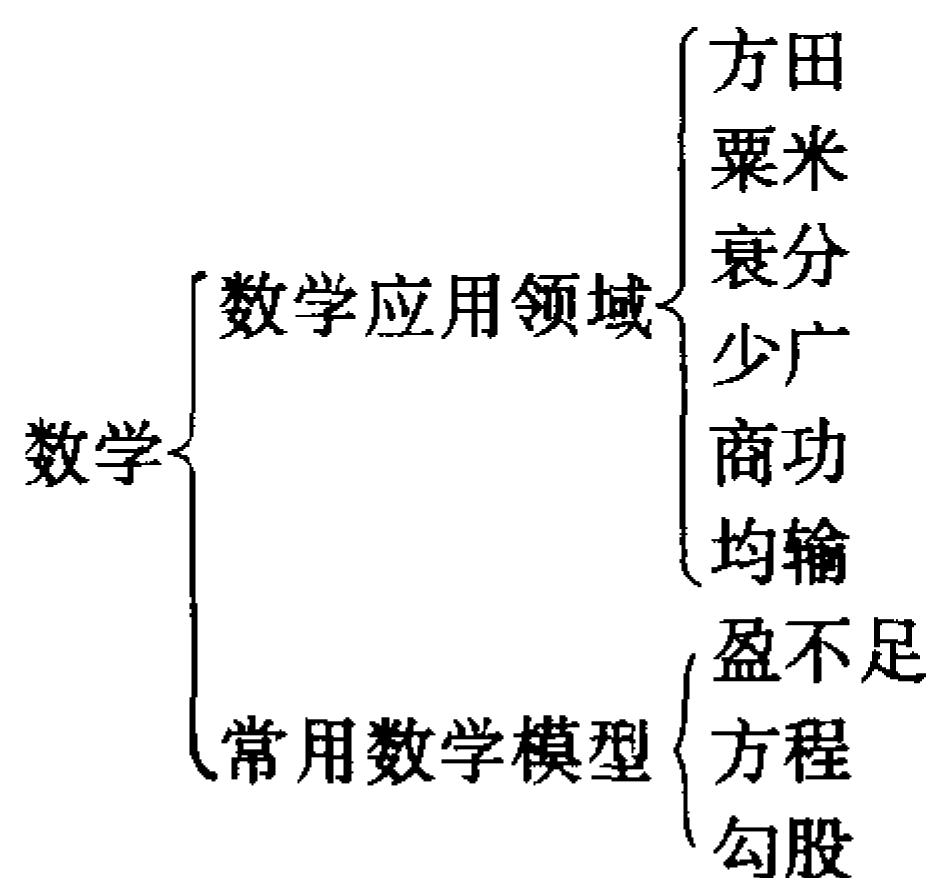


图2

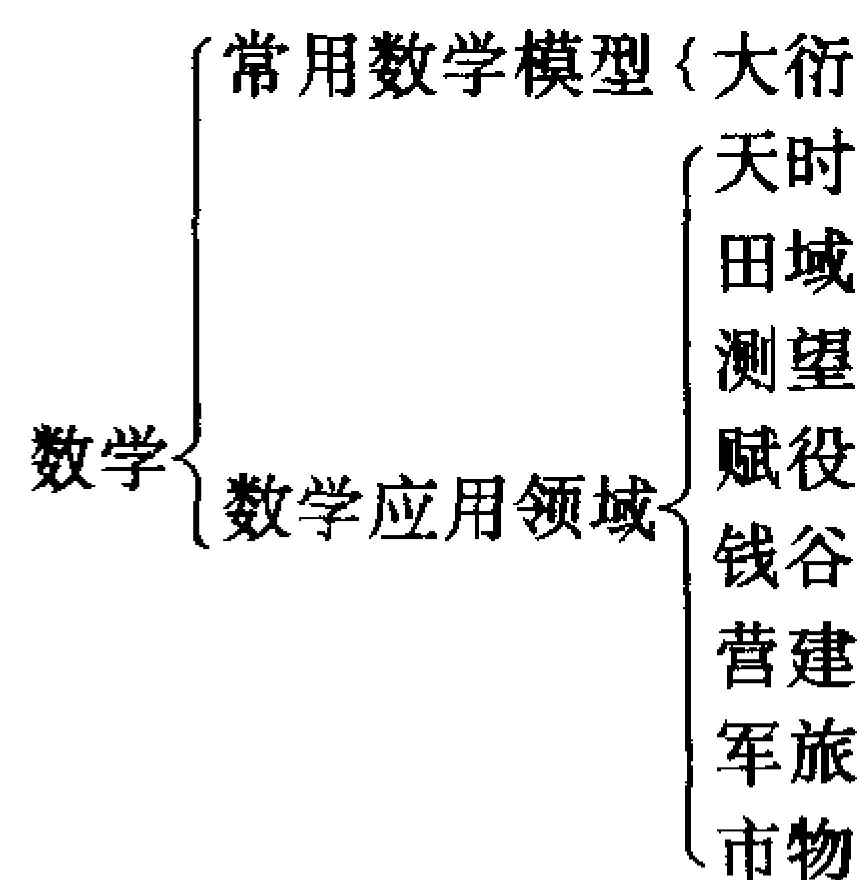


图3

文艺复兴后，数学有了新的发展，数学结构的研究也进入新阶段。

帕乔利把数学划分为三个分支学科：算术、几何和贸易。16世纪拉

米斯 1566 年给出一个新的结构理论，他用二分法，把数学分为纯数学和数学，纯数学再分为算术、几何，数学则分为天文和音乐。还是“四大科”说，但把数学理论及其应用分开，是一个重要进步。1569 年，他又给出一个新的数学结构方式，如图 4。

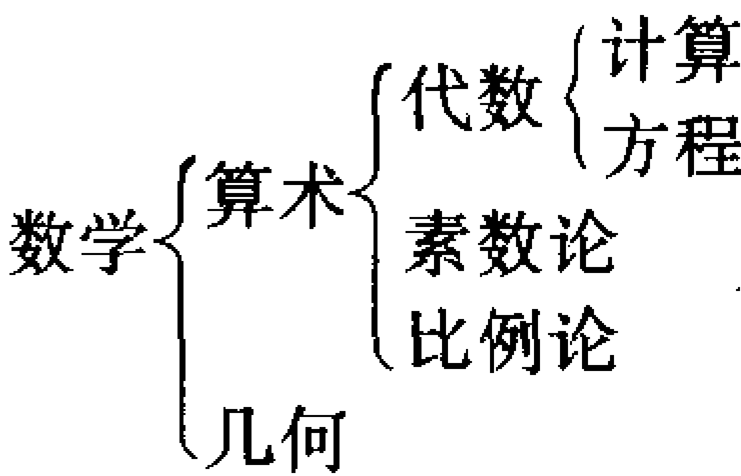


图 4

韦达提出按数学分支的逻辑顺序来划分的线性结构，按照他自己当时发表著作的顺序作为结构顺序：分析方法，代数符号，几何术语及其字母表示，尺规作图问题，几何代数，方程的判定，解方程，类的逻辑，代数方程的近似方法。这是一个动态结构，即按时间顺序的结构，但数学的发展顺序并非就是韦达著作的发表顺序。

18 世纪，法国数学家达朗贝尔和哲学家狄特罗等“百科全书派”，总结当时的数学发展，提出了一个数学结构表（图 5），这个表一方面表出了当时数学的静态结构，同时也是一个动态结构，揭示了数学的发展过程——从前到后是一个数学深入发展的过程，尤其纯数学，由算术几何发展到微积分。他的混合数学指的是数学的应用领域，这与中国古代数学的结构思想相通，但更深入——主要是科学应用，并且数学的发展也是不可比拟的。

20 世纪的一个重要的数学的结构的理论是法国的布尔巴基学派作出的。他们试图用数学结构概念统一整个数学，整个数学正是数学结构由简单到复杂、由抽象向具体的发展的产物。在他们提出的数学的结构的模式（图 6）中，处于中心的是母结构——代数结构、拓扑结构和序结构，在母结构边上的是各种复合结构，对某一些集合来说，还可以有多重结构或混合结构。位于核心的带点的部位就是某种由结构构成的数学理论。这种结构具有某种直观的性质。

由于数学是不断发展的，数学的结构也是不断发展着的，为了更好地表示出这种发展，近来，有人提出了一种三维的树状结构的进化模型。它是综合各种数学的宏观结构理论而提出来的，它既能表示出任一历史时刻，数学的静态结构，又能表示出数学的发展的动态结构，这种模式如图 7 示，它的一个水平截面就称为一个“静态截面”，表示某一时刻数学的静态结构，图 8 所示截面是 18 世纪的截面、图示出“百科全书派”的数学结构。水平截面是一个同心圆系，由于数学是一个整体，所以只有一个中心点，同心圆上的点表示分支。这个水平截面还表示出数学理论结构的层次性，越向内圈越是大的分支（低层次的）。还可以作这种树状模型的垂直截面，此时以时间为指标，表述出数学结构的历史发展，图 9 示出几何学的动态结构。

在任一时刻，数学分支的集合按包含关系构成一个偏序集，直接

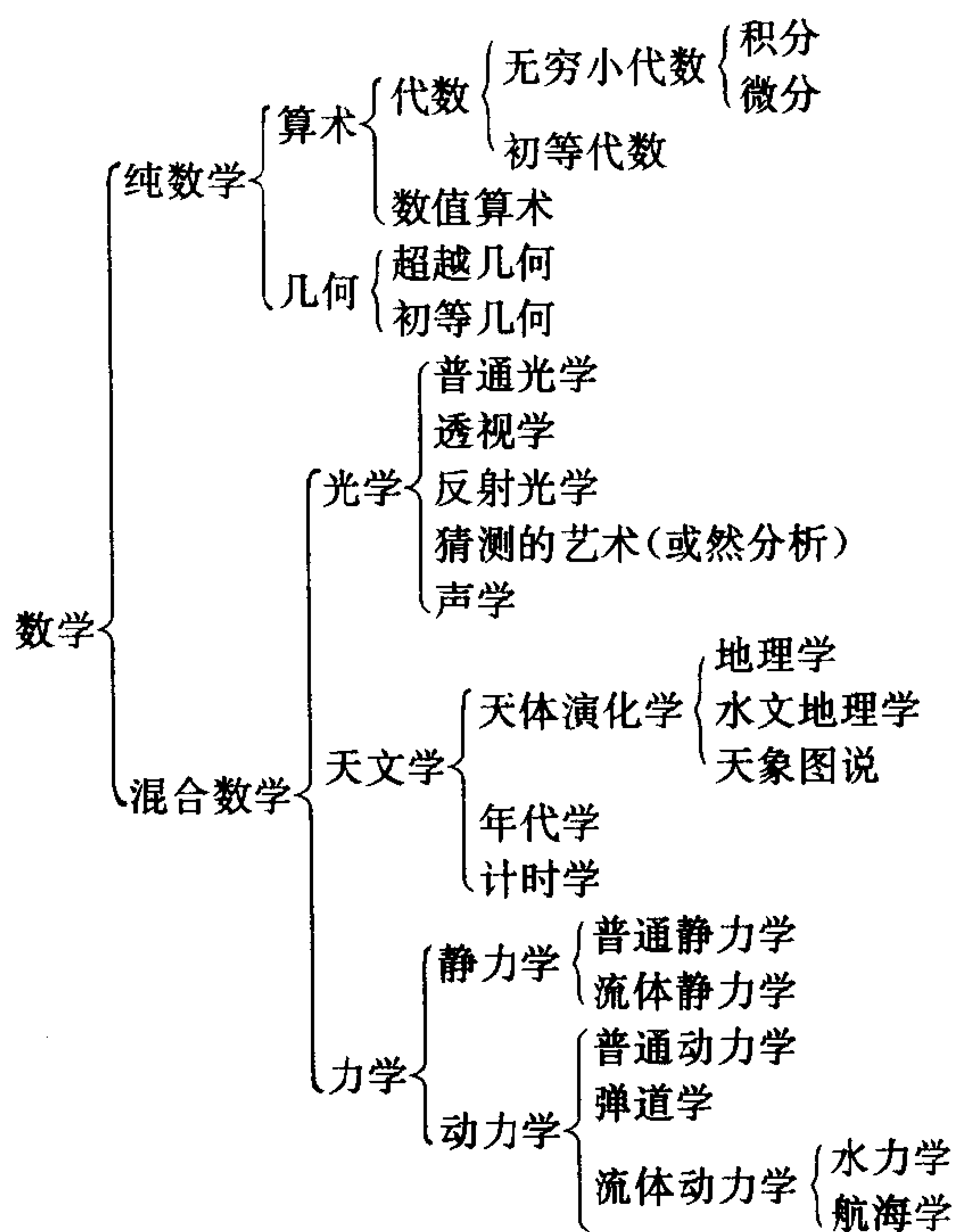

数学
纯数学
算术
代数
无穷小代数
积分
微分
初等代数
数值算术
几何
超越几何
初等几何
混合数学
光学
普通光学
透视学
反射光学
猜测的艺术(或然分析)
声学
天文学
天体演化学
地理学
水文地理学
天象图说
年代学
计时学
力学
静力学
普通静力学
流体静力学
动力学
普通动力学
弹道学
流体动力学
水力学
航海学

图 5

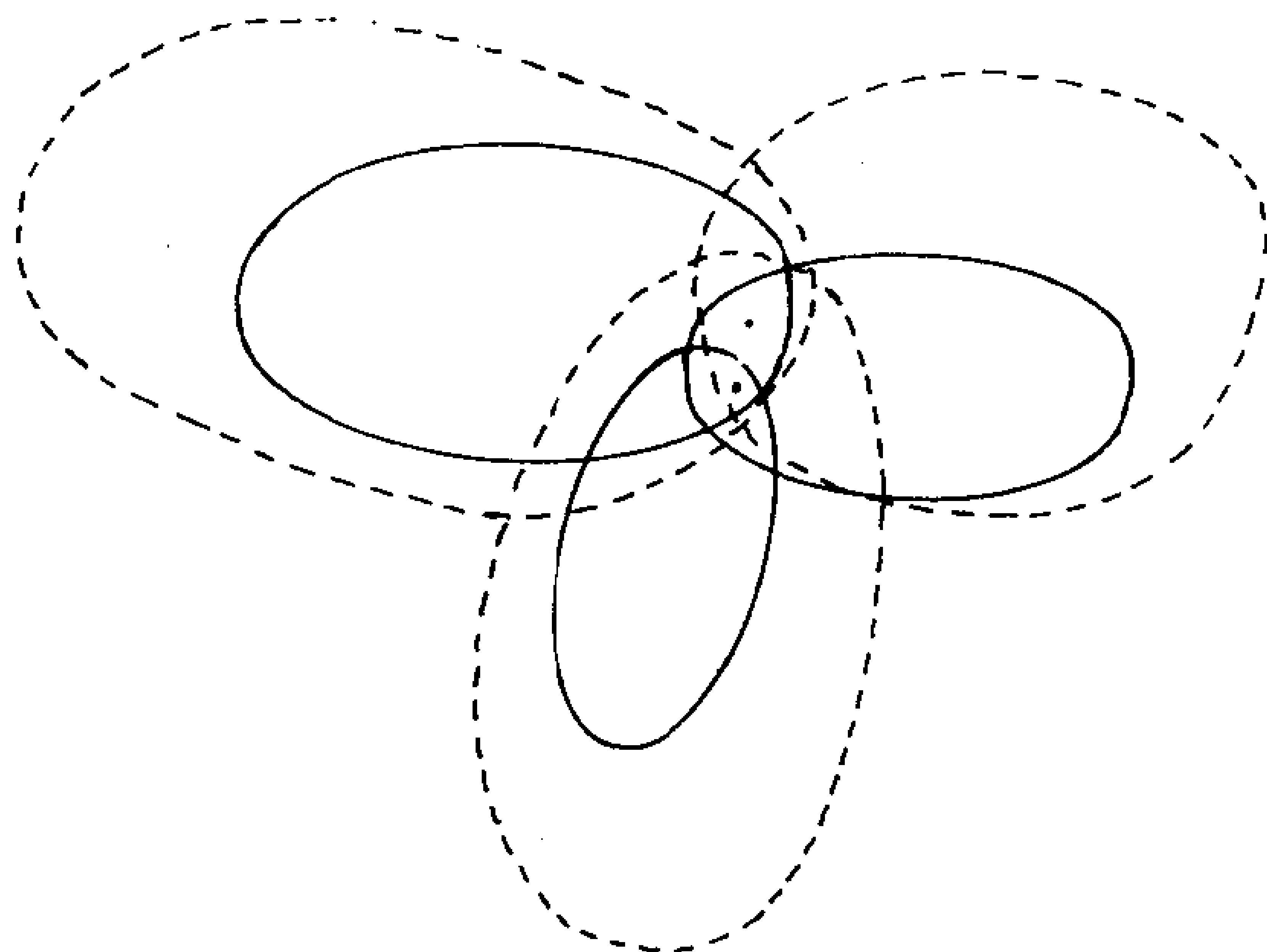


图 6

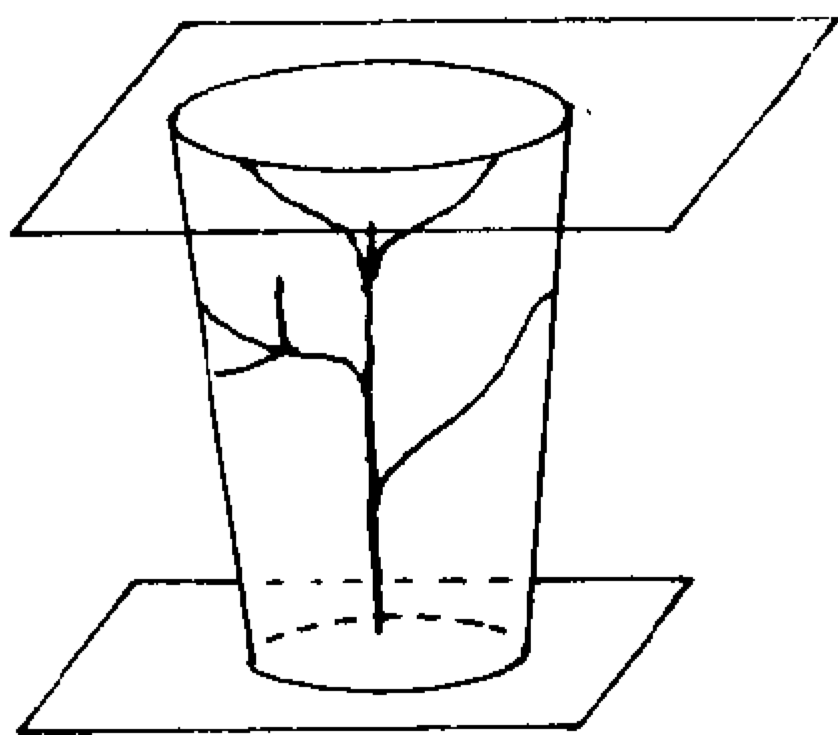


图 7

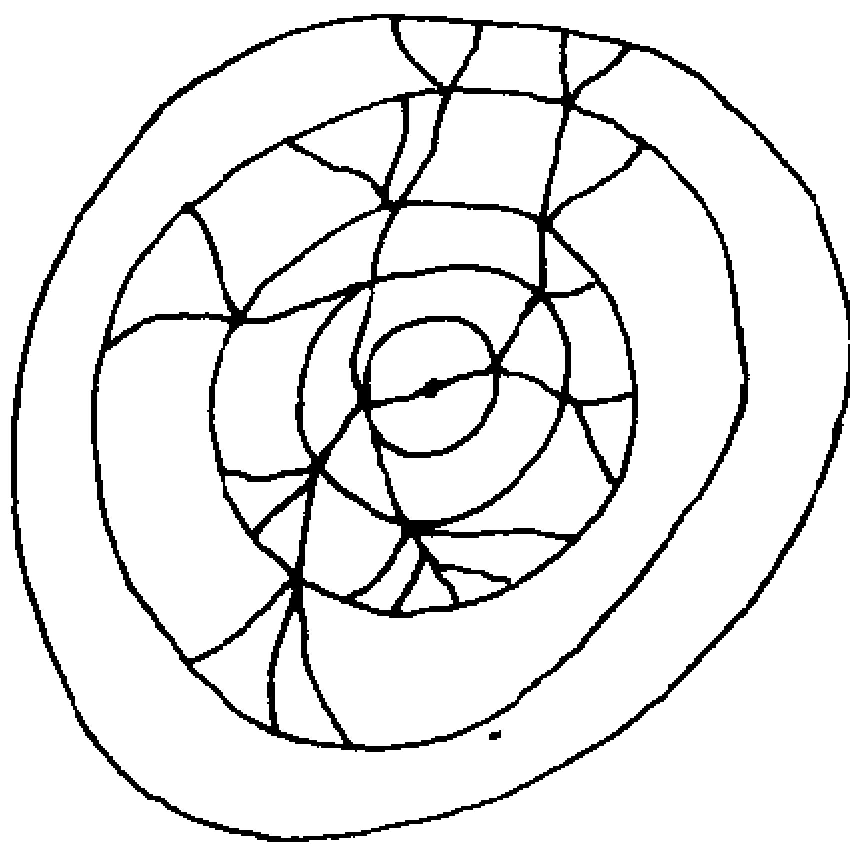


图 8

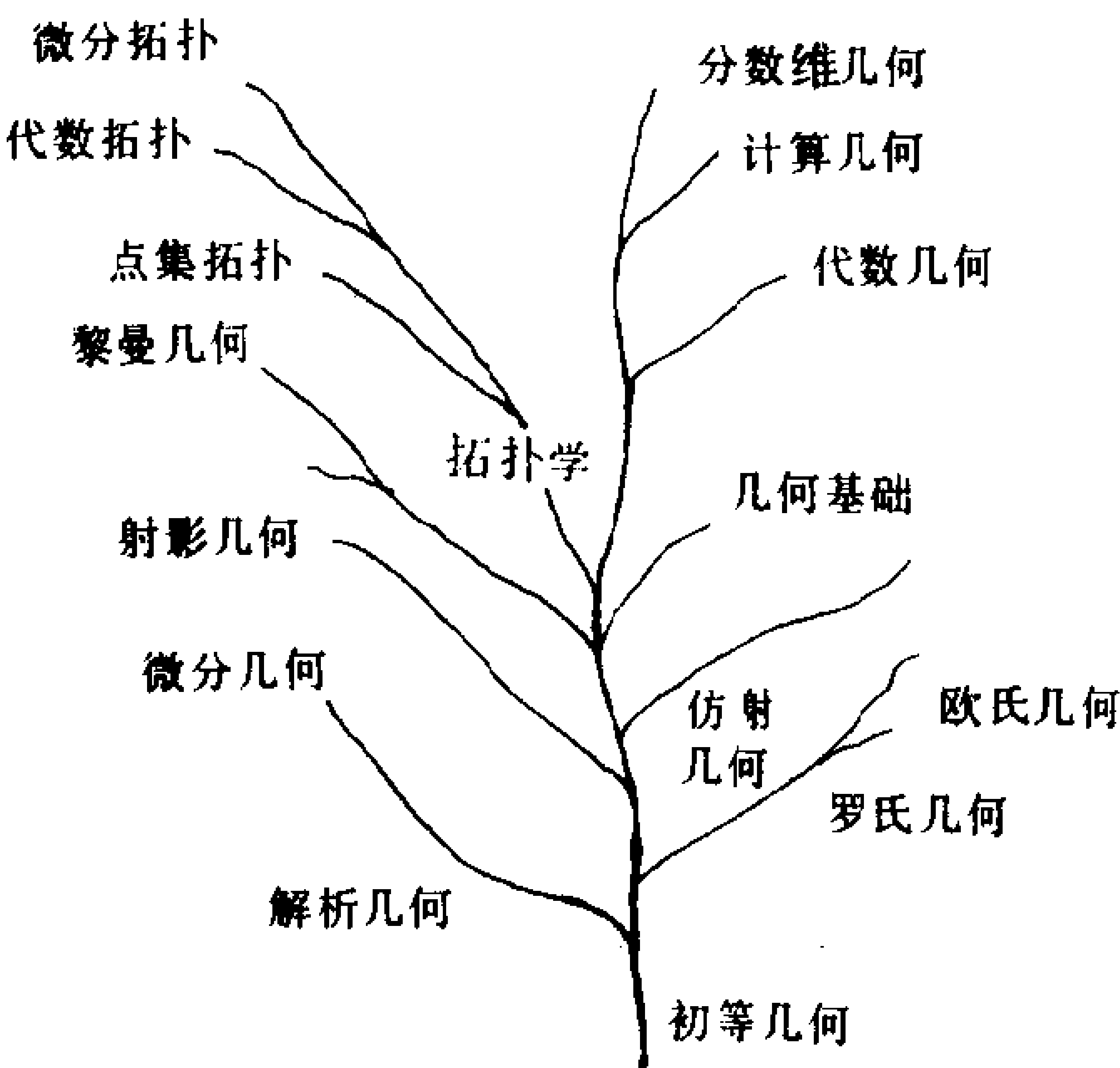


图 9

包含是最基本的关系。这种树状结构及两种截面都表现出这种序关系:水平截面是内圈的包含外圈的数学理论,垂直截面是下层包括上层的。

美国人麦克莱恩认为数学产生于人类活动之中,因此他用人的活动结构解释数学的结构,其结构如图 10 所示(1981 年)

人类活动	数学分支
计数	算术和数论
度量	实数、演算、分析
形状	几何学、拓扑学
造型	对称性、群论
估计	概率、测度论、统计学
运动	力学、微积分学、动力学
计算	代数、数值分析
证明	逻辑
谜题	组合论、数论
分组	集合论、组合论

图 10

数学发展的统一趋势（integrative trend of mathematics development） 分化和综合是一门科学发展中经常起作用的倾向，数学的结构的发展就是它们共同作用的结果，当然还有一个十分重要的结果，那就是使统一的趋势成为数学发展的"大趋势"。

1. 从数学史看数学发展的统一趋势

数学是多起源的，许多民族和地区都对数学的产生和发展做出过贡献。数学的多起源性一方面决定了数学形式的多样性，例如各民族创造的数制和数字符号有极大的不同；另一方面，这种多起源性恰好说明了数学的统一性，通过那些极不相同的形式，人们得到的正是基本一致的数学内容。例如人们通过各种不同的数字符号所表达的正是同样一些自然数概念。许多数学事实在不同的民族的数学中也是十分一致的，例如勾股定理，再如求最大公约数所采用的辗转相除法，在《几何原本》和《九章算术》中都有讲述。

在古代一个地区、一个民族的数学中，这种统一性表现得更明显，例如欧几里得采用公理法，把当时希腊的数学知识统一起来，他的《几何原本》中包括了当时的各种数学知识（分属于现今的算术、数论、几何等学科）。在古代中国，数学也是统一的，统一于一个算法化了的应用数学体系，例如，《九章算术》所提供的体系（也包括了现在属于几何、算术、代数等学科的内容）。

近代科学技术的大发展促进了数学的发展，这是一个科学理论向纵深发展的大分化的时期。数学也出现这种分化的情况，几何学、代数学、分析学、概率论、三角学等开始成为独立的学科，各向纵深发展，也只有充分的分化才使向深度发展有了可能。但随着分化，综合的倾向也必然发生作用，例如在几何和代数的充分分化的基础上产生的解析几何学，可以看作是统一数学的一个尝试，这个统一促进了数学的发展，为微积分的产生奠定了基础。微积分的方法在数学及其应用上都取得巨大的成就，人们把分析方法用于各个数学领域，可见分化又给统一带来新的可能。分析理论的严格化又使之与实数理论及自然数算术联系起来，公理法逐渐成为数学中普遍应用的表述方法，数学各分支表述方法的一致也反映出它们本质上的统一性。数学基础问题的研究表明数学在基础上的一致性。19 世纪，克莱因试图用群论的观点统一几何学；20 世纪以来，人们又提格论、结构观、范畴论、泛函分析、代数模论、泛代数学等，它们都是从不同角度对数学研究进行统一或部分统一的理论。

2. 现代数学发展的统一趋势的表现

（1）传统数学分支的"前沿"理论的差异正在弱化以致于消失。例如代数学和几何学在以前是有较大差异的，无论就基本概念、基本方法，以及处理的问题方面都是如此，现代代数学和几何学理论却迅速地"融合"起来，象同调代数和拓扑学的同调群理论就有一些同样的概念

和方法；还有新的代数几何理论，已无法判定它究竟是代数学的一个分支还是几何学的一个分支。再如研究随机现象的统计数学和研究确定性现象的数学分支代数、几何、分析等日益结合起来，产生了一系列综合学科和边缘学科。在现代数学中，各分支的方法的综合运用更为常见。

（2）应用数学和纯数学的界限正在消失。实际上，这两者之间本来就没有明显的界限，在现代，它们就是一个整体。从应用发展起来的理论可以成为"纯"理论，例如图论的若干理论问题；纯数学的许多结果又得到应用，例如数论中因数分解的唯一性定理和探求大数的因数分解的纯理论问题在密码编制中得到应用。

（3）不同学科分支所研究的问题具有内在的统一性。从一个问题往往要由许多学科理论来解决就可以看出这一点。举例说明之。

①几何学上著名的"三大作图问题（倍立方问题、化圆为方问题、三等分已知角问题）"的解决不仅需要几何作图理论，而且需要代数的"域"和"扩域"理论以及关于超越数的理论等等。

②"四色问题（在一定条件下，把平面图上的不同区域用不用的色分开，只要四种颜色就够了）"的证明用到图论、组合论、拓扑学以及电子计算机证明的理论。

③代数学中关于"二次型"的研究，其最简单的例子就是二次齐次多项式

$$ax^2+bxy+cy^2,$$

其中重要的是系数之间的关系，通常可以把它看作一个对称方阵

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

还可以作为线性空间上的对称映射来考察，或作为二次曲面来研究，这时它又被看作二元函数了。

数学发展的统一趋势或数学的统一性的根据是什么？那就是，数学是人脑对现实世界的反映，而现实世界的本质就在于其物质统一性。作为对物质世界的一种反映形式的数学也一定是统一的。数学越发展，认识就越深刻，就越接近对现实世界的本质的认识，所以越显示出这种统一性来。

现代数学发展的特点（feature of mathematics development in modern times） 现时代是科学技术空前发展的时代，人们有时把当代科学技术的大发展称为新技术革命。科学技术上的重大变革必将推动社会生产力迅速发展，这将对数学提出更多、更高的要求，从而促进数学的飞跃发展。

人们普遍认为，现代科技发展（新技术革命）是以微电子技术为先导，以电子计算机科学为标志的。从电子计算机产生以来，数学家开始把信息作为自己的研究对象，电子计算机可以说就是一种信息处理机。在未来的信息时代里将起极其重要的作用。

电子计算机的研制和使用依赖于一定的数学理论，例如电子计算机的基本设计思想和使用方法都离

不开数学理论，进一步提高电子计算机的能力及开发新型计算机也离不开数学。因此电子计算机的广泛应用和迅速发展对现代数学的发展起着重大的推动作用。从电子计算机的功能看，也极大地促进了数学的发展，例如电子计算机提高了人们的计算能力，从而使计算方法成为一种一般科学方法；再如，利用电子计算机的高速判断能力，对许多问题的证明也极为有益，机器证明已成为一个独立的科学分支，为数学证明另辟新径，促进了数学方法的变革。在电子计算机的影响下，不仅使“计算数学”形成一门庞大的分支科学，使运筹学、统计数学及数学基础产生前所未有的发展，而且产生了“智能数学”等一大批新学科。在这种情况下，现时代的数学发展有这样一些趋势：

1. 数学与其他科学技术的关系日益密切。这一趋势就是指数学的应用日益广泛。长期以来，数学与自然科学，尤其是物理学的关系较为密切，以致于形成了“数理科学”这样一个概念。由于新技术的采用，新的科学领域的开拓，数学在其他科学和技术中的应用日益重要，不仅自然科学、工程技术、经济学、管理学等应用数学，而且历史、文学等学科领域也成功地应用了数学。

2. 数学出现数值化、算法化、离散化、组合化的势头。由于电子计算机的应用，使许多起源较早但在数学中地位一直不很显著的分支学科获得了直接的应用，从而得到了蓬勃的发展。例如微积分产生之后，对连续量的研究在数学中长期占有主要地位。但现在，以离散量为主要研究对象的许多数学领域，如组合数学、图论、数论、有限群论、数理逻辑等（它们被称为“离散数学”），有了长足的发展，在数学中的地位也越来越重要。这是因为数字型电子计算机（常用的通用机、微型机等都是数字型的）使用的是离散的信息，因而对离散数学的需要大大增加了。计算机的应用也提出了算法化、数值化的要求，而通过算法和数值方法，数学又有了新的发展。

3. 数学的基础和各分支将同时发展。历史上，人们最先研究的数学并不是其基础或分支学科，而是数学中最容易理解的部分，（见数学基础），作为数学基础的集合论和数理逻辑等都是在数学分支有了相当发展之后才发展起来的。现代科学技术的发展则要求数学基础和前沿分支学科的同步发展，因为现代科技发展所促进的数学应用范围的扩大反过来推动数学的发展，将促进研究各种问题的分支学科理论的建立，同时，微电子技术的采用，电子计算机特别是人工智能的研究又要求不断深入人类思维的本质，首先是数学的本质问题，这就涉及到广泛而深入的基础问题，因此促进了数学基础研究的发展。

4. 数学向更抽象的层次发展。电子计算机的采用，在相当的范围内，特别是费时费工的单调性工作如数值计算范围内，代替了人的脑力劳动，使人有可能集中精力研究更复杂、更抽象的问题。电子计算机还使十分复杂的问题的验证有了可

能,从而也促进了人向更加复杂、更加抽象的领域前进。现代数学正向“高维”、“多变量”、“非线性”的方向前进,即向更抽象的领域前进。

数 学 教 育

中国数学教育(**mathematics education in China**) 教育是培养人的一种社会现象,是向新一代人传递生产经验和社会生活经验的必要手段。数学知识是人类的极其重要的生产经验和社会生活经验的结晶之一,因而数学一经产生,数学教育也就产生了,并随着数学的发展而不断得到发展。

中国的数学教育萌芽于夏商时期,形成于西周时期。西周的教学科目正式规定为:礼乐射御书数,称为"六艺","数"即指数学知识。西周教育制度规定:"六年教之数与方名,……九年教之数日,十年出就外傅,居宿于外,学书记"(《礼记》)。这时的学校是由官府兴办的,政府设立负责教育的官员,由此奠定了中国古代的"官学制度",数学成为官学中的一门学科也由此得以确定,直到清代,颜元(17世纪)还极力主张"六艺"教育。西周时中国处于奴隶制时代,这时的教育无疑具有鲜明的阶级性:是培养奴隶主统治阶级的,首先是培养具有社会管理能力的各级官吏的,对他们来说,一定的数学知识是必要的。中国文明是一个农耕文明,治水等公共工程的领导实施无疑是官员的职责,由治水的需要在中国早早就形成了集中的王权,"王者必改正朔易服色,所以受命于天也",中国历代帝王都把颁布历法看作重要的政治行为,所以非常重视历法编算和天象观测(这也曲折地反映了农业生产的需要),因而天文学及与之密切相关的数学一直受到重视,成为官学的内容。治水等公共工程的管理也需要数学。所以把数学列入"六艺"。把数学作为一种"艺"(技艺)来传授,是中国古代非常独特的数学教育观念。西周数学教育的内容是"九数",按郑玄(东汉人)《周礼》注:"九数:方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足,旁要,今有重差、勾股",所指的都是社会生活中的应用领域或常用数学模型。它们对后世数学和数学教育的发展产生了重大的影响:使数学具有应用性特点,使数学教育以培养能应用数学解决实际问题的人才为目标。

春秋时期,中国开始向封建社会转化,与之有关的"礼崩乐坏",西周的教育制度维持不下去了,因而出现私学,孔子就是当时最著名的私学教育家。从此私学与封建社会相始终,作为官学的补充一直存在着,这是中国古代教育的一个特殊现象。私学与官学一样,也是为统治阶级培养统治人才的,因而与官学一样,私学也要有一定的数学教育。

秦汉时期,中国成为一个大一统的封建专制主义的国家,国家的统一促进了社会生产和社会生活的发展,从而促进了数学的发展和数学应用的发展。汉代《九章算术》经

过修订最终成书，标志着中国古代独特的数学体系的确立。社会生产和社会生活的需要又促进了数学教育的发展。《九章算术》就是当时的数学教科书。汉武帝起确立了“罢黜百家、独尊儒术”的文教方针，促进数学教育向“经世致用”方向发展。教育内容主要是儒家《五经》，与数学有密切的关系（尤以《易》的占筮和《春秋》的历法为著），因此经师讲经，要兼授数学。汉武帝元朔五年（公元前 124 年）创办太学，我国封建社会官立大学制度从此建立起来。太学以学经为主，平帝元始五年曾征知天文、历算、钟律教授者至京师，可见数学也是教学内容之一。从汉代起官学还产生了一个新的变种——“宦学事师”，即求学要入仕途，就教于官府，边仕边学为官之道。是一种“政教合一”的教学形式，尤其某些需要专业知识才能胜任的官府工作，更有必要这样做。于是对天文、生产管理、各种建筑财政部门来说，数学当然是宦学的内容之一。汉代私学也继续有发展。魏晋南北朝时期，数学有较大的发展、刘徽、赵爽是数学界的杰出代表。这一期间，由于战乱频仍，官学时废时兴，私学则有极大的发展，私学数学教育有较大发展，私学以经学为主，也兼授数学。这一时期成书的《五经算术》充分表明经师兼授数学的情况，该书是以数学为儒家经典作注的——解释儒家经典及其注中有关的数学知识，尤其涉及历法、音律的地方，实际上是授经的数学参考书，可见经师确实是兼授数学的。私学的一个变种是家学，子继父业是封建社会的普遍现象，数学也如此，在动乱时期更为明显，如大数学家祖冲之、其祖父、子、孙皆通数学、历算，可说是家学数学教育的结果。

589 年隋统一全国，数学教育发展到一个新的阶段。隋朝的国立中央大学（国子寺，607 年改名国子监）设“算学”，设博士（教官）2 人，助教 2 人，学生 80 人。这是世界上最早开设的数学专科学校。这意味着算学列为基本的国学之一，当时的数学专门化程度已得到社会的公认，具备了设立专科学校的需要。此举是数学教育史上的一件大事，具有世界历史性意义。唐代数学专科学校继续得到发展，并且对学生来源、学习年限、采用的教科书、考试方法及毕业生的出路等都作了具体的规定。特别是关于数学教科书的规定有深远的意义，唐初，唐高宗诏令太史令李淳风与算学博士梁述等人注释、出版《算经十书》，“书成，高宗令国学行用”，此举在数学教育史上也有极重要的地位：这是世界上第一次由国家颁行数学教科书。这十部书，后世成为经典的数学教材。算学生毕业考试合格，可直接参加科举，科举及第可授相应官职。与之相适应，唐代科举设“明算科”，考试数学，中式者授官。这种选官方式在世界上是十分独特的，在客观上反映了社会生活对数学的需要剧增，以致达到政府必须专门培养并选拔数学专门人材的程度。明算科的设立也反映出唐代统治者对数学的重视，这种重视也是没有先例的。明算科终唐之世没有停止过，据记载，后唐、后晋仍开过明算科，直到后晋天

福五年(940年)才正式废止。从唐初到五代,三百多年间一直有明算科举,每次要有若干举子参加数学考试,这对于数学教育和数学的发展都有极大的促进作用,与宋元时期我国数学发展高峰的形成有密切的关系。

除数学专科学校的数学教育外,中央各部门的宦学事师也是数学教育的重要途径,仅司天台的宦学生按例就有250名之多,他们多半要学习数学。隋唐私学的数学教育也有新的发展,如隋炀帝时的太史丞耿询就从高智宝学习天文算术;提出等间距二次插值法的刘焯亦是受业私学,本人又是私学大师。家学也有新发展,如唐太史令庾俭祖上五代皆精历算,李淳风祖上四代通历算,他就受业于家学。唐代科举贡生出自各地推荐,为参加明算考试,地方官学亦开设数学当是必然的,私学、家学数学教育的发展与明算开科亦有直接的关系。

宋代推行重视"兴学"的文教政策。中央官学继续开设数学专科学校,而且扩大编制、广招生员。虽然宋未开设"明算科"举人,但算学毕业考试合格可直接授官,学习数学的出路更好些,而且建立了严格的学校管理考试制度,颁置学田,解决学校经费来源,所以官学数学教育成就更大,应该说,它直接促进了宋元数学高峰的到来。宋代及辽、金、元初的私学数学教育亦很发达,一些著名数学家如李冶、杨辉等又同时是私学数学教育家。应特别指出的是杨辉,他不仅是一位著名数学家,而且是一位著名的数学教育家,他于1274年写出的《乘除通变本末》上卷卷首列有一个《习算纲目》是迄今为止人们所发现的最早的一份数学教学大纲。

元代中央官学里不设算学,元代统治者推崇理学,而理学认为搞除理学外的一切学问都是"玩物丧志"。元代科举以理学为主,使得学风为之改变。与此同时,宋元数学发展到相当高的程度,不进行系统学习就很难继承了。元代郭守敬等人编订的《授时历》(1280)精度较高,入明之后继续使用多年而无新问题产生。明代进一步尊经崇儒,以程朱理学为文教的指导思想,并实行文化专制,大兴文字狱。中央官学不设算学,地方官学取消试算。明代还采取了一个极端的措施:禁止民间私授历算,因而使与历法编算有关的许多数学内容不能作为私学的内容。为了保证天文历法的官府研制得以继续,并保证天文历算不传入民间,明朝规定:"(钦天监)监官毋得改他官,子孙毋得徒他业。"因此,钦天监宦学事师者全是属官子弟,其数学教育范围极小,加上270年未改历,所以主要不学数学。总之,元末明初,数学教育受到沉重打击,宋元时期得到的一系列重要数学成果,因无继承而出现中断,在西方数学传入之前,中国数学再也没有达到宋元时期的高度。明代中期以后,由于经济的发展,特别是商业贸易的发展促进了商业数学及珠算的发展。为适应经济发展的要求,民间数学教育、特别是商用数学和珠算的教育有空前的发展,相当广泛的儿童启蒙教育中就有了珠算的内容。

明末由于误差积累的作用,《授时历》(明改称《大统历》)出现较大的偏差,首先是"交食不验",因此要求改历,但由于中国古代数学的中断,已无人能编算新历法了。不得已,引入西方历算方法,即引入西方数学,在徐光启主持下,编订了《崇祯历书》,为此,大量引入西方数学,如翻译《几何原本》等,并进行了初步的西算教育。

清初继续进行了西算的引进和融汇贯通的工作,对数学教育比较重视,例如在中央官学之一八旗官学设立算学馆,后来又隶属国子监。教学内容增加西算知识,学生毕业全入钦天监。同时钦天监等的宦学事师亦有发展。此举在清初培养了一大批数学人才。清初也是私学数学教育空前发展的时期,当时的几乎所有的数学家都进行私学教育工作,以梅文鼎等人为最。清代中期,以乾嘉学派的数学教育(包括地方官学、书院和私学的数学教育)最为著名。他们深入研究了中国古代数学,并从事了中西贯通的工作。

1840年的鸦片战争,揭开了中国近代史的序幕,在近代,中国渐渐变为一个半封建半殖民地的社会。中国近代数学教育始于洋务运动,1862年,洋务派创办京师同文馆,1866年增设天文算学馆,1868年聘著名数学家李善兰为总教习,设代数、几何、三角、微积分等课程,这是中国系统开设西方高等数学课的开始。1898年,京师大学堂成立,这是中国近代第一所国立大学,1902年,京师同文馆并入京师大学堂。这一期间,开设了许多新式学校,多数都有一定的数学教育。1903年,清政府颁布癸卯学制,废除科举,兴办小学、中学,这在我国开始了近现代的初等数学教育。当时,小学设算术课,中学设数学课(授代数、几何、三角等)。为适应教学的需要,这一期间翻译、编译到大量数学教材,《代微积拾级》,《形学备旨》等就是有名的教材。

辛亥革命后,民国政府公布壬子癸丑学制(1912—1913),中小学设有数学课。1912年京师大学堂改名北京大学,首创数学门(相当于系),1919年改称数学系,这是中国第一个数学系。

1919年五四运动,中国步入现代。数学教育有新的发展。1922年公布壬戌学制,中小学都改为6年。小学学习算术,初中开设算术、代数、平面几何、高中设平面三角、高中几何、高中代数、平面解析几何。20年代前后许多大学开始设立数学系,如南开大学(1920)厦门大学(1926)、中山大学(1926)等,后来各综合大学和师范学院及设有理科的其他高校都开设了数学系。1931年清华大学开始培养数学研究生,后来浙江大学、中央大学、北京大学及后来的西南联合大学也陆续培养数学研究生。同时还派遣了一批数学留学生,并请外国数学家如奥斯古德、维纳、阿达马等来华讲学。

1949年中华人民共和国成立,中国人民的数学教育事业有了空前的大发展。中小学的数学教育进行了一系列的改革,学制小学6年,初高中各三年。初中逐步取消了算术课。50年代高中一度停设平面解析

几何，后又恢复并增设微积分初步及概率论和电子计算机的初步知识。80年代以来，我国的初等数学教育水平迅速提高，现已进入世界先进水平，其表现之一是近年来在国际数学奥林匹克竞赛中，中国的名次和获金牌数一直递增，1990年在北京举行的第31届国际数学奥林匹克竞赛中，中国队名次第一，获金牌数第一。高等学校的数学教育经过一系列的变革，也有了前所未有的大发展、大提高。现在，我国高等学校的数学教育专业齐全、层次合理。除基础数学、计算数学和应用数学三大专业外，许多大学还开校数理逻辑、控制理论、系统科学、信息科学、概率论与数理统计、运筹学、经济数学、数学教育等专业；许多工科院校开设应用数学专业。高等学校几乎所有的专业，都开设层次不同、程度不同的数学课。80年代，我国正式设立学位制，数学各专业都已培养硕士研究生，许多专业进而培养博士研究生。1983年我国第一批授予本国博士的18名研究生中，有12人获数学博士。70年代末以来，我国派出的数学留学生日多，还邀请许多国外数学家来华讲学；我国一些学校还为外国培养数学人才，我国数学家也有许多出国讲学的。我国的数学教育正在飞跃发展。

外国数学教育(**mathematics education abroad**)　数学教育是随数学的产生而产生又随数学的发展而发展的。在世界各文明古国的早期教育中就都包含了一定程度的数学教育，经几千年的发展，现代数学教育已成为每个人必须接受的教育之一，对人的发展、科技进步和社会发展都具有极其重要的意义。

古代数学教育。

古埃及的数学教育。埃及在公元前3500年就形成了奴隶制国家，经数千年的发展，于公元前525年为波斯所灭。古埃及是著名的文明古国，是人类科学的摇篮之一。几何学就是在埃及产生的，埃及的计算等数学知识也达到相当程度(见古埃及数学)。当时数学是由各方面——建筑、天文、管理——等的需要而发展的，为了培养有关方面的人才，数学教育是必不可少的。古埃及为培养皇室和贵族子弟设立了宫廷学校，其中就教授若干数学知识；政府部门设立职官学校来培养官吏，与数学有较密切关系的部门(如财政、水利机关)的职官学校要学习较多的数学；古埃及的寺庙学校(僧侣学校)和文士学校都有一定的数学教育课程。遗留至今的某些埃及纸草书就是当时的数学教科书。

美索不达米亚的数学教育。两河流域也是古代文明高度发展的地区，亚述在公元前3000年就建立了奴隶制国家，巴比伦则建于公元前18世纪。这一地区也是数学的发源地之一，有相当程度的数学知识(见美索不达米亚数学)。在这一地区的古代社会里，僧侣是具有较高文化修养的阶层，是由寺庙学校培养出来的；国家管理及内外贸易所需要的大批人才则由宫廷学校、政府机关办的学校和私人办的文士学校培养。所有这些学校都有程度不同的数学教育。留存至今的泥板书中，有

一些就是当时的数学教科书。当时的数学教学内容有乘法、倒数计算、帐目核算、物资分配、计算体积等等。

古代印度的数学教育。公元前10世纪恒河流域就形成了一些奴隶制国家,公元前7世纪印度产生了婆罗门教,公元前5世纪佛教兴起。古代印度宗教权威至高无上,教育和宗教有密切的关系,自然是以宗教教育为主的。开始主要是家庭教育,公元前4世纪孔雀王朝时期,出现了精通经义的文人在家中办的学校,儿童在校学习12年,除了读经、修行外,也要学习天文学、逻辑学、音韵学等内容,因而也学习一定的数学知识,此举促进了印度数学的发展(见印度数学)。当时教学采用了一些启发诱导的方法,老师还常选择年长儿童作助手,助手先学一步,然后去教其他儿童。此法18世纪传入欧洲,发展为著名的导生制。公元5世纪后期,学术讨论成为风气,在各种讨论中心尤其是寺院有许多学者主持讨论,众多青年前来听讲,这些地方逐渐成为学府,所讨论的有一定的数学内容,即学府中有一定的数学教育。6世纪后印度出现语法学校、天文学校等分科传授知识的学校,天文学校等就传授相当程度的数学知识。在佛教寺院中,高僧也要上通天文、下知地理,要有一定的历算及数学知识,佛教在传播过程中还促进了一些民族的数学交流,佛寺中也有一定范围一定程度的数学教育。

古希腊的数学教育。数学在古希腊发展为真正的科学,古希腊数学是现代数学的直接前驱(见古希腊数学)。古希腊人十分重视数学,许多哲学家认为数学是世界的本质,因而把数学教育提到重要的地位。古希腊形成了诸多的学派,它们也是教育组织,其中十分重要的是数学教育,如伊奥尼亚学派、毕达哥拉斯学派、智人学派等。“学派”教育是古希腊数学教育的一种独特形式。有时创办“学园”进行教育。古希腊的许多城邦国家也十分重视教育,以雅典的教育最发达,有许多学园,柏拉图的“阿卡德米”即为著名学园之一,对后世影响也最大。雅典是一个奴隶主民主制城邦国家,其教育目的是把统治阶级的子弟培养成为身心和谐发展的能履行公民职责的人,不仅要把他们训练成为身强力壮的军人,更要求把他们培养成具有文化修养和多种才能的政治家和商人以及专门研究自然的哲学家。因而雅典十分重视数学(世界的本质)教育。公元前6世纪到公元前4世纪就有如下内容:儿童7—14岁入文法学校学习读写和计算;13—15岁入体操学校学体育和谈话;16—18岁入体育馆学政治、哲学,哲学包括几何、算术、天文等;18—20岁可入学园进一步学习数学知识。古希腊的毕达哥拉斯最先把数学分为算术、音乐、天文、几何四大科,这是数学最早的分类,也是数学教育最早的分科课程。此举对西方后来的数学教育产生巨大的影响。公元前3世纪后,古希腊数学研究的中心移至埃及亚历山大,欧几里得的《几何原本》开始成为标准的数学教科书。公元529年,东罗马皇

帝查士丁尼下令关闭雅典的学园和其他学校，严禁传授数学，数学教育受到严重打击，希腊数学从此湮没无闻了。

古罗马的数学教育。古罗马7—12岁儿童入私立小学学习初步的读、写、算——简单的记数和计算知识，贵族则聘请家庭教师进行初等教育。然后贵族及其他富人儿童可进文法学校学习，以学文法为主，亦学少量实用的数学知识。高等教育的目的是培养演说家，称为修辞学校，也学习数学的四大科：几何、算术、天文和音乐。但内容多为实际测量和计算，不包括古希腊数学的各种高深内容。

西欧中世纪的数学教育。

公元476年，西罗马帝国灭亡，西欧逐渐进入封建社会，由此至文艺复兴，史称西欧中世纪。中世纪早期，对数学来说是一个"黑暗时代"。当时的教育具有明显的宗教性、封建等级性。恩格斯指出，"中世纪是从粗野的原始状态发展而来的。它把古代文明、古代哲学、政治和法律一扫而光，以便一切从头做起。它从没落了的古代世界承受下来的唯一事物就是基督教和一些残破不全而且失掉文明的城市。其结果正如一切原始发展阶段中的情形一样，僧侣们获得了知识教育的垄断地位，因而教育本身也渗透了神学的性质。"①因而中世纪初期文化教育几乎全为教会所垄断，当时水平较高的学校是僧院学校，高级的僧院学校也学四艺（算术、几何、天文、音乐），当然已完全渗透了宗教精神，例如几何学为了证明上帝的完美，算术则为了计算宗教节日等。对市俗教民的教育主要靠教区学校，只教简单的读写算知识，水平很低。世俗教育主要有宫廷教育和骑士教育，前者为培养文职官员，有少量的算术教学内容，后者根本不重视文化知识。数学教育的水平由古希腊急骤下降。

公元11世纪以后，西欧经济有了较大的发展、国际交往增多，由十字军远征接触到东方文化及古希腊文化，促进了文化的发展。原来的僧院学校已不能满足社会发展的需要，于是产生了中世纪的大学，到14世纪，欧洲已有大学80多所。大学的主要学习内容仍为神学，但13世纪起，文科大学开设"七艺"及亚里士多德逻辑学，数学成为必修课程之一，使数学教育得到一定程度的恢复和发展。12、13世纪，西欧城市还普遍开设了城市学校和行会学校，应用的计算知识都是这些学校教育的重要内容。这使得中世纪后期，数学教育有了一些新的发展。反映到课程中，"七艺"中的算术、几何等数学内容都有新的变化：算术由计算宗教节日而达到吸收阿拉伯记数法及一般运算内容；几何由只讲一般概念以用于神学目的发展为包括欧几里得几何学及一些测量知识等。

欧洲文艺复兴时期的数学教育。文艺复兴是一场伟大的反封建、反神学的思想解放运动。文艺复兴

① 《马克思恩格斯全集》，第7卷，第400页。

时期的主要教育思想是人文主义教育思想，强调以人为中心，强调通过教育使人类天赋的身心能力得到和谐发展。数学是人类知识和能力之一种，因而受到了重视。而对古希腊文化的复兴使古希腊人重视数学的思想再度风靡。文艺复兴时期数学的发展及数学的初步成功地应用也促进了数学教育的发展，大学里数学和自然科学课程普遍增加，由算术产生的代数以及由东方传入的三角学都成为重要的数学教学内容；当时人们对儿童的启蒙数学教育也给予相当的重视。文艺复兴时期数学教育的恢复和发展是16、17世纪数学大发展的重要促进因素之一。

17、18世纪的数学教育。

17世纪的英国资产阶级革命，是西方近代史的开端，1776年美国独立，18世纪末法国资产阶级革命是18世纪重大的国际事件，资本主义在欧美得到大发展并开始了向世界各地的殖民扩张，适应于资本主义生产的发展、建立起新的教育制度，夸美纽斯、洛克、卢梭的教育思想对数学教育起了巨大的促进作用。

这一时期，西欧各国各种层次的数学教育都有发展。例如法国中学广泛开设数学课，拉米的两部教科书《几何原理及测量》(1664)、《数学原理》(1692)一直使用到18世纪末。为培养工业人才而开办的工业学校采用了更加公理化的教材，如埃里冈《数学教程》(1637)。18世纪则采用了数学家贝祖的数学著作为教材，理论化的倾向更高了。德国1747年创建“经济数学实科学校”，这是具有现代意义的实科学校的先驱。对数学比较重视，同时普通中学也列入大量数学课程。许多数学家的著作，尤其欧拉的《当用代数全书》(1771)对当时的教科书起了重大影响。英国作为工业革命的故乡，数学教育发展较早较快，在19世纪达到相当高的程度，除大学的数学教育外，还开设了各种“计算学校”以学习当时急需的商业算术。

19世纪的数学教育。

19世纪是西方资本主义向帝国主义过渡的时期。资本主义经历了两次产业革命，生产规模日趋扩大和集中，金融资本逐渐支配工业资本从而发挥更大的作用。资本主义列强竞相输出资本，掠夺落后地区和国家，推行殖民政策。彼此间有着激烈的竞争。为在竞争中获胜，尤其是为适应高速发展的生产的需要，它们不得不重视劳动者的教育问题。经过无产阶级的教育斗争，19世纪，西方列强先后推行了义务教育制，数学是义务教育的主要学科之一，因而义务教育的推行极大地促进了数学教育的发展。19世纪，裴斯泰洛齐、赫尔巴特的数学教育思想起了重要的作用。由于科学技术的飞跃发展，大学的数学教育也有很快的发展。但是19世纪后半叶，在一些西方国家如英国等，数学教育一度处于停滞的状态，但同时，也酝酿着更大的改革和进步。

20世纪的数学教育。

19世纪末，资本主义进入帝国主义阶段，社会生产力和科学技术的急骤发展，迫切要求劳动者科学素质的提高。在这种情况下，首先是

在数学教育一度停滞的英国掀起了对 19 世纪数学教育的批判，同时，在德、法、美等国也响起改革数学教育的呼声。于是，20 世纪伊始就出现了国际性的数学教育改革运动。其代表人物为英国的培利和德国的克莱因。因此 20 世纪初的这一数学教育改革运动亦称为培利—克莱因数学教育改革运动。

培利 1901 年发表题为“数学的教学”的报告，提出从欧几里得的束缚中走出来，重视实验几何、几何应用，重视测量和计算的口号，并主张尽早开设微积分；培利还以《数学教育纲目》为题，进一步表述自己关于数学教育的创造性意见：他最先提出初等数学和高等数学的教学分类；他指出数学教学的思想教育意义；他主张让学生自己去思考、发现和解决问题；他特别强调结合实际学习数学即“实用数学”。培利的数学教育思想在国内外引起广泛的反响，并部分得到实施。克莱因的名著《中学数学教育讲义》(1907)和《高观点下的初等数学》(1908)是关于数学教育改革的重要著作，书中他提出以函数概念统一数学教学内容的思想，主张加强中学数学中函数和微积分的教学，充实代数内容，用变换的观点改革传统几何，把解析几何纳入中学教学内容。克莱因的数学教育改革思想和观点，对各国中学数学教育产生了深远的影响。此时，数学教育引起普遍的重视，1908 年成立了“国际数学教育委员会”。

20 世纪初的这场数学教育改革运动，得到数学界和数学教育界的广泛支持，取得一些积极的成果。但由于人们思想上的阻力和师资、理论等方面的困难，进展甚微，又遇到第一次世界大战，就被迫中断了。

第一次世界大战以后，经济的复苏和发展促进了西方各国学校教育的发展，现代工业的进程进一步提出延长义务教育年限的要求，战后西方各国的义务教育都延长至中学阶段，这使中等教育向社会各阶层群众开放。相应的产生了一些新的教育思想，其中最著名的是实用主义教育思潮，美国人杜威首先提出，其中心内容是注重儿童个人生活经验，因而出现各种活动课程；强调教学与社会活动的联系，形成一系列新的教学模式和方法。这一思潮的实施起到一些积极的作用，但学生无法形成系统的科学知识是一大问题。法国则提出统一数学内容的要求，1924 年法国教育部指出：“把科学的教养和人文的教养、几何学的精神与美的精神正确地统一和协调起来，才是现代的正确教育，才能满足提高全民素质的需要”。

十月社会主义革命开创了人类历史的新纪元，苏联在数学教育上也努力开辟新的天地，首先是使国民教育成为对全国公民的、免费的与宗教无关的普通义务教育，取消一切特权教育，实行男女同校，所有教育机构由政府管理等；其次，使学校成为教育与生产相结合、理论与实践相结合的新型学校。20—30 年代，苏联几次修订教育计划和课程，使苏联教育得以高速发展，后来苏联的科技迅速发展即奠基于此。

第二次世界大战后，以原子能

技术、航天技术和电子计算机技术为标志的新技术革命把世界历史推入现代。为了适应现代科学技术、现代社会发展和人自身发展的需要，现代数学教育具有两大发展趋势，一是现代化，二是普及化，它们也是今天数学教育改革的主要方向。

第二次世界大战后，数学教育上最主要的事件就是 50 年代末开始的国际性的数学教育现代化改革运动。

从 19 世纪末到二次大战结束，西方中学的数学教育尤其是数学课程的情况是比较稳定的：范氏大代数、查理斯密代数、霍尔奈特代数、温得华几何学等，大体上代表了这一时期的中学数学内容。50 年代，新技术革命发展的需要产生了变革数学课程的要求。一个重大的促进因素是 1957 年苏联成功地发射了第一颗人造地球卫星，它震动了整个西方，特别使美国人认为自己的大国地位受到了挑战，立即研究苏联人科技领先的原因。结果认为，美国科技落后的原因是教育落后，于是以立法的形式开始了教育现代化运动，其中重点之一就是数学教育的现代化。美国的数学家和数学教育工作者共同研究传统的数学教育，认为它有这样的弱点和缺点：观点落后、内容陈旧、体系零散、计算繁琐、方法单调、且与大学脱节。在这种认识的基础上，美国在全美数学协会和数学教师全美协会的资助下成立了“学校数学研究小组”(S. M. S. G)大力推进数学教育改革工作。这个小组主持编写了从幼儿园到大学预科的全套教材——新数学教科书，名为《统一的现代数学》(有中译本)。美国的数学教育现代化运动很快推进到欧洲，并波及全世界：英国成立“学校数学设计组(S. M. P)，编写出英国 SMP 数学教材(有中译本)，进行实验；1959 年欧洲共同市场国家在法国召开数学教育国际会议，把数学教育现代化运动推向高潮；1964 年，东南亚国家也召开了数学教育现代化国际会议；1967 年，苏联公布新的“数学教学大纲”，进入数学教育现代化运动的行列；1968、1969、1970 年日本先后修订了小学、初中、高中的数学教学大纲，编写了新教科书，开始推行数学教育现代化计划。这一运动主要表现为课程改革运动。各国新数学教材的共同特点为：结构化—统一化，公理化—抽象化、现代化—通俗化，几何代数化，电脑化—离散化，数学方法多样化，传统数学精简化等。

数学教育现代化运动，体现了数学教育适应社会变革、生产发展、科技进步的需要的方向，是数学教育发展的必然。但各国的改革实践中，由于过分强调结构化、抽象化、公理化、脱离了学生的认识水平和生活实际，教学内容过多过难，虽然也培养出一些数学尖子人才，但多数学生没学懂数学、成绩下降、计算能力低下，而且产生了著名的“学生负担过重”的问题。从另一个角度来讲，教学内容也严重脱离教师的实际，降低了教学效果。

对此，70 年代以来，各国都进行了反思和总结。美国新教材遭到各方面的反对，1972 年又重新编写

更符合教师、学生实际的教材；欧洲一些国家，提出“回到基础”的要求，重新编写教材；日本也于1978、1979公布了新的中学数学教学大纲，实行“留有余地”的数学教育。80年代以来，在深刻反思、精心研究的基础上，人们进一步认识到：数学教育的改革是时代的需要，数学教育的现代化是完全必要的；运用电子计算机改革中学数学教学是有远见的，增加联系生产、生活的内容是可取的改革方向之一；欧几里得几何学的改革，有待于进一步实验，但几何学的基本内容还是要学的；不能片面强调结构化、公理化和抽象化；要先实验再推广。当前的世界性的数学教育改革正是按这些认识进行的。

数学是中小学教育的主要内容之一，随着现代教育的发展，义务教育的年限更加延长，在许多国家里，数学成为每个公民都必须学习的学科，这使数学教育得以空前的普及。现代数学教育普及化的另一个表现是数学不仅成为高校传统的自然科学专业的必修课，而且成为大多数人文科学专业的必修课，在高校中，接受数学教育的人越来越多。终身教育的发展是现代教育的另一成果，终身教育的内容之一亦是数学，即数学教育一般地普及到许多年龄层次。数学教育普及化的另一个重要表现是数学教育的国际化；一是数学教育人员的留学和互访增多，二是成立了专门的国际数学教育机构。50年代欧洲各国共同组织了“研究改善数学教育的国际委员会”，先后多次招开会议研究数学教育的问题；60年代末，“国际数学教育委员会”(I. C. M. I)组织了每4年召开一次的国际数学教育大会(ICME)。1969年在法国里昂召开第一届大会，有42个国家的850人参加了大会；第二届国际数学教育大会1972年在英国埃克塞特召开；第三届大会1976年于德国卡尔斯鲁厄召开；第四届大会1980年在美国伯克利召开，中国第一次派代表参加了大会；第五届大会1984年在澳大利亚阿德莱德召开；第六届大会在1988年于匈牙利的布达佩斯召开。国际数学教育委员会及联合国教科文组织还经常召开地区性国际数学教育会议。它们有力地促进了数学教育的发展。

数 学 符 号

数学符号(mathematical signs and symbols) 在数学文献中用以表示数学概念、数学关系等的符号和记号。

数学符号是与数学同时产生的,数学中最早产生的概念是自然数概念,最早出现的数学符号则是数字符号。在所有已使用了文字的古代民族中都“发明”了数字记号,如古埃及人、巴比伦人、古希腊人、古中国人等(见记数法条的“数字符号表”)。自然数概念的完善依赖于算术运算,在许多古代文明中很早就产生了算术运算及相应的符号,古代文明中一般用表意文字(古埃及、巴比伦等)或不用符号而把两数并列(古希腊、古印度)表示加和乘,用特殊的符号表示减。中国古代由于依赖于算筹计算,所以不采用任何表示运算的符号(见筹算),必要时直接用文字叙述。

另一个最早产生的数学概念是几何图形。最初在研究几何图形时没采用特有的数学符号,公元 2 世纪起,古希腊的一些数学家开始采用表示几何图形(如三角形、四边形、圆等)和几何关系(如平行、垂直等)的符号,它们多以“象形”的方式构成(见初等几何符号)。

古代数学由于涉及的概念较少,关系比较简单,所以除数字符号外,不是非用符号不可的,所以采用符号是个别的甚至例外的事。欧几里得《几何原本》就没采用数学符号,10—12 世纪的阿拉伯数学也以文字叙述为主。

15—16 世纪,数学有了突飞猛进的发展:数学概念不断增多,数学关系日益复杂化。例如,人们的数的概念扩张到复数,指数、对数、方程等都有了长足的发展。由于概念的增多和关系的复杂化,依赖自然语言已无法精确地表述出数学概念和数学关系,必须建立精确的科学语言,否则将影响数学的进一步发展。数学发展的需要化为数学家创建数学符号的努力。在 16—17 世纪间,产生了系统的数学符号,韦达、奥特雷德、莱布尼茨等人在创立数学符号方面做了大量基础性的工作。17 世纪,数学已基本上符号化了,这是数学发展史上的一个飞跃,从此,数学概念和数学关系就表现出十分精确的性质,便于逻辑处理和计算,在符号化的基础上,数学迎来了近代的大发展。

考察数学符号的形成,有这样几种情况:(1)采用表意符号,如“+”、“−”、“×”、“÷”“=”及开方、乘方等符号;(2)采用象形符号,如初等几何符号;(3)采用表述数学概念的拉丁语词的简化和缩写,如三角函数符号,一般函数符号 f,极限符号、微分积分符号等;(4)某些特定的符号,如 π、e、$\frac{o}{o}$、角度符号等。

近现代数学的发展则保持了这样一个特点：在引入一种新的数学概念和数学关系的同时，也引入表示它们的符号。现代数学更进一步，还把数学中所需要的一部分逻辑形式化，用符号表示出来，即所谓“符号逻辑”或数理逻辑，关于符号的应用成为专门的学问。

加号和减号（**Signs for addition and subtraction**）　加和减是人类最早掌握的两种数学运算，人类最古老的文字记载中就有了加减运算。古埃及阿默斯纸草书中就有了加号和减号，加号是向右走的两只腿“𓂻”，减号是向左去的两只腿“𓂽”，但在莫斯科纸草书中，后者表示“平方”，见指数符号。古希腊的丢番图把两数并列表示相加，偶而也用一斜线“/”为加号，用一曲线“ↄ”为减号。古印度人一般不用加号，只是在巴赫沙里（Bakhshali）残简（公元3世纪）中用“yu”表加而用“＋”表示减。中国古代由于注重于利用工具计算，运算是在算筹或算盘上进行的，只记录其结果，所以一般的，没有采用数学符号，记录时用文字表述运算。15世纪阿拉伯人盖拉萨迪用两数并列表示加而用一个特殊符号 γ_s 作减号。

法国人许凯（1484）、意大利人帕乔利（1494）及16世纪大多数数学家都用 p̃ 或 p 作加号，用 m̃ 或 m 作减号，源于拉丁语词 plus（加）和 minus（减）的第一个字母。

最早使用现代的加号“＋”和减号“－”的是15世纪后20年的德国人。在德累斯顿（Dresden，德国城市）图书馆保存的手稿卷 C·80（1486）中有这两个符号：

1&＋2 ℨ　10—1 ℨ

分别表示现代的 x^3+2x^2 和 $10-x$ 的意思，正式使用了“＋”、“－”符号。最早在印刷的书中使用加号“＋”和减号“－”的是捷克人维德曼（1489）。意大利人由15世纪末直至整个16世纪都仍用 p̃ 及 m̃ 作为加减号。1608年德国人克拉维乌斯在罗马出版的《代数》一书中使用了“＋”“－”号，意大利人才开始使用，到卡瓦列里的时代已很纯熟了，英国是雷科德首先使用（1557）这两个符号的，荷兰则在1637年由胡克引入了这两个符号，同时也传往欧洲大陆其他国家，逐渐流行于全世界。

乘号（**Signs of multiplication**）　乘法也是最早产生的运算之一，人类最早的文字记载中就有了乘法运算。

中国古人不用乘号。古希腊的丢番图也不用乘号——他把两数并列表相乘（与加法同）。在印度巴赫沙里残简中，把数排成

$$\begin{vmatrix} 5 & 32 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{phalaṁ} \quad 20$$

表示 $\frac{5}{8}\times 32=20$，排成

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3+ & 3+ & 3+ \end{matrix}$$

表示 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$。

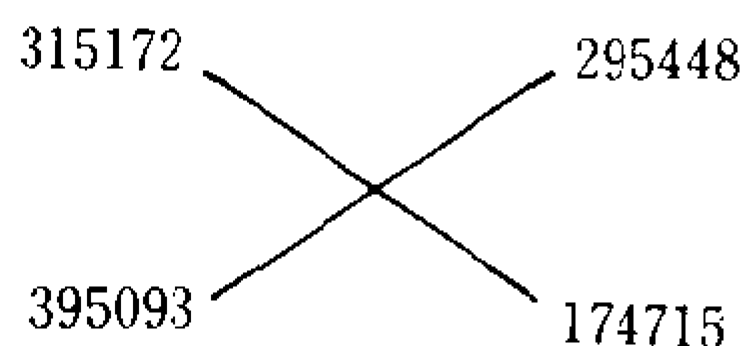
施蒂费尔在1545年出版的一本算术书中用大写字母 M 表示乘而用大写字母 D 表示除。斯蒂文在1634年出的书上也用了这种符号，他用

3①M sec① M ter②

表示现在的 $3xyz^2$ 的意思，这里的 ser 和 ter 分别表示第二、第三个未知数。

韦达(1591)把 A 与 B 的乘积记为“AinB”。15 世纪的一些手稿和印刷品中还有以并列表相乘的，如 $6x, 5x^2$ 等，但必须有字母才行，因为 $5\frac{1}{2}$ 表示 $5+\frac{1}{2}$ 并非是 $5\times\frac{1}{2}$，这种记法一直用到现在。

“×”号西方称为圣安德鲁斜十字(St. Andrew's cross)，这个名称与数学毫无关系①。在 16 世纪出的一些数学书中就有应用，但开始并不



是现代用法，而是以表示现代 315172 × 174715 和 395095 × 295448 两个乘法，即用“×”表示两个独立的乘法运算。

1631 年奥特雷德在其著作《数学之钥》(clavis mathematicae)中第一次用“×”表两数相乘，即现代乘号的意义，后来逐渐流行，直到现在。1698 年莱布尼茨在给 J·伯努利的一封信(7 月 29 日)中提出用圆点“.”表示乘法，以避免“×”号与字母“X”相混淆的情况。以后用“.”表乘法的用法也相当流行，现今欧洲大陆派(德、法、苏等国)规定用“.”作乘号。其他国家则用“×”为乘号，用“.”作小数点。我国规定，用“×”和“.”作乘号都可以，一般在字母前或括号前乘号可略去。

除号(**Signs for division**) 施蒂费尔在其 1544 年出的书《整数算术》(Arithmetica integra)中用一个或一对括号作除号，用

8)24 或 8)24(表示 24÷8

奥特雷德用

$a)b(c$ 表示 $b\div a=c$

J·马洪(1701)用 $D)A+B-C$ 表示 $(A+B-C)\div D$。1545 年，施蒂费尔又改用大写德文字母 D 表示除，后来的斯蒂文也用了这种方法，他用

5②Dsec①Mter②

表示 $\frac{5x^2}{y}\cdot z^2$。戈里马德(1751 年)则用反写的字母ɑ表示除，如

12 ɑ 4＝3 及 a^2b^2 ɑ a^2

1790 年出版的昆尼亚的书《数学原理》中用平放的小写字母ᴜ表示除。

现代用的除号“÷”称为雷恩记号(Rahn's notation)，是瑞士人 J·H·雷恩在 1659 年出版的一本代数书中作为除号引用的。1668 年，他的这本书译成英文出版，这个记号得以流行起来，直到现代。

1666 年，莱布尼茨在他的一篇论文《组合的艺术》“Dissertatio de arte combinatoria”中首次用冒号“:”作为除号，后来也渐通用，至今亦有使用的。

等号(**Signs of equality**) 相等是数学中最重要的关系之一。等号的产生与方程有关，萌芽时期的数学就有关于方程的记载，因而也就有表示相等关系的方法。

中国古代早就有“方程”的概

① 安德鲁是耶稣的 12 门徒之一，传说他被钉在斜十字架上处死，所以斜十字称为圣安德鲁斜十字。

念，但方程是用"列表"，即算筹布列的方法解的，因此不用等号，书写时用汉字，"等"或"等于"表示之。阿默斯纸草书中用"[illegible]"表示相等；丢番图则用"[illegible]"或有时用"ч"为等号；巴赫沙里残简中用相当于 *pha* 的字母为等号；15世纪阿拉伯人盖拉萨迪用"[illegible]"表示相等；雷格蒙塔努斯则用水平的破折号"——"为等号，如

1 [illegible] et 3 [illegible] —30 表 $x^2+3x=20$

帕乔利也用破折号作等号，但长些且记在数字之下，如

1. co. m̃. 1. ce. de. [illegible] ——— 36 表 $x^2-y^2=36$

现代用的等号"="叫雷科德符号（Recorde's sign），是雷科德在1557年出版的一本书《砺智石》中第一次作为等号使用的。但其推广十分缓慢，后来的著名人物如开普勒、伽里略、费马等人一直用文字或缩写语如 aequals，aeqantar，ae，esgale，等表示相等，笛卡儿在1637年还利用"="表现代"±"号的意义，而用"∞"作等号。直到17世纪晚期，用"="作等号才为人们所接受，逐渐得到通用。

"大于"和"小于"号（**signs for "greater" and "less"**） 现在通用的"大于"号>和"小于"号<都是英国人哈里奥特于1631年开始采用的。但当时并没有为数学界所接受。直到100多年后，才逐渐成为标准的应用符号。

沃利斯在1655年曾用⋝表示"等于或大于"，1670年他又写为⋝（等于或大于）及⋜（等于或小于）。现在常用的符号≧和≦符号，据哥德巴赫在1734年1月写给欧拉的一封信中所述，是一个法国人P·布盖（1698—1758）首先采用的。后来渐流行。

符号≪（远小于）和≫（远大于）是庞加莱和波莱尔于1901年引入的，很快就为数学界接受了。现在也这样用。

归并符号（**Sings of aggregation**） 归并符号，是指示运算顺序的符号，某几项先归并——先进行指定的运算，现在用括号表示之。

最初是用字母表示归并。较简单的四则运算顺序还算好处理，进行根式运算时顺序符号就是不可缺少的了，也就是在根式符号产生之时，出现了各种归并符号。帕乔利在1494年创用字母V（vniversale，全体）来表示顺序，他用

$$\text{R}\!\!\!\!\text{/}\,\text{V}.\,\text{R}\!\!\!\!\text{/}.\,20\frac{1}{4}.\,\tilde{\text{m}}.\,\frac{1}{2}$$

表示现在$\sqrt{\sqrt{20\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}$之意。卡尔达诺在1545年也用此字母，不过用大写的，他用

R. V. 10. P. **R**. 16. P. 3. P. **R**. 64

表示现在$\sqrt{10+\sqrt{16}+3+\sqrt{64}}$之意。鲁多尔夫用字母组合 collect（词，集合）表示此意，他用

√des collects17+√208

表示$\sqrt{17+\sqrt{208}}$。斯蒂文、韦达等人还用过 bin 或 bino 或 trinom 等表示运算顺序。1685年沃利斯用

$\sqrt{}$b：2+$\sqrt{}$3，$\sqrt{}$r：2−$\sqrt{}$3，$\sqrt{}$u：2±$\sqrt{}$3 等

表示 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$，$\sqrt{2-\sqrt{3}}$，$\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$ 之意，其中 b 表示 binonial(组合)，u 表 universal(共同)，r 表 residual(剩余)。

另一种较早的表示归并的方法是利用横线，最早是许凯(1484)应用的，他用

$\overline{R^2_x.\ 14.\ \bar{p}.\ R^2_x.\ 180}$. est. 3. p̄. $R^2_x 5$

表示$\sqrt{14+\sqrt{180}}=3+\sqrt{5}$。邦贝利(1550)用了横线加方括号表示归并：

R³〔$\overline{\text{2. P. R〔om̃121}}$〕〕

表示 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$。斯霍滕于1646年把横线写到要结合的内容之上

$B_{in}\overline{D_{quad.}+B_{in}D}$

表示 $B(D^2+BD)$。1676 年牛顿用

$\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}$

表示$(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$，后来又用

$\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0$

表示$\{[(y-4)y-5]y-12\}y+17=0$。

还有用点表示归并的。如施蒂费尔在1544年用

$\sqrt{}$2. 12+$\sqrt{}$2. 6+$\sqrt{}$2. 12−$\sqrt{}$2. 6

表示$\sqrt{12+\sqrt{6}}+\sqrt{12-\sqrt{6}}$。1605 年迪布阿第乌斯用

$\sqrt{}$. 2 −$\sqrt{}$. 2 +$\sqrt{}$. 2 +$\sqrt{}$. 2 +$\sqrt{}$. 2+$\sqrt{}$. 2

表示半径为 1 的圆的内接正 128 边形的边长，即

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$$

1631 年奥特雷德用

$\sqrt{}$q：BC_q-BA_q：

表示$\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{BA}^2}$，用了加双点表归并。沃利斯等人也用过这种记号。斯蒂费尔、奥特雷德等人还用过逗号表示归并，莱布尼茨也用过，如，莱布尼茨在 1709 年，用

$c-b,d-b,l$

表示$(c-b)(d-c)l$ 而用

$(m,：m-1)x^{m-1,：m}$

表示$[m\div(m-1)]x^{(m-1)\div m}$。

最早使用圆括号"()"表示归并的是施蒂费尔，但他的手稿没有出版，最早在数学书中使用圆括号表示如现代意义的是克拉维乌斯(1608)，他用

$\sqrt{}z(\sqrt{}z15+\sqrt{}z12)-\sqrt{}z(\sqrt{}z15-\sqrt{}z12)$

表示

$$\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{12}}-\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{12}}。$$

1951 年德国人埃皮努斯用两种圆括号表示不同的归并，欧拉也这样用。而约翰·伯努利用圆括号和方括号来表示不同的归并，18 世纪其他数学家如达朗贝尔和拉格朗日等人也开始这样用，渐渐发展为现代形式。

分数符号(**Signs of common fractions**) 分数产生于测量过程，它被看作是整体或一个单位的一部分。当然它也产生于计算过程，两数(整数)相除，除不尽时就得到

分数。

分数的产生很早，各文明古国的文化中都有关于分数的知识，古埃及人已有分数记号，巴比伦数字中也有了分数记号。古希腊人用 L'' 表示$\frac{1}{2}$，因此按希腊记数法

$$\alpha L''=1\frac{1}{2},\beta L''=2\frac{1}{2},$$

$$\gamma L''=3\frac{1}{3}$$

在数字的右上角加一撇点“′”，表示该数分之一，如

$$\kappa\gamma'=\frac{1}{23};\lambda\beta'=\frac{1}{\lambda\beta}=\frac{1}{32}$$

后来又以分子加一撇点，分母加两撇点，分母可写一次或两次来表示分数，如

$$L\gamma'\kappa\theta''\kappa\theta''=L\gamma'\quad\kappa\theta''=\frac{13}{19}$$

我国古代也很早就采用了分数，《九章算术》中就系统地讨论了分数及其运算，这是世界上最早的分数研究。(《九章算术》“方田”章“大广田术”说：“分母各乘其余，分子从之。”正式给出分母和分子概念)。中国古代的分数记法有两种，一种是汉字记法，与现代汉字记法相同：“…分之…”；另一种是筹算记

商		𝍮	𝍣	64
实		𝍫	𝍧	38
法	𝍣	𝍰	𝍢	483

法，用算筹作除法时，“实”(被除数)列在中间，“法”(除数)在下，“商”在上，除到最后，中间的实可能还有余数，如图表示分数 $64\frac{38}{483}$，中国人在公元3世纪就用了这种记法。古印度人的记法与此有相似之处，如：

$$\begin{matrix}1\\3\end{matrix}=\frac{1}{3},\begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix}=1\frac{1}{3}$$

最早使用分数线的是阿拉伯人海塞尔(12世纪)，他用

$$\cfrac{2+\cfrac{3+\cfrac{3}{5}}{8}}{9}$$

表示$\frac{332}{589}$。欧洲最早是斐波那契引入了分数线。15世纪以后，欧洲逐渐形成现代分数算法，德国人鲁多尔夫在1530年计算$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$时，记为

$$\frac{\begin{matrix}8 & 9\end{matrix}}{\begin{matrix}\frac{2}{3} & \frac{3}{4}\end{matrix}}\Big/12\quad 得\frac{17}{12}$$

后来渐渐采用了现在的分数形式。

1845年德摩根在其一篇文章“函数计算”(The Calculus of Functions)提出用斜线“/”表示分数线，分数$\frac{a}{b}$记为 a/b 以利于印刷排版，现在的印刷书籍中也有采用这种分数符号的。

小数符号(**Signs of decimal fractions**) 最早使用小数的是中国人，3世纪刘徽在注《九章算术》时就指出，开方不尽时，可用十进分数(小数)来表示。元朝刘瑾(1300年左右)著《律吕成书》，其中记现在的106368.6312为把小数部分降低一行，可以说是世界上最早的小数表示法。

中国之外较早使用小数的是阿拉伯人卡西，他用十进分数(小数)

| ☐ ⊥ ||| ⊥ ⫪

十 万 千 百 十 忽 ⊥ ||| 一 ||

千 百 十 分

给出了π的有17位有效数字的值。

在欧洲，比利时人斯蒂文于1585年第一次明确地阐述了小数的理论，他把32.57记为

⓪ ① ②

3 2 5 7 或 32⓪5①7②

1492年法国人佩洛斯在他出版的算术书中首次用点“.”表示小数，但他的意思是作除法时，如果除数是10的倍数，例如123456÷600，先将末两位数用点分开然后除以6，即1234.56÷6，是为了除法的方便，但确有小数之意。

明确用“.”如现代这样表示小数的第一个人是克拉维乌斯，1593年他在自己的数学著作中用46.5表示$46\frac{1}{2}=46\frac{5}{10}$。从此用“.”表小数就为人们所接受，但具体用法还有很大的不同，如1603年拜尔用$879\overset{v}{8}$表示现在记为8.00798的数，用$14.376\overset{viii}{1}$表示14.00003761的数，用$12\overset{0}{3}.\overset{i}{4}.\overset{ii}{5}.\overset{iii}{9}.\overset{iv}{8}.\overset{v}{7}.\overset{vi}{2}$或$12\overset{0}{3}.45\overset{iii}{9}.87\overset{vi}{2}$表示123.459872。

1617年J·纳皮尔更明确地采用了现代小数符号，如以25.803表示$25\frac{803}{1000}$。以后这种用法日益普遍。

1657年，荷兰人斯霍滕明确地用“,”(逗号)作小数点，他记58.5为58,5①，记638.32为638,32②。后来去掉后面的位数表示①、②等，也逐渐通用。其他用法也一直有用的。直到19世纪末，还有用2’5，2°5，2‘5，2 ⌊5，2▲5，2.5，2,5等来表示2.5的。

现代小数点的使用大体分为两大派，欧洲大陆派(德、法、苏等国)用逗号作小数点，圆点“.”用作乘法记号。英美派小数点用圆点“.”，逗号用来作分节号(每三位一节)。大陆派不用分节号。我国使用英美派记法，但近年来，记数不用分节号了。

零号(Signs for zero) 零是位值(place value)制记数法的产物。现在我们使用的印度-阿拉伯数字就用10进位值制记数法，这种记数法对零的需要是显然的，没有零号就无法表示出如203，2300这样的数。

中国古人在世界上最早采用了10进位值制记数法，但是长期没有采用专门的零号，他们是怎样表示203、2300这样的数呢？首先由于中国语言文字的特点，除了个位数字外，还有表示数位的十、百、千、万等，因而说成二百三(三前常加“有”)、二千三百，意义是十分准确的；有时也说“二百零三”但这个“零”是“零头”之意，就更不会误会了。其次，由于中国古代很早(不晚

于公元前5世纪)就普遍采用算筹作基本的计算工具,算筹的使用是中国古代数学的一大特点(见中国数学),筹算中用算筹排布的数字(筹算数字)是数学著述中常用的数字,在筹算数字中以空位表示现在“0”的意思,由于中国字一字一音,一字一格,从一到九的数字则是一数一字,因此书写时一格一数,即一格一位,空一格为有一个零,二格有二个零,十分明确无误。中国书写习惯不用抬头也不用标点符号,空格即为“零”(当然与数字有关的空格如此)。中国古书中,缺字一般用一方块□表示,数字中的空格后来也用□表示,在书写时,字体常用行书,方块就画成圆圈了,于是数字中以○表示零,就逐渐成了定例,这种记法最早在金《大明历》(1180)中采用,如“四百○三”表示403。后渐通用。

中国古代的零是圆圈○,不同于现代的扁圆的0。最早采用这种扁圆0号的是古希腊的托勒密,由于古希腊数字是无位值制的,所以对零的需要并不迫切,但当时使用的角度是用60进位值制的(源于巴比伦人,现代仍如此),他在书写角度时明确使用小圈0表示空位,如用$\overline{\mu\alpha}\ o\ \overline{\iota\eta}$记$41^{\circ}0'18''$。后来印度人的“0”号,可能是受到他的影响。

印度也早就采用了10进位值制记数法,他们最初也用空格来表示空位,如用3　7表示307,后来为了避免看不清楚,就用小点表示空位,307记为3.7。最早采用小圈0表示数字中的零是在瓜廖尔(Gwalior,印度城市)地方的一个石碑上发现的,形状与现在很相似,时间为公元876年。印度人第一个把零当作数来使用。后来,印度数字传入阿拉伯世界,经过他们的发展形成了著名的印度-阿拉伯数字。1202年经由斐波那契把这种数字(包括0)传入欧洲,逐渐流行于全世界。

13世纪,印度-阿拉伯数字传到我国,但由于中国数字的上述特点,对它们并没表现出特殊的兴趣,又由于书写习惯不同(中国竖写,阿拉伯文横写),没有在中国得到应用。后来中国算盘兴起,筹算数字渐渐废止不用,“○”却保存下来了,一直有应用,至今在文字中写“中国数字”时仍用它。印度-阿拉伯数字(包括0)在中国的普遍使用是本世纪的事了。

其他古代民族对零的认识和零的符号表示也做出了一定的贡献。如巴比伦人早就采用了60进位值制记数法,他们在公元前2世纪采用了表示空位的零号



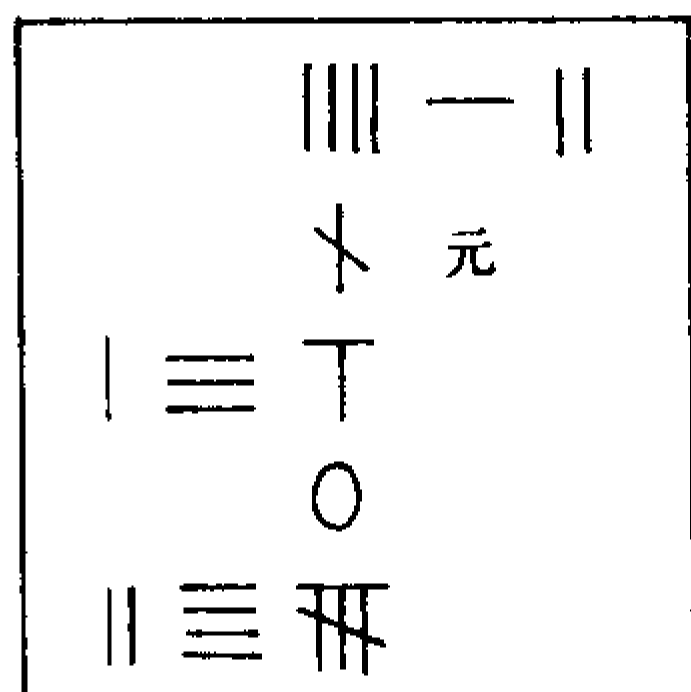
美洲玛雅人曾创立了灿烂的文化,他们于公元前后创立了20进位值制记数法,其中用



表示零。

负数符号(**Signs for negative numbers**)　最先认识并应用负数的是中国古代数学家,《九章算术》就有负数及其运算法则。在筹算时,用红筹表示正数、黑筹表示负数。因用笔记录时换色不便,12世纪李冶首创在数字上加斜画表示负数,如

图 1 所示。



表示 $4.12x^2-x+136-248x^{-2}$，这可以说是世界上最早的负数记号。

西方对负数的认识较晚，15 世纪后才正式应用负数，使用的符号也是多种多样的，例如威尔金斯 1800 年用 $\bar{a}.v.$ 表示 $-a$；温特费尔德 1809 年用前加“⊣”或“┐”表示该数为负数，W. 波尔约在 1832 年用“⟼”表负数。后来亦有多种形式表负数，如 $\rightarrow a$ 表负数，相应的 $\leftarrow a$ 为正数；以 $\hat{a}$ 为负而 $\dot{a}$ 为正；a_n 为负而 a_r 为正。直到本世纪初，亨廷顿开始采用接近现在形式的符号：$-3,-2,-1,0,+1,+2,+3$，逐渐成为现在的形式。

虚数符号(**Symbols for imaginaries**)　最先考察负数开平方运算的是许凯。1484 年，他在解方程 $4+x^2=3x$ 时得到 $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}$(用现代符号表示他的成果)，由于 $2\frac{1}{4}-4$ 是负数，他认为不可能得到方程的解。

第一个对负数开方运算进行研究并得到虚数及其初步运算方法的是卡尔达诺，1545 年，在他的著作《大术》中，记载了如下的乘法运算：

$$\begin{array}{r} 5p:\mathrm{R\!\!\!\!/}\ m:15 \\ 5m:\mathrm{R\!\!\!\!/}\ m:15 \\ \hline 25m:m:15\tilde{q}d\ est\quad 40 \end{array}$$

即

$$\begin{array}{l} 5+\sqrt{-15} \\ 5-\sqrt{-15} \\ \hline 25-(-15)=40 \end{array}$$

其中℞相当于根号，m 是减(即负)，℞m:15 表示 $\sqrt{-15}$，这是最早的虚数表示法。他称负数的平方根为“诡辩量”，并且怀疑这种数的运算的合理性。因而，卡尔达诺称正数的根为真实的(real)根，而负数的根为虚构的(fictitious)根。实和虚的用法和现代不同。

1637 年，笛卡儿在他的《几何学》一书中第一次给出虚数的名称“imaginaires”(虚的)，和“reelles”(实的)相对。

1777 年，欧拉在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中首次使用 i 来表示 $\sqrt{-1}$，但很少有人注意它。直到 1801 年，高斯系统地使用了这个符号，以后渐渐流行至今。

绝对值符号(**Signs for absolute value**)　现在通用的绝对值符号“| |”是 1841 年外尔斯特拉斯首先引用的，后来为人们所接受。在实数范围内

$$|a|=\begin{cases} a, a\geqslant 0, \\ -a, a<0。\end{cases}$$

后来(1905 年)甘斯用这个符号来表示向量的长度 $|\vec{R}|$，有时把这个长度也就叫做绝对值。外尔斯特拉斯就已指出，复数的绝对值是它的“模”，用向量解释复数，“模”、“绝对值”、“长度”都是一致的。可见

甘斯符号的合理性，因而也一直用到现在。

阶乘符号(Signs for factorial)

欧拉在 1751 年用大写字母 M 表示 m 阶乘

$$M=1.2.3\cdots\cdot m$$

鲁非尼在自己 1799 年出版的方程论著述中，用小写字母 π 表示 m 阶乘，高斯则用 $\Pi(n)$ 表示 n 阶乘(1813)。用符号 $\underline{|n}$ 表示 n 阶乘的方法起源于英国，尚不能确定何人为创始者，1827 年，由雅莱特的建议得到流行，现代有时亦用此阶乘符号。

现在通用的阶乘符号 $n!$ 最先是克拉姆提出来的(1808)，后经欧姆等人的提倡而流行起来。

排列组合符号(Signs for permutations and combinations)

旺德蒙德于 1772 年采用 $[n]^p$ 表示从 n 个不同的元素中每次取出 p 个的排列数。欧拉则在 1771 年用 $[\frac{n}{p}]$，1778 年用 $(\frac{n}{p})$ 表示从 n 个不同元素中每次取出 p 个元素的组合数，1827 年，埃汀肖森引入了 $\binom{n}{p}$ 来表示同样的意义，这个组合符号直用至今。

1830 年，皮科克引入 Cr 表示 n 个元素中每次取 r 个元素的组合数；1869 年或稍早一点，剑桥的古德文用 nPr 表示从 n 个元素中每次取出 r 个元素的排列数，这个用法也延用至今。按此方法，用 nPn 就相当于现代的 $n!$。

1880 年鲍茨用 ${}^nCr$ 和 ${}^nPr$ 分别表示从 n 个元素中每次取出 r 个的组合数和排列数；1886 年，惠特渥斯用 C_r^n 和 P_r^n 表示同样的意义，他还用 R_r^n 表示可重复的组合数。1899 年，克里斯托尔用 nPr，nCr 分别表示从 n 个不同元素中每次取出 r 个元素(不重复)的排列数和组合数，用 nHr 表示同样意义下可重复的排列数，这三种符号都通用到现在。

1904 年，内托为一本百科辞典写的辞条中，采用 A_r^n 表示上述 nPr 的意义，采用 C_r^n 表示上述 nCr 的意义，后者同时也用了 $\binom{n}{r}$。这些符号也一直用到现代。

指数符号(Signs of powers)

我国古代数学家刘徽在《九章算术注》(263 年)中使用了“幂”字，一直用到现在。一数自乘，我国古代称为“方”，“乘方”一语是宋代以后开始使用的。一个数的乘方指数在我国古代是用这个数在筹算(或记录筹算的图表)中的位置来确定的，某个位置上的数要自乘多少次是固定的(见方程符号)，也可以认为这是最早的指数记号。

古埃及人用“⅃⅂”表示一数自乘一次(莫斯科纸草书)。古希腊人丢番图用 Δ^Y 表示 x^2，K^Y 表示 x^3，$\Delta^Y\Delta$ 表示 x^4，ΔK^Y 表示 x^5 等等。阿拉伯人哈基用词 mal 表示 x^2；ka^{c}b 表示 x^3；māl māl 表 x^4；māl ka^{c}b 表 x^5 等等。

17 世纪才出现具有“现代”意义的指数符号，最初的表示未知量次数的符号中，不出现未知量符号，如卡塔尔迪在 1610 年出的代数书中，用

5 [illegible] *via* 8 [illegible] *fa* 40

表示 $5x^3\cdot 8x^4=40x^7$ 的意思。比尔吉用罗马数字写于系数数字之上表未知量次数，如用

$\overset{vi}{8}+\overset{v}{12}-\overset{iv}{9}+\overset{iii}{10}+\overset{ii}{3}-\overset{i}{7}-\overset{o}{4}$

表示 $8x^6+12x^5-9x^4+10x^3+3x^2-7x-4$。后来开普勒等采用了这种符号。罗曼斯开始写出表示未知量的字母，他用

$A(4)+B(4)+4A(3)\text{in}B+6A(2)\text{in}B(2)+4A\text{in}B(3)$

表示

$A^4+B^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3$

法国人埃里冈与此相似，用 $a3$ 表 a^3，$2b4$ 表 $2b^4$，$2ba2$ 表示 $2ba^2$，系数在前而指数在后面。1636 年英国人休姆用小罗马数字放在字母的右上角表示指数，如用 A^{iii}表示 A^3。这种表示除了用的是罗马数字外，与现代的指数表示法已一样了。

1637 年，笛卡儿用较小的印度-阿拉伯数字表示指数，放在右上角，如 $5a^4$，就是现代的指数表示法，不过笛卡儿将 b^2 写作 bb，并且只给出正整指数幂。这以后虽然还有各种不用的指数符号，但笛卡儿法逐渐流行，只把 bb 写成 b^2，直到现在。

分指数幂最早见于奥雷姆的《比例算法》一书，他用 $\boxed{\begin{matrix}1.p\\2.2\end{matrix}}$ 表示 $2\frac{1}{2}$，用 $\frac{1}{3}9^p$ 表示 $9^{\frac{1}{3}}$，$\frac{1}{3}2^p$ 表示 $2^{\frac{1}{3}}$。他以及斯蒂文等人还提到过负指数幂，但正式的分指数和负指数都是 1655 年英国人沃利斯给出的，但他并没有真正使用过 $a^{-1}=\frac{1}{a}$，$a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{a^3}$ 等指数符号。

现行的分数指数和负指数符号是牛顿创设的（1676 年），最先使用虚指数的是意大利人法尼亚诺，他在 1719 年得到了关系式

$$\pi=4\ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{i}{2}}$$

1679 年莱布尼茨在一封写给惠更斯的信中讨论了方程

$$x^x-x=24,x^z+z^x=b,x^x+z^z=c$$

引入了变指数。

方根符号(signs for roots) 开方也是早就产生了的运算。古埃及人用符号“ㄱ”表示平方根；印度 7 世纪人婆罗摩笈多用“c”（为 carani（平方根）的第一个字母）表示平方根；15 世纪阿拉伯人盖拉萨迪用“ ﺟ ”表示平方根；2 世纪罗马人尼普萨斯用拉丁词语 latus（意为“正方形的边”）记平方根，后来这个词的第一个字母“l”成为欧洲一个重要的平方根符号，12 世纪，蒂沃利的普拉托等人都用这一符号。16 世纪法国人拉米斯也这样用，他用“l27ad l 12）得“l 75”表示 $\sqrt{27}+\sqrt{12}=\sqrt{75}$ 等，法国数学家韦达也用过这种平方根符号，1624 年英国人布里格斯分别用 l,l_3,ll 表示平方根、立方根和四次方根。

另一个在欧洲广泛应用的方根符号 **R**，来自拉丁语词 *radix*（意为“平方根”）。这个符号最先出现在由阿拉伯文翻译成拉丁文的欧几里得《几何原本》第十卷上，后来斐波那契和帕乔利等都用了这个符号，16—17 世纪的许多数学家都用 **R** 为平方根符号，如塔尔塔利亚、韦达（他也用 l）等人都如此。

在德累斯顿（1480）手稿中，在数字或字母前用一个点“·”表示求平方根，两个点“··”表示求 4 次方根，三个点“···”表示求 3 次方根，四个点“···· ”表示求 9 次方根。在

格丁根手稿(1524)中,用$\int$表平方根;$\int c^e$ 表立方根;$\int cc^e$ 表示 9 次方根等等。cs $\int \underline{|8+\quad 22_z}\int$表示 $\sqrt{8+\sqrt{22}}$,其中 cs 即 communis(结合)表先加再开平方。

德国人鲁多尔夫是较早使用$\surd$表示平方根的人之一,1557 年,他在引入$\surd$后,又用 ᴧᴧ√ 表示 3 次方根,用 ᴧ√ 表示 4 次方根。斯蒂文用$\surd$表平方根,用$\surd c$ 表示立方根,1640 年,他又采用$\surd 3)$(②表示 $\sqrt{3}\cdot x^2$,用$\surd 3)20+\surd 392$ 表示 $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$。笛卡儿在 1637 年使用$\sqrt{\quad}$ 为平方根符号。1647 年奥特雷德用$\surd r$ 表平方根,用$\surd[12]$或$\surd\boxed{12}$表示 12 次方根,沃利斯在 1655 年用$\surd^3R^2$ 表示现在的$\sqrt[3]{R^2}$的意思。1721 年,哈顿用$^3\surd$,$^4\surd$分别表次 3 次方根和 4 次方根。1732 年,卢贝尔用 $\sqrt[3]{25}$ 表示 25 的 3 次方根,与现代符号相同了。后来,逐渐各次方根都用这种形式的符号表示,即采用了现代符号。

代数方程的符号(**Signs for algebraic equations**) 代数方程的符号指的是方程中所涉及的各种符号:未知数符号及前面考察的那些运算符号。通过方程给出未知数符号并对前述符号作一总结。

中国古人很早就有了关于方程的知识,《九章算术》中就有许多利用方程求解问题的例子。由于中国古代使用算筹计算,利用算筹的位置表示未知数及其次数,只用算筹摆出其系数就可以求解。1247 年南宋秦九韶引入了一元高次方程的一般解法,除了用位置表示未知数及其次数外,还用了一些专门术语,如下图所示,这个图表示一个四次方程

$$-x^4+15245x^2-6252506.25=0$$

金代李冶等人使用了天元术,明确地用“天元”表示未知数一次项,并

商

0

实

⊤═⊤═||||| 0 ⊤═||||| -6262506.25

0 0

方

| ☰ || ☰ |||| $+15245x^2$

从上廉

0 0

下廉

| $-1x^4$

益隅

且建立了设立方程解决实际问题的方法。

丢番图的多项式符号,用

K'ᾱΔ' ῑγSε̄Μ̊β 表示

x^3+13x^2+5x+2。

印度公元7世纪的婆罗摩及多用

ya v 0 ya 10 ru 8̇

ya v 1 ya 0 ru 1

表示 $0x^2+10x-8=x^2+0x+1$

意大利人斐波那契1202年用文字来表方程,

duo census,et decem radices equantur denariis 30

表示 $2x^2+10x=30$。

15世纪阿拉伯人盖拉萨迪用

96 ل 10 1

表示 $x^2+10x=56$。

德国人雷格蒙塔努斯在1473年用

40 ℓ et120 ℓ ——800

表示 $40x^2+120x=800$。

法国人许凯在1484年用

8^2. *avec.* 12^2. *montent.* 20^2

表示 $8x^2+12x^2=20x^2$,其中 8^2. 中的小2是未知数指数而不是8的指数。

意大利人帕乔利在1491年用

1. *co.* *m̃.* 1. *ce.* *de.* ℞^a 36

表示 $x^2-y^2=36$。其中用 co.(cosa)表 x,ce.(censo)表 x^2;他还用 cu(cubo)、ce. ce.(ceso de ceso)、p^0. r^0(primo relata)、ce. cu.(ceso de cubo)等分别表示 x^3、x^4、x^5、x^6,…。

德国人鲁多尔夫1525年用

Sit 1 z aequatus 12ℓ—36

表示 $x^2=12x-36$.

奥地利人施雷勃尔1535年用

30se. —2pri—56N

表示多项式 $30x^2-2x-56$。

荷兰人黑克1537年用

4se. —51pri—30N. dit is ghelige $45\frac{3}{5}$

表示 $4x^2-51x-30=45\frac{3}{5}$。

意大利人卡尔达诺1545年用

1. quad. p̃. 2 pos. aeq. 48

表示 $x^2+2x=48$。

意大利人格利盖1552年用

$\frac{1}{4}$□□*m̃*4□———4□

表示 $\frac{1}{4}x^4-4x^2=4x^2$。

德国人申贝尔1550年用

4Pri+3ra. equales 217N.

表示 $4x^2+3x=217$。

法国人比特奥1559年用

1⬡*M*6◇*p*4ρ *p*9[24

表示 $x^3-6x^2+4x+9=24$。

意大利人邦贝利1572年用

$\overset{6}{\smile}_1$ · *p* · $\overset{3}{\smile}_8$ · Eguale à 20

或

1 · 6̮ · p · 8 · 3̮ Egualeà 20

表示 $x^6+8x^3=20$。

英国人雷科德1557年用

14 · ℓ ——15. φ=71. φ

表示 $14x^2+15x==71x$。

法国人戈塞林1577年用

67QP8LM12CM18QQM35

表示多项式 $67x^2+8x-12x^3-18x^4-35$,同时用

1LP2qM20aequalia sunt 1LP30

表示方程 $1x+2y-10=1x+30$，引入两个未知数符号。

比利时人斯蒂文 1585 年用

1③fera egale à－2②＋12①＋48

表示 $x^3=-2x^2+12x+48$。

法国人韦达 1593 年用

$$\frac{\text{B in}A}{D}+\left\{\begin{matrix}\text{B in}A\\ \frac{-\text{B in}H}{F}\end{matrix}\right\}\text{aequabuntur}B$$

表示 $\frac{Bx}{D}+\frac{Bx-B\cdot H}{F}=B$；1615 年，他又用

A cubus＋B plano 3 inA，aequarl Z solido　2

表示 $x^2+3B^2x=2Z^3$。

德国人克拉维乌斯 1608 年用

3𝓍＋4A 𝓎·29770

表示 $3x+4y=29770$。

法国人吉拉尔 1629 年用

1(3)esgaleà　12(1)－18

表示 $x^2=12x-18$。

英国人奥特雷德 1631 年用

$$\frac{1}{2}z\pm\sqrt{q}:\frac{1}{4}z_q-AE=A\cdot$$

表示 $\frac{1}{2}z\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2-AE}=A$。

法国人埃里冈 1634 年用

154a ～ 71a2 ＋ 14a3 ～ a4　2/2 120

表示 $154a-71a^2+14a^3-a^4=120$。

法国人笛卡儿 1637 年用

$x^3--9xx+26x--4\supset 0$

表示 $x^3-9x^2+26-4=0$。从此开始用 x、y、z 等拉丁字母表后几个字母表未知数。

沃利斯（英国人）1693 年用

$x^4+bx^3-cxx+dx+e=0$

表示 $x^4+bx^3-cx^2+dx+e=0$。此后就发展为现代代数方程符号了。

函数符号（Signs for functions in general）　1694 年约翰·伯努利首次提出函数概念，并且用字母 n 表示变量 z 的一个函数；1697 年，他又用大写字母 X 和相应的希腊字母 ξ 表示变量 x 的函数。同一时期（1695）雅·伯努利则用 p 和 q 表示变量 x 的任意两个函数。

莱布尼茨 1698 年采用 $\overline{x}\rfloor 1\rfloor$，$\overline{x}\rfloor 2\rfloor$ 表示 x 的两个函数；用 $\overline{x;y}\rfloor 1\rfloor$，$\overline{x;y}\rfloor 2\rfloor$ 表示两个变量 x，y 的两个函数。

1734 年，欧拉用 $f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ 表示 $\frac{x}{a}+c$ 的函数，这是数学史上第一次用“f”表示函数。同时，克莱罗用 $\prod x.\ \Phi_x$，Δx 表示 x 的函数，用大写希腊字母而不用括号。1745 年达朗贝尔用 $\Delta u,s$，$\Gamma u,s$ 表示两个变量 u，s 的函数，还用 $\phi(z)$ 表示 z 的函数。1753 年，欧拉用 $\Phi:(x,t)$ 表示 x 和 t 的函数，次年又用 $f:(a,n)$ 表示 a、n 的函数。

1797 年拉格朗日大力推动使用 f、F、Φ、ψ 表示函数，对后世产生重要影响，此后一直到现在主要采用这几个字母表示函数。

1820 年，赫谢尔用 $f(x)$ 表示 x 的函数，并且指出，$f(f(x))$ 可记为 $f^2(x)$，$f^m f^n(x)=f^{m+n}(x)$，还用 $f^{-1}(x)$ 表示其函数 f 为 x 的量。1893 年，皮亚诺采用符号 $y=f(x)$

和 $x=f(y)$。后来结合赫谢尔的符号，又成为 $y=f(x), x=f^{-1}(y)$。这就是现在通用的符号。

对数符号（Signs for logarithms） 对数是英国人纳皮尔创立的，对数(logarithm)一词也是他创造的。源出希腊文 λόγos(拉丁文 logos)，意为“表示思想的文字或符号”，也可作“计算”或“比率”讲。它和另一个希腊词 α′ ριθμόs(数)结合而成 logarithm 这个词。纳皮尔在表示对数时用整个词，没作简化工作。

1624 年，开普勒把它简记为“Log”，奥特雷得 1647 年也这样用。卡瓦列里 1632 年头一个用了记号“log”。1821 年柯西用“l”表示自然对数而用“L”表示任意(大于 1)的底的对数。1893 年皮亚诺用“log$x$”记以 e 为底的对数，用“Log$x$”记以 10 为底的对数。同年，斯特林厄姆把以 b 为底的对数记为“$b$log”，把自然对数记为“ln”，把以复数模 k 为底的对数记为“$\log_k$”。1902 年施托尔茨等人用“$a$log. b”表示“以 a 为底的 b 的对数”，后来成为现在的形式。

对数由穆尼阁于 17 世纪中叶介绍来我国，17 世纪初薛凤祚《历学会通》有“比例数表”(1653，或作“比例对数表”)，把真数叫“原数”，对数叫“比例数”。《数理精蕴》亦称为对数比例，说：“对数比例乃西士若往・讷白尔所作，以借数与真数对列成表，故名对数表”。以后便称为对数了。

符号 e（The sign e） 欧拉首先用 e 来表示自然对数的底，他大约是在 1727 年或 1728 年的手稿里用的，但这一手稿直到 1862 年才付印。欧拉在其 1736 年出版的《力学》第 1 卷及 1747 年到 1751 年的文章中都用 e 来表示自然对数的底。丹尼尔・伯努利在 1760 年，孔多塞在 1771 年，兰伯特在 1764 年都用了这个符号。后来贝祖(1797)，克拉姆((1808)等都这样用 e，直到现在。

19 世纪，我国曾用特殊符号表示自然对数的底。李善兰译的《代数学》(1859)卷首有：“又讷字代二、七一八二八一八，为讷白尔对数底率。”即以“讷”表自然对数的底。1873 年，华蘅芳译《代数术》卷十八有：“则得其常数为二・七一八二八一八二八四五九〇四五不尽，此数以戊代之，……可见戊即为讷对之底。”即以“戊”表自然对数的底，这显然与当时从甲乙丙丁戊译 $ABCDE$ 有关，以“戊”译“e”。后来数学书采用了横排及西文记法，就采用“e”了。

初等几何符号（Symbols in elementary geometry） 初等几何中使用的符号大致可分为三种类形：表示几何概念的象形或图形，例如用“Δ”表示三角形；几何中特有的表意符号，如用“～”表示“相似”；初等代数符号，如“＋”、“－”等。虽然欧几里得的《几何原本》是几何学的开山之作，但它并没有使用几何学符号；最早使用几何符号的是海伦(公元 150 年)。中国古代数学中亦有许多极重要的富有成果的属于几何学的内容，并提出过一些独特的几何学概念，但没有采用过专门的符号。

海伦的符号：Δ(三角形)；$\overset{ov}{=}$或$\overset{,}{=}$(平行)；▭·(四边形)；♉(圆)。

帕普斯(4世纪)的符号：▽或△(三角形)；$\overset{ol}{=}$或＝(平行)；∟(直角)；□(正方形)；○或⊙(圆)。

1634年，埃里冈用"<"记角，在17和18世纪是很通用的。1657年奥特雷得用"∠"表示角，后渐流行，沿用至今。19世纪，一些人用"Δ"表示角，如波尔约等人即这样用；麦比乌斯用$\hat{ab}$表示由直线a与b所成的角；施托尔茨则用$\hat{ab}$表示之。霍尔斯特德等人用"∢"表示角。马赫用"⊥"表示直角，埃里冈用⅃表示之。

1633年，埃里冈用"⊥"表示垂直，这个符号后渐通用，现在仍用之。但后来如卡斯韦尔、琼斯等人曾用过倒放的字母"⊥"表示垂直，其他人曾用过"⊥"、"⊥"、"⅄"表示垂直。

从埃里冈和奥特雷德的时代起，符号"△"(三角形)，"□"(正方形)，"▭"或"▯"(矩形)，"▱"(平行四边形)就开始通用了，其中△和▱一直用到现在。

海伦、尤其帕普斯的圆的符号沿用至今。埃里冈还用了帕普斯的"＝"表示平行，卡斯韦尔，琼斯等人用"∥"表示平行，一直用到现在，12世纪蒂沃利的普拉托采用$\frown{ab}$表示圆上的弧ab，这是现在的用法的来源。

1679年，莱布尼茨用"$a\sim b$"表示a与b相似，用"～"表示全等，1710年，在另一个地方，莱布尼次又用"∽"表示相似(这是一个水平放的"S"，现在这两种形式都采用。1777年，哈塞勒开始用"≌"表示全等；1824年，莫尔韦德则用"∾"表示全等，用"∽"表相似。这两种表全等的符号也都用于现代。

符号π(The Sign π) 沃利斯开始用符号表示圆周率，他在1656年出版的《无穷算术》一书中用一个小方块□表示$\frac{4}{3.14149}$。首先用一个单独的字母表圆周率的是J.C.施图姆，他于1689年用一个字母e表示圆周率。奥特雷德用比$\frac{\pi}{\delta}$表示圆周率(1652)其中π为圆周而δ为直径，巴罗、格雷戈里等人也采用了这种记法。

琼斯在1706年引入了π作为圆周率的符号，欧拉在1734年曾用p表示圆周率用g表示圆周率之半，但在1736年，他也采用了琼斯的符号，尼古拉·伯努利在1742年给欧拉的信中也采用了π作圆周率，后来渐流行，一直用到现在。

角度符号(Signs for angle metric magnitude) 现在采用的角度符号°(度)、′(分)、″(秒)是起源于古希腊的。托勒密的《天文学大成》采用了角度符号，角度的进位制采用了古巴比伦的60进制。基本单位记为μoιραι，常常简记为μ^0。第一个60分位用一个重音号"′"表示，第二个60分位用两个重音号"″"表示。例如用

μoιρῶν μζ μβ′ μ″

表示47°42′ 40″，(其中数字记法见记数法)。还用

μ°β

表示2°。

中世纪的漫长时代里却没有采用托勒密的符号。早期的拉丁文手稿中用文字缩写 gu、gdu、gdus 等表示角度。在 12 世纪由阿拉伯天文表翻译的拉丁文书中，用 gradus（度），minutae（分），seclndae（秒）等及其缩写表示角度，常缩写为 Gr.，Min，sec。雷格蒙塔努斯在 15 世纪中期曾用

$\overset{u}{gr}$ 35 $\overset{u}{m}$ 17

表示 35°17'，他还用

44. 42'. 4"

表示 44°42'4"，开始采用托勒密的部分符号。1515 年在科隆（Cologne，德国城市）印行的托勒密的《天文学大成》中用“g”表示度，m 表示分。雷格乌斯 1536 年用 T，S，g，m，s，t，qr 表示角度，其中 1T = 12S，1S = 30g（度），1g = 60m，1m = 60s 等等。这种用法很广，1611 年克拉维乌斯用 G.，M.，S. 分别表示度、分、秒。

弗里西乌斯在 1540 年用

Integr， Mi. 2. 3. 4.
36 30 24 50 15

表示现代的 36°30'24"50‴15⁗。最先用°表示度的要算佩尔蒂埃（1558），但他并没有直接象现代那样应用，他把 12'20" 的角记为

s. o. g. 0m̃. 12. 2̃. 20

最早如现代形式采用°、′、″表示角度的是莱因霍尔德（1571），他用了°63'13"53 和 62°54'18" 两种形式表示角度。后来第谷 · 布拉赫（1573）也用了这种角度符号。逐渐得到普遍应用，但有时人们（如斯霍纳，1586；赖特，1616 等）把°、' 等记在数字上，如用

$\overset{\circ}{7}$ $\overset{\prime}{50}$

表示 7°50'。1741 年舍文强调了 1°48'28"12‴的角度符号，此后得到通用。

三角函数符号（Signs for trigonometric functions） 较早采用三角函数（当时没有函数概念，叫做三角线（trigonometric lines））符号的是毛罗利科。在 1558 年，他用“sinus 1ᵐ arcus”表示正弦，用“sinus 2ᵐarcus”表示余弦。但真正使用简化的符号表示三角线的第一个人是 T. 芬克，他在 1583 年，创用“tangent”（正切）和“secant”（正割）表示相应的概念，稍后，他采用了这样一些符号：“sin.”，“tan.”，“sec.”，“sin. com”，“tan. com.”，“sec. com”分别表示正弦、正切、正割、余弦、余切、余割，前三个符号与现代符号相同了。后来的符号多有变化，列表表示它们的发展变化。

使用者	年代	正弦	余弦	正切	余切	正割	余割	备注
罗格蒙塔努斯	1622	S. R		T. (Tang)	T. cōpl	Sec	Sec. Compl	
吉 拉 尔	1626			tan		sec.		
杰 克	1696	s.	cos.	t.	cot.	sec.	cosec.	

（续）

使用者	年代	正弦	余弦	正切	余切	正割	余割	备注
欧　拉	1753	sin.	cos.	tag(tg).	cot.	sec.	cosec	
谢格内	1767	sin.	cos.	tan.	cot.			①
巴　洛	1814	sin	cos.	tan.	cot.	sec	cosec	①
施泰纳	1827			tg				②
皮尔斯	1861	sin	cos.	tang	cotall	sec	cosec	
奥莱沃尔	1881	sin	cos	tan	cot	sec	csc	①
申弗利斯	1886			tg	ctg			②
万特沃斯	1897	sin	cos	tan	cot	sec	csc	①
舍费尔斯	1921	sin	cos	tg	ctg	sec	csc	②

注：①现代(欧洲)大陆派三角函数符号。
②现代英美派三角函数符号。
我国现在采用②类三角函数符号。

丹尼尔·伯努利在1729年最先采用符号表示反三角函数，他用AS表示反正弦。1736年，欧拉用At表示反正切，1737年，他用A sin $\frac{b}{c}$表示在单位圆上正弦值等于$\frac{b}{c}$的弧。C·申费尔在1772年用arc. tang. 表示反正切；拉格朗日于同一年使用了arc. sin $\frac{1}{1+\alpha}$表示反正弦函数，1776年，兰伯特则用了arc. sin表示同样的意义。鲍利于1794年用Arc. sin表示反正弦函数。后来这些记法逐渐普遍，去掉了符号中的小点，现在用arc sin$x$，arc cos$x$等在三角函数前加arc表示反三角函数，有时加大写字母开头的Arc sin$x$表示反三角函数的主值。

另一种较常用的反三角函数符号$\sin^{-1}x$，$\tan^{-1}x$等是赫谢尔于1813年开始采用的，把反三角函数符号与反函数符号统一起来，现代亦有应用。

双曲函数符号(**Signs of Hyperbolic functions**)　最先引入双曲函数的是意大利人V·里卡蒂，他于1757年引入这种函数的同时采用了Shx和Chx分别表示x的双曲正弦和双曲余弦。他还用

$$\overline{\text{Ch.}\,\mu}^{2}-\overline{\text{Sh.}\,\mu}^{2}=r^2$$

表示现在$\text{ch}^2x-\text{sh}^2x=1$的意思。

1768年，兰伯特进一步发展了双曲函数，他用sinh(k−y)和cosh k分别表示双曲正弦和双曲余弦，即用普遍三角函数符号加上字母“h”来表示双曲函数。

1774年，L'Abbé·索兰用s. h. 表双曲正弦，c. h. 表双曲余弦，t. h. 表双曲正切，cot. h. 表双曲余切，他

的符号除了多两个点外已基本与现代符号一致。他给出公式

$$\text{c. h. n. } x = \frac{(\text{c. h. } x + \text{s. h. } x)^n + (\text{c. h. } x - \text{s. h. } x)^n}{2. \text{r}^{n} - 1}$$

1857 年，塞雷用 Sin. h. x，cosh. x，tang. h. x 分别表示双曲正弦，双曲余弦和双曲正切；乌埃尔则用 Sh、Ch、Th 表示同样的意义。后来很多人用这种符号。克利福德在 1878 年采用 hs、hc 和 ht 表示上述意义，用时也采用了 sh，ch、th 分别表示双曲正弦、双曲余弦和双曲正切，这后一种记号渐渐广为采用，直到现在。

乌埃尔同时还采用了 ArgSh，ArgCh 和 ArgTh 分别表示反双曲正弦，反双曲余弦和反双曲正切函数，后来许多人也这样用。后来在书写中逐渐减去了字母“g”，双曲函数符号也用了克利福德式的，就形成了现代反双曲函数符号，Arsh，Arch，Arth 等等。

极限符号(**Sings for limit**)用“lim”来简化“极限”(limit)的第一个人是瑞士的吕利埃(1786 年)，其后卡诺(1797 年)、布林克利(1818 年)等人也这样用。在柯西的时代(19 世纪 30 年代)里，“lim.”后的小点被去掉，于是通用“lim”，一直到现在。

19 世纪初，欧洲有很多人用“$\text{Lim}_{x=a}$”表示，“x 趋近于 a 时的极限”，1841 年，外尔斯特拉斯改用“lim”代替其中的“Lim”，并用“$\lim\limits_{n=\infty} \cdot p_n = \infty$”(1854 年)的符号。在这一时期，外尔斯特拉斯和柯西的工作合成为极限的著名的“$\varepsilon-\delta$ 定义”。

1905 年，里斯引入“→”表示连续地趋向一个极限，哈代 1908 年用了 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)=0$，并指出可写作 $\lim\limits_{n\to\infty}$，$\lim\limits_{n\to\infty}$，$\lim\limits_{x\to a}$ 等。后来就形成为现代用法

1887 年，帕施引入表示 x 的函数 y 的上极限和下极限的符号：“$\lim\limits_{v=\infty}\sup y$”和“$\lim\limits_{v=\infty}\inf y$”。1898 年，普林斯海姆则用 $\overline{\lim\limits_{v=+\infty} a_v} = A$”和“$\underline{\lim\limits_{v=+\infty}}\, a_v = a$”分别表示上极限和下极限。后来把下面的“=”换成“→”，就一直用到现在。

微分和导数符号(**Signs for differentials and derivatives**)牛顿是最早用点号表示导数的，他用 v, x, y, z 等表示变量，在其上加一点表示对时间的导数，如用 $\dot{x}$ 表示 x 对时间的导数。这种用法最早见于牛顿 1665 年的手稿。1704 年他又引入符号

$$\overset{\shortparallel}{x}, \overset{\prime}{x}, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$$

其中每一个是前一个的导数，是后一个的原函数。他还用了“$\dot{z} : \dot{x}$”，表示 z 对 x 的导数。

莱布尼茨于 1675 年引入符号“dx”和“dy”分别表示 x 和 y 的微分，这一符号直用到现在。在他 1684 年出版的书中，采用了这样的符号

$d\,\overline{ax}$ aequ. adx

$d\,\overline{xv}$ aequ. $xdv + vdx$

$d\,\overline{z-y-w+x}$ aequ. $dz - dy + dw + dx$

其中 aequ 表示“=”，而 $\overline{ax}$ 表示 (ax)。上式已含有现代微分符号和微分法

则了。他把导数记为“$dx : dy$”。他还把导数记为$\frac{dx}{dy}$(1675 年),当时以 x 表纵坐标而以 y 表示横坐标,这个符号,除了坐标轴符号变化外,一直用到现在。

莱布尼茨还用 ddv 表示二阶微分,1694 年,约翰·伯努利用 $ddddz$ 表四阶微分,18 世纪一度相当流行。直到 1797 年,贝祖用 dx^2 表示 $(dx)^2$,用 $d(x^2)$表示 x^2 的微分;1802 年拉克鲁瓦用 d^2y 表示二阶微分,d^ny 表示 n 阶微分,并且用 d^2y^2 表示 $(d^2y)^2$,一般地,用 d^ny^m 表示$(d^ny)^m$。这种用法也一直通行至今。

用撇点“'”表示导数的第一个人是拉格朗日(1797 年),他用 y' 表示 y 对 x 的一阶导数,y'',y'''分别表示二阶和三阶导数;1823 年,柯西同时用 y' 和$\frac{dy}{dx}$表示 y 对 x 的一阶导数。这种用法也为人们所接受,一直用到现在。

用一个大写字母“D”表示导数源起于约翰·伯努利(1706 年之前),阿博加斯特在 1800 年重申这个符号,B·皮尔斯在 1824 至 1841 年之间。记

$$Df\cdot x=\frac{df\cdot x}{dx},$$

$$D^2\cdot f\cdot x=D\cdot D\cdot f\cdot x,$$

$$D^2\cdot f\cdot x=\frac{d\cdot D\cdot f\cdot x}{dx}=\frac{d^2f\cdot x}{dx}。$$

当时用 $f\cdot x$ 表现代的 $f(x)$。这一导数符号也一直用到现在,有时人们称“D”为微分算子。

偏微分和偏导数符号(Signs for partial differentials and patial derivatives) 在牛顿、莱布尼茨、伯努利等人的著述中就引入了偏导数概念,但并没有统一的专门的表示符号。1755 年,欧拉用带括号的“$\left(\frac{dp}{dy}\right)$”表示 p 对于 y 的偏导数,这一符号有很广的应用。但在带幂指数时与一般导数无法区分,如“$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2$”是表示$\frac{dp}{dx}$的平方还是表示$\left(\frac{dp}{dx}\right)$的平方呢?这之后,1776 年欧拉又用“$\frac{\partial^\lambda}{P}\cdot v$”表示对 p 的 λ 阶偏导数。

1770 年左右,蒙日分别用“$\frac{\delta v}{dx}$”和“$\frac{dv}{dy}$”来表示对 x 和 y 的偏导数;1770 年孔多塞用“dz”表示 z 对于 x 的偏微分,用“∂z”表示 z 对 y 的偏微分。另一个地方,他还用“dz”表全微分而“∂z”表偏微分。最有意义的是拉格朗日的工作,他于 1786 年用 ∂ (rounded d,读作“圆 d”)表示偏导数,他用“$\frac{\partial v}{\partial x}$”表示 v 对 x 的偏导数。这就是现代的偏导数符号。但这一符号没有立刻得到通用,直到雅可比于 1841 年再次强调这一符号,并引入 d 表示全微分而 ∂ 表示偏微分。设 f 是 x 和 y 的函数,则全微分

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

以后这种符号得到普遍的应用。

积分符号(Signs for integrals) 1675 年,莱布尼茨用“omn. l”表示 l 的总和(积分),omn 是 omnia(所有、全部)的缩写。后来他又改写为 ∫,用 $\int l$ 表示所有 l 的总和(summa)。∫ 是字母 s 的拉长。

在 1694 至 1695 年间，莱布尼茨在∫号后置一逗号，即用如∫，$xxdx$。1698 年约·伯努利去掉了逗号。后来发展为现代用法。

定积分符号是傅立叶最先采用的，1822 年，在他的名著《热的分析理论》中，用了

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x)=\frac{1}{2}$$

$$\int_{o}^{\pi}\varphi(x)dx+etc。$$

同时 G. 普兰纳采用了符号

$$\int_{0}^{1}a^{x}dv=\frac{a-1}{\operatorname{Log}a}$$

这一符号很快为数学界所接受，一直用到现在。

符号$\frac{0}{0}$（The sign $\frac{0}{0}$） 在现代数学分析教程中，符号$\frac{0}{0}$表示分子分母同时趋于零的一种不确定的分式极限形式，简称"零分之零型的不定式"。

这种形式的极限最早由法国数学家洛必达在他的《无穷小分析》（1696）中讨论，并给出了确定其极限值的洛必达法则。洛必达在《无穷小分析》中并没有使用符号$\frac{0}{0}$。瑞士数学家约翰·伯努利继续研究这种不定式，起初使用$\frac{a0}{0}$、$\frac{0a}{0}$，$\frac{0m}{0n}$等形式的符号，1730 年，使用了符号$\frac{0}{0}$。

法国数学家克莱姆在 1732 年 2 月 22 日写给英国数学家斯特灵的信中，也用$\frac{0}{0}$表示零分之零型的不定式。1754 年，这个符号再次出现在法国数学家达朗贝尔写给《百科全书》的条目《微分》中。到十九世纪上半叶，符号$\frac{0}{0}$已相当普遍地被采用，一直沿用至今。

向量符号（Signs for vector） 瑞士人阿尔冈在 1806 年用$\overline{AB}$表示一个有向线段或向量。麦比乌斯（1827）则用 AB 表示一个起点在 A 而终点为 B 的向量，他的用法为相当广泛的数学家所接受，实际上，现代也偶尔用这种表示方法。与他同时代的哈密顿、吉布斯等人则用一个小写希腊字母表示向量，现代亦有这种用法。沃依格特 1896 年区分了"极向量"和"轴向量"，兰格文 1912 年用 $\check{a}$ 表示极向量，此后字母上加箭头表示向量就流行起来，尤其在手写稿中。一些作者为印刷的方便，用黑体小写字母 **a**、**b** 等表示向量。这两种符号也通用至今。

柯西在 1853 年记向径为$\overline{r}$，记它在坐标轴上的分量分别为$\overline{x}$、$\overline{y}$、$\overline{z}$，且记$\overline{r}=\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$。而韦塞尔早在 1797 年就把向量表示为 $x+\eta y+ez$ 的形式，其中 $\eta^2=-1,e^2=-1$。格拉斯曼 1878 年结合前二人的工作，用 $p=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3$ 表示一个具有坐标 x,y,z 的点，其中 e_1,e_2,e_3 分别是三个坐标轴方向的单位长度。哈密顿则记一个向量为 $\rho=ix+jy+kz$，其中 i,j,k 为两两垂直的单位向量，因而有 $i\cdot j=-j\cdot i=k,j\cdot k=-k\cdot j=i,k\cdot i=-ik=j$。这种记法，后来与前述向量记法相结合：印刷时把 i、j、k 印成小写黑体字母，手写时加上箭头，并把系数（坐标）写到前面：$\boldsymbol{\rho}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 或 $\vec{\rho}=x\,\vec{i}+y\,\vec{i}+z\,\vec{k}$，就是现代用法。

向量积符号（Signs for pro-

ducts of vectors) 哈密顿认为两个向量只有一个积 $\rho\rho'$，它是一个四元数并且是两部分的和，用四元数 $S_{\rho\rho'}$ 表示数量部分而用四元数 $V_{\rho\rho'}$ 表示向量部分。格拉斯曼把向量的积分为“内积”或数量积（相当于哈密顿的 $S_{\rho\rho'}$）和“外积”或向量积（相当于哈密顿的 $V_{\rho\rho'}$）。1846 年，他把数量积记为 $a\times b$，1862 年又改为 $[u|v]$；同时，他把向量积记为 $[uv]$。

最先用 uv 表示向量积是索莫夫（1907 年），吉布斯把数量积称为“点积”并记为 $u\cdot v$，他还用 $u\times v$ 表示向量积，这种用法一直流行到现在，注意把向量改为现代记号：$\boldsymbol{u}$ 或 $\vec{u}$ 即可。洛伦兹把数量积记为 $(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})$、向量积记为 $[\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}]$。特纳等人 1903 年记内积为 $(\boldsymbol{u}、\boldsymbol{v})$，现在也常应用，对应的向量积记为 $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$。

“因为”和“所以”符号（Signs for “therefore” and “because”） 最先用符号表示“所以”的是雷恩，他在 1659 年的一本代数书中用“∴”和“∵”两种符号表示“所以”，“∴”用得多些。在该书 1668 年的英译本中也用这两种符号表“所以”，但“∵”用得多些。1706 年，琼斯用“∴”表示“所以”。在 18 世纪中“∵”用于表“所以”至少与“∴”用得一样多。

18 世纪没有人用“∵”表示“因为”，1805 年英国出版的一本《大众数学手册》中首次用“∵”表示“因为”，但远没有“∴”表“所以”用得那样广。在剑桥大学 1827 年出版的欧几里得的《几何原本》中用“∵”表“因为”，同时用“∴”表示“所以”。这种用法日益流行，直到现在。

数学名题与猜想

三等分角问题(problem of trisection of an angle) 古希腊几何作图三大问题之一,即将任意一个角进行三等分。起源于求作正多边形一类的问题,其难处在于作图使用工具的限制。古希腊人要求几何作图只许使用直尺(没有刻度,只能作直线的尺)和圆规。1837年法国数学家旺策尔第一个证明了三等分角问题是这种尺规作图的不可能问题。但如果放宽作图工具的限制,该问题还是可以解决的。在古希腊三等分角问题被归结为求"斜向"或"倾角"问题。利用已发现的平面曲线,可以有多种解决方法。希皮亚斯构造的割圆曲线不仅可以三等分角,而且可以任意等分角。尼科米迪斯发现的蚌线也能解决三等分角问题。阿基米德创立的方法被称为最简单的方法,他利用只有一点标记的直尺和圆规,巧妙地解决了这一问题。此外,帕波斯曾对两种圆锥曲线解三等分角问题的方法做了证明,并推广了已有的结果。还有许多数学家从实用角度出发创立了一些近似作图法,而且可以求到任意精确值。三等分角问题以表述简明而道理深邃成为人们长期从事的课题,对它的深入研究导致许多作图方法的发现和作图工具的发明。

倍立方体问题(problem of duplication of a cube) 古希腊几何作图三大问题之一,即求作一立方体,使其体积是一已知立方体的两倍。该问题起源于两个希腊神话传说。一个说鼠疫袭击提洛岛(爱琴海上小岛),一预言者宣称已得到神的谕示,需将立方形的阿波罗祭坛体积加倍,瘟疫方能停息;另一个说克里特王米诺斯为儿子修坟,命令将原来设计的立方形体积加倍,但仍保持立方体形状。两个传说都表明倍立方体问题起源于建筑的需要。它成为难题的原因是作图工具的限制,古希腊人强调几何作图只能用直尺(没有刻度,只能作直线的尺)和圆规。1837年法国数学家旺策尔证明了倍立方问题是尺规作图不可能问题,但如果放宽作图工具的限制,这一问题是可以解决的。古希腊数学家、天文学家希波克拉底首先将倍立方问题归结为求两个已知线段的比例中项问题。设两已知线段为 a 与 $2a$,其比例中项为 x、y,即 $a:x=x:y=y:2a$,则有 $x^3=2a^3$ 或 $y^3=2x^3$。许多希腊数学家沿着这一方向解决了倍立方问题。例如:毕达哥拉斯学派的阿尔希塔斯用圆柱、圆环和圆锥曲面相交的方法求出任意两线段的比例中项;门奈赫莫斯利用圆锥截线求出比例中项;尼科米迪斯利用蚌线求解等等。其中较为简便实用的方法是用直角尺求得比例中项,后人将它称为柏拉图方法。倍立方问题的研究促进了圆锥曲线理论的建立和发展。

化圆为方问题(**problem of quadrature of a circle**)古希腊几何作图三大问题之一,即求作一正方形,使其面积等于一已知圆。是历史上最能引起人们强烈兴趣的问题之一。早在公元前5世纪就有许多人研究它,希腊语中甚至有一个专门名词表示"献身于化圆为方问题"。其难度在于作图只许使用直尺(没有刻度,只能作直线的尺)和圆规这两种工具,相当于用尺规作出圆周率π的值。化圆为方问题最早的研究者是安纳萨戈拉斯,可惜他的结果失传了。智人学派的安蒂丰设想从圆内接正方形开始,用逐次加倍边数的方法化圆为方,成为穷竭法的先驱。同时代的布里松考虑用圆内接与外切正多边形同时加倍边数逼近圆周的方法化圆为方,是阿基米德割圆术的雏形。另一学者希皮亚斯构造了一条割圆曲线来三等分角,后人发现它可以用来化圆为方。此外,希波克拉底曾将化圆为方归为化由圆弧构成的月牙形为方的问题;阿基米德采用他的螺线化圆为方等等。但所有这一切或者在理论上缺乏严密性,或者作图方法超出了尺规的限制。1882年德国数学家林德曼证明了圆周率π是超越数,同时证明了化圆为方是尺规作图不可能问题,解决了两千年的悬案。如果放宽作图工具的限制,则可有多种方法解决这一问题(例如上述的希皮亚斯和阿基米德的方法),其中较为巧妙的方法是文艺复兴时期的著名学者达芬奇设计的:用一个底与已知圆相等,高为已知圆半径之半的圆柱在平面上滚动一周,所得矩形面积等于已知圆面积,再将矩形化为等积的正方形即可。化圆为方问题的研究促使人们开始用科学的方法计算圆周率π的值(参见圆周率),对穷竭法等科学方法的建立产生直接影响。

阿基米德群牛问题(**Archimedes' cattle - problem**)公元前3世纪下半叶古希腊科学家阿基米德在论著《群牛问题》中记载的问题。原文用诗句写成,大意是:西西里岛草原上有一大群牛,公牛和母牛各有4种颜色。设W、X、Y、Z分别表示白、黑、黄、花色的公牛数,w、x、y、z分别表示这白、黑、黄、花色的母牛数,要求有$W=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X+Y$, $X=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)Z+Y$, $Z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)W+Y$, $w=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot(X+x)$, $x=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(Z+z)$, $z=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Y+y)$, $y=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(W+w)$, $W+X=$正方形(数),$Y+Z=$三角数$\left(\frac{m(m+1)}{2}, m\text{为正整数}\right)$。求各种颜色牛的数目。有人指出,该问题大概早已存在,阿基米德只是重新研究而已。也有人认为,附有最后两个条件的完整叙述始于阿基米德。即使没有最后两个条件,群牛问题的最小正数解也达几百万到上千万。而最后两个条件中的正方形数又有两种解释:一种是$W+X=mn$,(因为牛的身长与体宽不一样,排成正方形后两个边牛的数目不一样)称

为“较简问题”，求解后牛的总数近6万亿，另一种为 $W+X=n^2$（长与宽的数目相等），称为“完全问题”。1880年阿姗托尔给出一种解答，导致二元二次方程 $t^2-du^2=1$，因 d 的值就达400多万亿，所以完全问题的最小解中牛的总数已超过20多万位的数。可见阿基米德当时未必解出过这个问题，它的叙述与实际情况也是不相符的。历史上对这一问题的研究丰富了初等数论的内容。

阿波罗尼奥斯问题（**Apollonius' problem**） 公元前3世纪下半叶古希腊数学家阿波罗尼奥斯提出的几何作图问题。载于他的著作《论接触》中。原书已失传，公元4世纪学者帕波斯记载了其中提出的一个作图问题：设有3个图形，可以是点、直线或圆，求作一圆通过所给的点（如果3个图形中包含点的话）并与所给直线或圆相切。共有10种可能情形，其中最著名的是：求作一圆与3个已知圆相切，常称为阿波罗尼奥斯问题。据说阿波罗尼奥斯本人解决了这一问题，可惜结果没有流传下来。1600年法国数学家韦达在一篇论著中应用了两个圆相似中心的欧几里得解法，通过对每一种特殊情况的讨论，严格陈述了该问题的解。后来牛顿、蒙日、高斯等许多数学家都对这一问题进行过研究，得到多种解决方法。其中以法国数学家热尔岗约1813年给出的解法较有代表性。他先画出各已知圆的等幂心与相似轴，然后确定与已知圆有关的极点，最后得到所求圆与已知圆的切点。以上所说都是通常的尺规作图法。如果放宽作图条件限制，则有多种简捷的解法，例如解析几何的方法，反演变换的方法等。

孙子问题（**Sun Zi's problem**） 中国古代约公元3世纪成书的《孙子算经》中记载的问题，是原书卷下第26题：“今有物不知其数，三三数之剩二；五五数之剩三；七七数之剩二，问物几何？答曰：二十三”。用现代符号表示为 $N\equiv2(\mathrm{mod}3)\equiv3(\mathrm{mod}5)\equiv2(\mathrm{mod}7)$，其最小正数解是23。《孙子算经》中给出了它具体解法，其中关键的步骤是：“凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五”。因此可设 $N=70\times2+21\times3+15\times2-2\times105=23$。原题及其解法中的3、5、7后来叫“定母”，70、21、15叫“乘数”。求乘数的方法在《孙子算经》中没有说明，直到1247年宋代数学家秦九韶在《数术九章》中才给出具体求法。分析一下乘数，70是5与7最小公倍数的2倍，21、15分别是3与7、3与5最小公倍数的1倍。这2、1、1的倍数秦九韶称为“乘率”，求出乘率，就可以知道乘数。《数书九章》给出求乘率的方法，称之为“大衍求一术”。1874年清代数学家黄宗宪发现了求乘率简法，使“求一术”广泛流传。在西方与《孙子算经》同类的算法最早见于1202年意大利数学家斐波那契的《算盘书》，同样没有证明。而与秦九韶“求一术”同类的算法直到1801年才出现于高斯的《算术探究》中。1852年英国传教士伟烈亚力最早将“大衍求一术”介绍到西方，使中国独特的

古老算法开始为欧洲人所知。现在一般数论书中将满足同余式组数的存在及特性称为“中国剩余定理”或“孙子定理”。孙子问题的算法名称很多,宋代周密称为“鬼谷算”、“隔墙算”。宋代杨辉(1275)称为“秦王暗点兵”、“翦管术”,明代程大位叫它“物不知总”、“韩信点兵”,并在《算法统宗》(1592)中将孙子算法编成歌决,推动了该算法的普及。

百鸡问题(**problem of a hundred chickens**) 中国古代约5～6世纪成书的《张邱建算经》中记载的问题,是原书卷下第38题,也是全书的最后一题:“今有鸡翁一,直钱五;鸡母一,直钱三;鸡雏三,直钱一。凡百钱买鸡百只,问鸡翁、母、雏各几何?答曰:鸡翁四,直钱二十;鸡母十八,直钱五十四;鸡雏七十八,直钱二十六。又答:鸡翁八,直钱四十;鸡母十一,直钱三十三,鸡雏八十一,直钱二十七。又答:鸡翁十二,直钱六十;鸡母四,直钱十二;鸡雏八十四,直钱二十八。”该问题导致三元不定方程组,其重要之处在于开创一问多答的先例,这是过去中国古算书中所没有的。原书没有给出解法,只说“术曰:鸡翁每增四,鸡母每减七,鸡雏每益三,即得。”即如果少买7只母鸡,就可多买4只公鸡和3只小鸡。所以只要得出一组答案,就可以推出其余二组答案。中国古算书的著名校勘者甄鸾和李淳风注释该书时都没给出解法,只有约6世纪的算学家谢察微记述过一种不甚正确的解法。到了清代。研究百鸡术的人渐多,1815年骆腾风使用大衍求一术解决了百鸡问题。1874年丁取忠创用一个简易的算术解法。在此前后时曰醇(约1870)推广了百鸡问题,作《百鸡术衍》,从此百鸡问题和百鸡术才广为人知。百鸡问题还有多种表述形式,如百僧吃百馒,百钱买百禽等。宋杨辉算书内有类似问题,中古时近东各国也有相仿问题流传。例如印度算书和阿拉伯学者艾布卡米勒的著作内都有百钱买百禽的问题,且与《张邱建算经》的题目几乎全同。

莲花问题(**problem of lotus flower**) 亦称荷花问题。印度古代约公元600年的数学家婆什迦罗第一提出的问题。记载于他的著作《阿耶波多历书注释》中。原题为:“一个高出水面1/4腕尺(一种古时长度单位)的莲(荷)花在距原地2腕尺处正好浸入水中,求莲花的高度和水的深度。”到12世纪,印度另一位著名数学家婆什迦罗第二在他的名著《丽罗娃提》中重新阐述了这一问题,只将高出水面的1/4尺改为1/2尺,并用歌谣的形式记载下来。从此莲花问题大显于世,成为几何定理应用的典型问题之一。14世纪印度另一位数学家纳拉亚讷也在著作中记述过类似的问题。从历史上看,最早记载这类问题的是中国古算书《九章算术》,约成书于纪元前后。其中第九章题6叙述如下:“今有池方一丈,葭生其中央,出水一尺。引葭赴岸,适与岸齐。问水深、葭长各几何?”问题显然是类似的,只是中国题中是称为葭的芦苇,印度题中是叫莲蓬的荷花,而所列数据随从本国度量单位而有差异。因此数学史家认为这是中印古文化交

流的结果。中国后来的古算书也有很多类似的题目,如《张邱建算经》(5～6 世纪)卷上 13 题,《四元玉鉴》(1303)卷中之六,《算法统宗》(1593)卷 8 等。其中《四元玉鉴》还是用歌谣体给出的题述。《九章算术》及后世算书都给出了该题的解法,但中算的"葭生池中"题是勾股定理的应用题,而印度的莲花问题则是圆内相交弦性质的应用题。此外阿拉伯数学家阿尔卡西在《算术之尺》(1427)中给出类似的"矛立水中"题目。16 世纪英国算书中也有"芦苇立于圆池"的类似题目。

斐波那契兔子问题(Fibonacci's rabbit problem) 公元前 13 世纪意大利数学家斐波那契提出的一个问题,记载于他的名著《算盘书》(1202)1228 年的修订本中。原题为:某人有一对兔子饲养在围墙中,如果它们每个月生一对兔子,且新生的兔子在第二个月后也是每个月生一对兔子,问一年后围墙中共有多少对兔子。斐波那契在原书中对此作了分析:第一个月是最初的一对兔子生下一对兔子,围墙内共有两对兔子。第二个月仍是最初的一对兔子生下一对兔子,共有 3 对兔子。到第三个月除最初的兔子新生一对兔子外,第一个月生的兔子也开始生兔子,因此共有 5 对兔子。继续推下去,第 12 个月时最终共有 377 对兔子。书中还提出,每个月的兔子总数可由前两个月的兔子数相加而得。该问题因新颖巧妙,引起人们的广泛兴趣,许多数学家对它进行了研究。现在称级数$\{u_n\}$:1,1,2,3,5,8,13,21,34,…$(u_{n+1}=u_n+u_{n-1})$为斐波那契级数,据载是由 19 世纪法国数学家吕卡首先命名的。1680 年意大利——法国学者卡西尼发现该级数的重要关系式 $u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2=(-1)^n$。1730 年法国数学家棣莫弗给出其通项表达式 $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$,19 世纪初另一位法国数学家比内首先证明这一表达式,现在称之为比内公式。斐波那契数列是一种特殊的线性递归数列,它在数学的许多分支中有广泛应用。1963 年美国还创刊一种专门研究它的杂志,称为《斐波那契季刊》。

合理分配赌注问题(problem of rational division of stakes) 亦称"点的问题"或"得分问题"。最早由意大利数学家帕乔利于 1494 年提出,16 世纪中期的卡尔达诺和塔尔塔利亚等人也讨论过这类问题。一般表述为:一场赌博因故中断,已知两个赌者当时的赌分及赢得赌博所需点数,求赌金该如何分配。17 世纪中叶法国人梅雷向数学家帕斯卡重提这类问题,引起帕斯卡与另一数学家费马在 1654 年 7 月至 10 月间的通信讨论,数学史上称这些通信为最早的概率论文献。他们研究的问题有:两个赌徒各出 32 个金币,约定先赢三局为胜。如果其中甲赢了二局,乙赢了一局时中断,赌金如何分配;如果甲赢了二局,乙一局未赢或甲赢了一局,乙一局未赢时,赌金又如何分配。帕斯卡用纯算术的方法,费马用组合方法

都得到正确解答。费马区分了独立概率事件和条件概率事件，还讨论了某一赌徒在第一次轮到他掷骰子时不掷让出而应该得到的赌金比例，甚至应用了 n 重伯努利试验的思想。帕斯卡则进一步提出了三个赌徒间分配赌金的问题。1657 年荷兰科学家惠更斯在此基础上潜心钻研，写成了《论赌博中的计算》一书，第一次提出数学期望的概念，成为概率论的较早论著。赌金分配问题被认为是概率论的科学起源，到 1713 年雅各布·伯努利的《猜度术》出版后，概率论已成为数学科学的一个分支了。

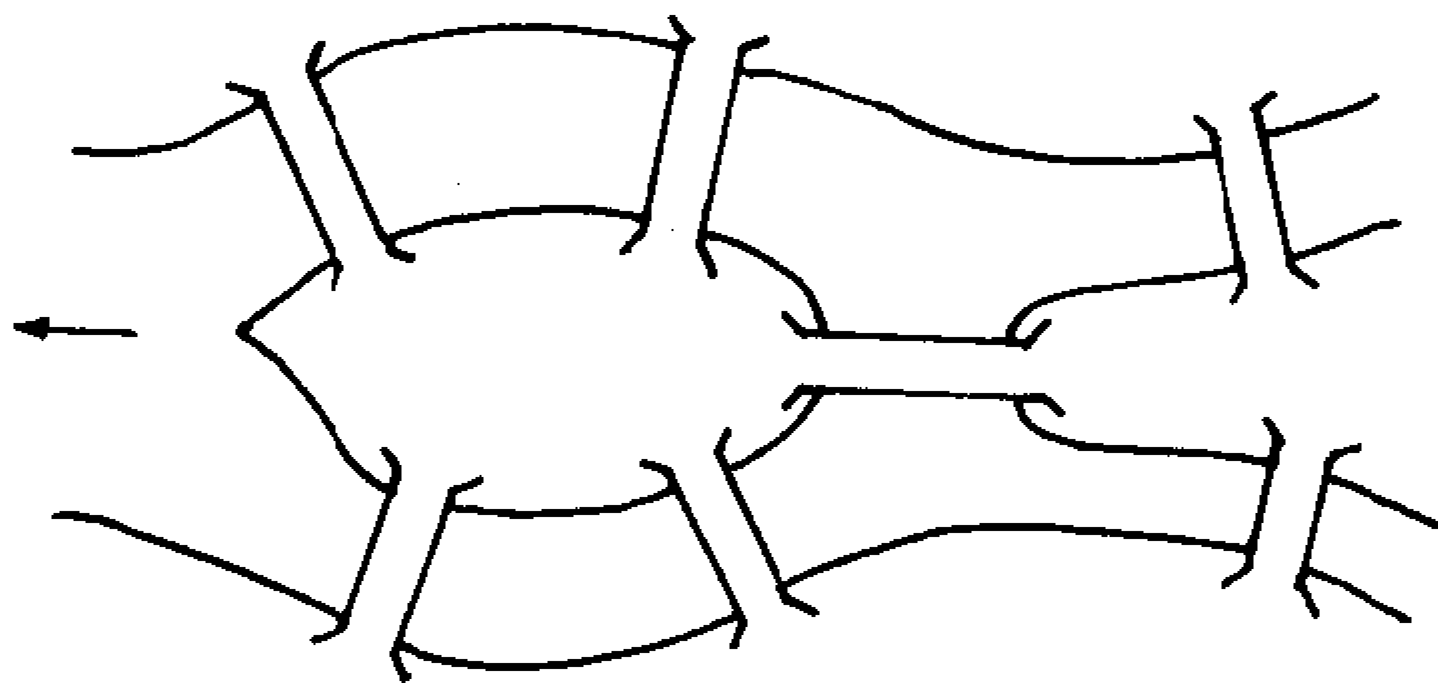
最速降线问题(problem of brachistochrone) 分析学中的一个基本问题，1630 年由意大利科学家伽利略提出。“一个质点在重力作用下，从一个给定点到不在它垂直下方的另一点，如果不计摩擦力，问沿着什么曲线滑下所需时间最短。”伽利略给出一个错误解答，说这曲线是圆。1696 年瑞士数学家约翰·伯努利重新提出这一问题征求解答，第二年已有许多数学家通过各种途径得到正确答案，其中包括牛顿、莱布尼兹、洛必塔和伯努利家族的成员。其答案是连接这两个点上凹的唯一一段旋轮线。旋轮线与 1673 年荷兰科学家惠更斯讨论的摆线是相同的。由于钟表摆锤作一次完全摆动所用时间相等，因此摆线(旋轮线)又称为等时曲线。最速降线问题引起数学家对这类极值问题的关注。大数学家欧拉从 1726 年起开始发表有关问题的论著，1744 年最先给出这类问题的普遍解法，引起变分法这一新数学分支的产生。

三体问题(problem of three bodies) 起源于天体力学的一个重要问题。在数学上的叙述为：假设具有任意质量 m_i 的三个质点 $p_i(x_i, y_i, z_i)(i=1,2,3)$，按照牛顿运动定律运动，则研究其运动方程 $m_i\frac{d^2w_i}{dt^2}=\frac{\partial v}{\partial w_i}$，$i=1,2,3$，$w=x,y,z$，$U=\sum_{i\neq j}k^2m_im_j/r_{ij}$，$k^2$ 是万有引力常数 $r_{ij}=\sqrt{(x_i+x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}$ 的问题称为三体问题。最常讨论的具体模型是太阳、地球和月球。17 世纪英国科学家牛顿对此做出开创性工作，1687 年最先将三体问题的摄动理论应用于月球的运动。其后三体问题及其推广的多体问题的求解吸引了众多数学家的注意。一般集中在两个方面的研究：一是导出运动的定理，二是求方程的近似解。摄动理论的建立就是第二方面的成果。欧拉、拉格朗日、拉普拉斯等人对此都有贡献，拉格朗日还于 1772 年给出三体问题的一些特殊周期解。1877 年美国数学家希尔又找到新的周期解，创立周期系数的线性齐次微分方程的数学理论。1885 年法国数学家庞加莱完善了希尔的工作，发展起微分方程的定性理论。时至今日，一体问题和二体问题已完全解决，三体问题和三体以上的多体问题不能完全解出。此外，假定第三体的质量为零，对其他两个具有有限质量的物体运动没有任何影响，而且后两个物体围绕着重心作

匀速圆周运动，这种情形被称为限制三体问题。对它的周期解有许多重要结果。

等周问题(isoperimetric problem) 分析学中的一个基本问题。当曲线的周长或曲面的表面积相等时，求其所围面积或体积为最大时的曲线和曲面。这一问题也叫古典等周问题或特殊等周问题。它起源于古希腊传说，据载那时希腊人已知道曲线等周问题的解答是圆。公元前180年左右古希腊数学家芝诺多罗斯写过一篇有关等周图形的论著，可惜已失传，其中若干命题被公元4世纪的学者帕波斯记载，得以保存。1697年瑞士数学家雅各布·伯努利重提等周问题，将它纳入分析学中曲线和求极值的范畴中讨论，由此引起变分学的发展。欧拉、拉格朗日、勒让德等人对此做出贡献。1838～1842年瑞士数学家施泰纳在假定极大性存在的前提下用综合方法证明了：在具有一定周长的所有平面图形中，圆周包围着最大的面积。他还证明了在具有一定周长的所有三角形中，等边三角形具有最大的面积。1870年德国数学家外尔斯特拉施用变分法证明了极大性的存在。一般来说，在积分值 $\int_c G(x,y,y')dx=$ 常数的条件下，求使泛函 $\int_c F(x,y,y')dx$ 为最大的曲线 $c: y=y(x)$ 这一条件的变分问题，称为广义等周问题。此外等周问题也常用图形中各种量之间的不等式来证明。三维的等周问题解答是球面，有许多实际例证，被称为平稳问题。

柯尼斯堡七桥问题(Königsberg seven bridges problem) 18世纪初流传于普鲁士柯尼斯堡镇(今苏联加里宁格勒)的一个问题。城内一条河的两支流绕过一个岛，有七座桥横跨这两支流。问一个散步者能否走过每一座桥，而且每座桥只走过一次。1736年欧拉圆满地解决了这一问题，证明这种方法是不存在的。他将实际问题抽象为平面上的点与线的组合，每一座桥视为一条线，桥所连接的地区视为点，这样如果从某一点出发最后再回到这一点的话，则连接这一点的线数必须是偶数。欧拉最后给出任意一种河——桥图能否全部走一次的判定法则，即如果通奇数座



桥的地方不止两个,满足要求的路线不存在;如果只有两个地方通奇数座桥,则可从其中任一地出发找到所要求的路线;如果没有一个地方通奇数座桥,则从任一地出发,所求的路线都能实现,他还说明了怎样快速找到所要求的路线。欧拉的论文在圣彼得堡科学院作了报告,成为图论历史上第一篇重要文献。七桥问题引发了后来网络理论的研究,还被认为是拓扑学理论的基本应用题,且对解决最短邮路等问题很有帮助。

蜂房问题(**problem of honeycomb**) 由观察研究蜜蜂房引出的一个问题:由怎样的三个全等菱形作顶盖封闭一个正六棱柱,使所得立体在具有相同容积条件下,表面积最小。它最先由18世纪法国自然哲学家雷奥米尔提出,他猜测菱形的两个角应分别为109°28′和70°32′,这个数值是另一个法国天文学家马拉尔迪对蜂房实测后得出的。在此之前已有不少学者注意到蜂房的奇妙结构。例如公元4世纪初古希腊的帕波斯认为六棱柱的巢是最经济的结构;17世纪初德国天文学家开普勒断言蜂房的角应与菱形十二面体的角一致,等等。雷奥米尔的猜想由瑞士数学家柯尼希证实,但他计算的结果因所用对数表有误而与实际数值有两分之差。1743年英国数学家马克劳林用初等方法进一步得到该问题的解,菱形的钝角为109°28′16″,锐角是70°31′44″,与实测一致。后来许多人又给出各种解法,其中以普通微积分里求极值的方法较简单。此外,每两个相毗连的菱形面皆成一个120°的二面角,每两个棱柱所成的二面角显然也是120°。蜂房问题是生物现象启示人类的典型例子,对数学研究和数学教育有特殊作用。

格点问题(**lattice-point problem**) 数论中的一类重要问题,亦称整点问题。整点是指坐标均为整数的点。格点问题是研究一些特殊区域或一般平面区域上格点(整点)的个数。它起源于两种特殊情形,一是求以原点为中心,半径为$\sqrt{x}$的圆上的格点数$A(x)$,显然有$A(x)=\sum_{n\leqslant x}r(n)$,其中$r(n)$是$x_1^2+x_2^2=n$的全体整数解的个数。18世纪法国数学家高斯证明了$A(x)=\pi x+O(\sqrt{x})$,问题转为求使余项估计$O(x^\lambda)$成立的$\lambda$的下确界$\alpha$的问题,称为圆内格点问题或高斯圆问题。二是求在$uv\leqslant x,u\geqslant 1,v\geqslant 1$所围成的闭区域上的格点数$D(x)$。1849年德国数学家狄利克雷证明了$D(x)=x\ln x+(2c-1)x+O(\sqrt{x})$,其中$c$是欧拉常数,问题转化为求出使余项估计$O(x^\lambda)$成立的$\lambda$的下确界$\theta$。因为$D(x)=\sum_{n\leqslant x}d(n)$,其中$d(n)$是除数函数,所以此种情形也称为狄利克雷除数问题。利用初等方法,俄罗斯数学家沃罗诺伊于1903年证明了$\theta\leqslant 1/3$;波兰数学家谢尔品斯基于1906年证明了$\alpha\leqslant 1/3$。利用较深刻的分析方法,荷兰数学家范德科皮特于1922～1937年证明了$\alpha\leqslant 37/112$和$\theta\leqslant 27/82$;

英国数学家蒂奇马什证明了 $\alpha\leqslant 15/46$；中国数学家华罗庚于 1942 年证明了 $\alpha\leqslant 13/40$；陈景润、尹文霖于 1963 年证明了 $\alpha\leqslant 12/37$；迟宗陶于 1950 年证明了 $\theta\leqslant 15/46$。到 1985 年苏联数学家科列斯尼克和另一数学家诺瓦克已分别证明了 $\theta\leqslant 139/429$ 和 $\alpha\leqslant 139/429$。

另一方面，英国数学家哈代于 1916 年证明了 $\alpha\geqslant 1/4$；英哈姆于 1940 年证明了 $\theta\geqslant 1/4$，故人们猜测 $\theta=\alpha=1/4$，但至今未能证明。该问题可直接推广到多维情形，例如球内格点问题、k 维椭球内的格点问题以及 k 维除数问题等。包括中国数学家在内的许多数学家对此有研究。对一般平面区域的格点问题，1924 年贾尔尼科证明了长度为 L 的若尔当闭曲线所围面积为 A，其上的格点数设为 N，则有 $|N-A|<L$。

华林问题（Waring's problem） 1770 年英国数学家华林提出的一个问题：任意正整数都可以表示为不多于 4 个的平方数之和，或不多于 9 个的立方数之和，或不多于 19 个的 4 次方数之和等等。他认为，对任意给定的整数 $k\geqslant 2$，必有一正整数 $S(k)$ 存在，使得每个正整数必为 $S(k)$ 个非负的 k 次方数之和，即不定方程 $x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=n$ 对所有整数 $n\geqslant 0$ 有非负整数解 x_j $(1\leqslant j\leqslant s)$。华林本人没有给出任何解答，直到 1909 年德国数学家希尔伯特才证明了 $S(k)$ 的存在性。后人改称华林问题为华林定理。对华林问题的研究集中在求 $S(k)$ 的最小值 $g(k)$ 上。华林本人猜测 $g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$。1770 年法国数学家拉格朗日证明了 $g(2)=4$；1909 年威弗里奇证明了 $g(3)=9$。若把上述不定方程的结果改为对于充分大的 n 成立，则这样的 $S(k)$ 的最小值记为 $G(k)$。利用对 $G(k)$ 的上界估计，我国数学家陈景润于 1964 年证明了 $g(5)=37$。巴拉萨布雷尼安和德雷斯于 1985 年证明了 $g(4)=19$。易证 $g(k)\geqslant 2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$，当 $k\geqslant 6$ 时，有条件 $3^k-2^k+2\leqslant(2^k-1)\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]$ 时，则 $g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$。1957 年马勒尔证明当 k 充分大时此条件一定成立，并猜测对所有 $k\geqslant 6$ 这条件都成立。1920—1928 年英国数学家哈代和李特尔伍德利用圆法研究华林问题取得突破，将问题引向讨论 $G(k)$。我国数学家华罗庚（1938—1957），苏联数学家维诺格拉多夫（1959）等人在这方面做出较大贡献。华林问题有各种推广，例如华林——哥德巴赫问题，多项式华林问题，代数数域的华林问题等。它是堆垒数论研究中方兴未艾的重要课题之一。

比丰投针问题（Buffon's needle problem） 18 世纪法国数学家比丰和勒克莱尔提出的问题，记载于比丰 1777 年出版的著作中："在一平面上画有一组间距为 d 的平行线，将一根长度为 $l(l<d)$ 的针任意投掷这个平面上，求此针与任一平行线相交的概率。比丰本人证明了该针与任意平行线相交的概率为

$$p=\frac{2l}{\pi d}。$$

利用这一公式，可以用概率方法得到圆周率 π 的近似值。将这一试验重复进行多次，并记下相交的次数，从而得到 p 的经验值，即可算出 π 的近似值。1850 年一位叫沃尔夫的人在投掷五千多次后，得到 π 的近似值为 3.1596。1855 年英国人史密斯投了 3200 次，得到的 π 值为 3.1553。另一英国人福克斯投掷了仅 1100 次，却得到了精确的三位小数的 π 值 3.1419。目前宣称用这种方法得到最好 π 值的是意大利人拉泽里尼，他在 1901 年投掷了 3408 次针，得到的圆周率近似值精确到 6 位小数。比丰投针问题是第一个用几何形式表达概率问题的例子，它开创了使用随机数处理确定性数学问题的先河，为概率论的发展起了一定作用。

欧拉 36 军官问题（Euler's 36 officers problem） 1779 年由数学家欧拉提出的问题。原题大意是：从 6 个兵种中抽出 6 种军衔的军官各一人，问这 36 个军官能否排成 6×6 的方阵，使每一行和每一列中都有各兵种和各军衔的军官。现在一般叙述为两个 6 阶拉丁方是否可以正交。后人称两个可以正交的拉丁方形成的方阵为欧拉方阵。欧拉本人没有解决这一问题，他只于 1782 年提出一个猜想：$n=4t+2$ 时 n 阶欧拉方阵不存在。1901 年法国人塔里用穷举法证明了 $n=6(t=1)$ 时欧拉方阵不存在，得出 36 军官问题的否定解答。但到 1959 年印度—美国数学家玻色和史里克汉德却成功地构造了 22 阶（$t=5$）欧拉方阵，从而推翻了欧拉猜想。他们还证明了当 $n\neq 2, n\neq 6$ 时，n 阶欧拉方阵必定可以做出。不久美国数学家帕克就做出了 10 阶（$t=2$）的欧拉方阵。最近又有人将这一问题扩展到三维情形。阿金等三位数学家在 1982 年构造了一个 6 阶拉丁 3 维立方体，第一次证明了叠合三个 6 阶拉丁立方是可能的，从而在三维里解决了“欧拉 36 军官问题”。拉丁方和欧拉方阵在正交试验法上有重要应用，也是数学游戏中长久不衰的趣题来源。

马斯凯罗尼圆规问题（Mascheroni's compasses problem） 几何作图中的一个著名问题，即如果一条直线有两个点是已知的就被认为是确定的，则只用圆规能否完成尺规作图的一切问题。1672 年丹麦数学家莫尔证明了该问题的肯定答案，但他的工作长期无人知晓，直到 1928 年才被发现。1797 年意大利数学家马斯凯罗尼出版了一本《圆规几何》专著，重新提出并解答了这一问题，使其大显于世，后人称之为马斯凯罗尼圆规问题。尺规作图的步骤由三种基本作图法组成：①找出两条直线的交点；②找出一条直线与一个圆的交点；③找出两个圆的交点。马斯凯罗尼运用圆规首先解决两个已知线段的和或差的作图和求与三条已知线段成比例的第四条线段的作图，然后用圆规完成了①②两种基本作图法。1890 年德国几何学家阿德勒又运用逆变换法找到该问题的一个新证明。圆规问题长期为人注意。最

近又有数学家提出只用开口固定的圆规作图问题，并取得一系列成果。这可以看作是马斯凯罗尼圆规问题的继续和发展。

施泰纳直尺问题（Steiner's straightedge problem） 几何作图中的一个著名问题。即在平面上给出一个圆及其圆心时，能否只用直尺完成尺规作图的一切问题(此处作一圆指作出圆心及其圆周上的一点)。化简尺规作图使用的工具由来以久，约980年阿拉伯数学家艾布·瓦法提出用直尺和有固定开口的圆规作图。1673年可能是丹麦数学家莫尔写的一本小册子中证明了所有的尺规作图都可以用直尺和有固定开口的圆规来作图。1759年瑞士数学家兰伯特研究只用直尺作图问题，发现类似于$\sqrt{ab}$的式子只用直尺不能作图，因此指出需要给出一个辅助定圆及其圆心才能完成全部尺规作图问题。1833年瑞士数学家施泰纳证明了这一论断的正确性，后人称之为施泰纳直尺问题。他先完成了5种预备作图法：①过一定点作一给定直线的平行线；②过一定点作一给定直线的垂线；③从一定点向指定方向画出已知长度线段；④作已知三线段的第四比例项；⑤作两已知线段的比例中项。然后完成作一已知线与已知圆的交点和作两个已知圆的交点这两种基本作图法。1904年意大利数学家塞韦里又证明尺规作图可以只用直尺和一段给定圆弧(不管多小)及其圆心就可以完成。还有许多数学家证明了尺规作图可以只用平行直尺、直角尺、锐角尺中的一种来完成，这些结果推进了施泰纳直尺问题的研究。

柯克曼女生问题（Kirkman's girl students problem） 1850年由英国数学家柯克曼提出的一个问题：某学生宿舍共有15名女生，每天三人一组进行散步，问怎样安排，才能使每位女生有机会与其他每一位女生在同一组中散步，并恰好每周一次。问题提出后引起广泛讨论，并很快有了多种解答。其中较有代表性的是一位叫皮尔斯的人于1860年左右给出的。他先假定一位女生固定在某一组，再将其他14位女生编号(1～14号)，并按照一定规律安排了星期天的分组散步，则其它6天星期r的散步($r=1,2,\cdots 6$)分组可按原编号与r的数字之和安排(和数超过14则减去14)。这种方法被数学家西尔威斯特认为是最佳解法。一些数学家还将问题做了扩展，使之成为组合论中的难题：设有N个元素，每三个一组分成若干组。这些组分别组成一个系列，现在称为柯克曼序列。若每一元素与其它元素恰有一次同组的机会，问将N分成这种序列要满足的充分必要条件是什么？怎样组成此序列？在女生问题中，序列数为7，$N=15$是适合条件的数。但N的一般解答直到20世纪60年代后才有突破。我国数学家陆家羲对此做出过重要贡献。

四色问题（four colour problem） 亦称四色猜想，1852年由英国人格思里提出。即在为一平面或一球面的地图着色时，假定每一个国家在地图上是一个连通域，并且有相邻边界线的两个国家必须用不同的颜色，问是否只要4种颜色就可完成

着色。1878年英国数学家凯莱重新提出这一问题，引起人们重视。1879年英国数学家肯普提出用可约构形证明四色问题，虽然他的证明过程有漏洞，但为该问题的解决指出方向。1890年英国人希伍德沿着这一方向证明了任何地图的着色只用5种颜色就足够了，取得初步进展。1913年美国数学家伯克霍夫发现一些新的可约构形。1968年挪威数学家奥雷等人证明了不超过40个国家的地图一定可以用4种颜色进行着色，从另一个方面推进了四色问题的研究。70年代初人们致力于寻找可约构形中的不可免完备集，因为用它可以通过数学归纳法证明四色问题。1976年美国数学家哈肯和阿佩尔花了1200多小时的电子计算机工作时间，找到一个由1936个可约构形所组成的不可免完备集，因而在美国数学会通报上宣称证明了四色猜想。后来他们又将组成不可免完备集的可约构形减少到1834个。四色问题的研究对平面图理论、代数拓扑论、有限射影几何和计算机编码程序设计等理论的发展起了推动作用。

希尔伯特数学问题（**Hilbert's mathematical problems**） 1900年德国数学家希尔伯特在巴黎第二届国际数学家代表会上所做演讲中提出的23个问题。内容涉及现代数学大部分重要领域，指导思想是为新世纪的数学发展提供目标和预测成果，推动了20世纪数学的发展。

1. 连续统假设。1963年美国数学家科恩证明了该问题的真伪不可能在策梅罗—弗伦克尔公理系统内判明。

2. 算术公理体系的相容性。希尔伯特给出算术公理相容性的设想，后来发展成为“元数学”或“证明论”。但1931年奥地利—美国数学家哥德尔的“不完备性定理”指出了用“元数学”证明算术公理相容性的不可能。数学相容性问题至今尚未解决。

3. 只根据合同公理证明底面积相等、高相等的两个四面体有相等的体积是不可能的。即不能将这两个等体积的四面体剖分为若干相同的小多面体。1900年德国数学家德恩给出证明。

4. 直线作为两点间最短距离的几何学结构的研究。许多数学家致力于构造和探讨各种特殊的度量几何，在研究该问题上取得很大进展。但问题并未完全解决。

5. 拓扑群成为李群的条件。1952年由美国数学家格利森、蒙哥马利和齐平解决了这一问题，证明了不要定义群的函数的可微性假设这一条件原结论成立。

6. 物理学各分支的公理化。1933年苏联数学家科尔莫戈罗夫等人建立起概率论的公理化体系。量子力学、热力学的公理化方法也有进展，但公理化的物理学的一般意义仍需探讨。

7. 某些数的无理性与超越性。1934年苏联数学家格尔丰德，1935年德国数学家施奈德各自独立解决了该问题的后半部分，证明了对于任意代数数$\alpha \neq 0,1$，和任意代数无理数$\beta \neq 0$、α^β是超越数。

8. 素数问题。包括黎曼猜想、哥

德巴赫猜想等问题。一般情况下的黎曼猜想没有解决。哥德巴赫猜想的最好结果是中国数学家陈景润1973年发表的，但离最终解决尚有距离。

9. 一般互反律的证明。已由日本数学家高木贞治(1921)和奥地利数学家阿廷(1927)解决。

10. 丢番图方程可解性的判别。即能否通过有限步骤判定不定方程是否存在有理整数解。1968年英国数学家贝克给出含有两个未知数方程的肯定解答。1970年苏联数学家马季亚谢维奇证明一般情况不能判定。

11. 一般代数数域的二次型论。德国数学家哈塞(1929)和西格尔(1936、1951)在该问题上获得重要结果。

12. 类域的构成问题。具体为阿贝尔域上的克罗内克定理推广到任意代数有理域。至今尚未解决。

13. 不可能用只有两个变数的函数解一般的七次方程。1957年苏联数学家阿诺尔德和科尔莫戈罗夫给出连续函数情形的解答。若要求是解析函数，问题仍未解决。

14. 证明某类完全函数系的有限性。1958年日本数学家永田雅宜证明了存在群 r，其不变式所构成的环不具有有限个整基，给出否定解答。但1978年数学家汉弗莱斯证明对任意代数群 G 只要 G^0 是简约的(或者是平凡的)，该问题恒有肯定解答。

15. 舒伯特计数演算的严格基础。代数几何基础已由荷兰数学家范德瓦尔登(1938—1940)和法国数学家韦伊(1950)等人解决。该问题的纯代数处理已有可能，但舒伯特演算的合理性仍待解决。

16. 代数曲线与曲面的拓扑研究。对问题的前半部分近年来不断有重要结果产生。对后半部分，1955年苏联数学家彼得罗夫斯基曾声明证明了 $n=2$ 时极限环的个数不超过3，但1967年被人发现证明有误。1979年中国数学家史松龄、陈兰荪和王明淑等人举出至少4个极限环的反例。

17. 正定形式的平方表示式。1926年由奥地利数学家阿廷解决。

18. 由全等多面体构造空间。该问题的一部分由德国数学家比贝尔巴赫(1910)、赖因哈特(1928)和黑斯赫(1935)等人解决。整个问题尚未完全解决。

19. 正则变分问题的解是否一定解析。苏联数学家伯恩斯坦于1904年证明了一个变元的解析非线性椭圆方程其解必定解析。该结果又由他本人和彼得罗夫斯基等人推广到多变元和椭圆组的情形。

20. 一般边值问题。偏微分方程边值问题的研究正在蓬勃发展。

21. 具有给定单值群的线性微分方程的存在性。已由希尔伯特本人(1905)和德国数学家罗尔(1957)等人解决。

22. 用自守函数将解析关系单值化。一个变数的情形已由德国数学家克贝(1907)等人解决。后来在该问题的研究上又有许多成果。

23. 发展变分学的方法。希尔伯特本人和许多其他数学家对此做出重要贡献。

在现代数学中许多重要成果的取得和新学科的发展与希尔伯特问题有关。这些问题对数学发展产生了深远影响。

费马猜想(Fermat's conjecture) 又称费马大定理或费马问题，是数论中最著名的世界难题之一。1637年，法国数学家费马在巴歇校订的希腊数学家丢番图的《算术》第Ⅱ卷第8命题旁边写道："将一个立方数分为两个立方数，一个四次幂分为两个四次幂，或者一般地将一个高于二次的幂分为两个同次的幂，这是不可能的。关于此，我确信已发现一种美妙的证法，可惜这里空白的地方太小，写不下。"费马去世后，人们找不到这个猜想的证明，由此激发起许多数学家的兴趣。欧拉、勒让德，高斯、阿贝尔、狄利克雷、柯西等大数学家都试证过，但谁也没有得到普遍的证法。300多年以来，无数优秀学者为证明这个猜想，付出了巨大精力，但是这个猜想至今未能证明，也无法否定。一般倾向性的看法是，费马所说的证明是错的。用不定方程表示费马大定理是：当$n>2$时，不定方程$x^n+y^n=z^n$没有$xyz\neq0$的整数解。为了证明这个结果，只需证明方程$x^4+y^4=z^4$，$(x,y)=1$和方程$x^p+y^p=z^p$，$(x,y)=(x,z)=(y,z)=1$(p是一个奇素数)均无$xyz\neq0$的整数解。$n=4$的情形已由莱布尼茨和欧拉解决。费马本人证明了$p=3$的情形，但证明不完全。勒让德(1823)和狄利克雷(1825)证明了$p=5$的情形。1839年，拉梅证明了$p=7$的情形。1847年，德国数学家库默尔对费马猜想作出了突破性的工作。他创立了理想数论，这使得他证明了当$p<100$时，除了$p=37,59,67$这三个数而外，费马猜想都成立。后来他又进行深入研究，证明了对于上述三个数费马猜想也成立，他的工作仍有一些缺陷。在近代数学家中，范迪维尔对费马猜想作出重要贡献。他从本世纪20年代开始研究费马猜想，首先发现并改正了库默尔证明中的缺陷。在以后的30余年内，他进行了大量的工作，得到了使费马猜想成立的一些充分条件。他和另外两位数学家共同证明了当$P<4002$时费马猜想成立。现代数学家还利用大型电子计算机来探索费马猜想，使P的数目有很大的推进。到1977年为止，瓦格斯塔夫证明了$P<125000$时，费马猜想成立。《中国数学会通讯》1987年第2期据国外最新消息报导，费马猜想近年来取得了惊人的研究成果：格朗维尔和希思－布龙证明了"对几乎所有的指数，费马大定理成立"。即若命$N(x)$表示在不超过x的整数中使费马猜想不成立的指数个数，则$\frac{N(x)}{x}\to0\quad(x\to\infty)$证明中用到了法尔廷斯(Faltings)的结果。另外一个重要结果是：费马猜想若有反例，即存在$x>0,y>0,z>0,n>2$，使$x^n+y^n=z^n$，则$x>10^{1,800,000}$。

哥德巴赫猜想(Goldbach's conje'cture) 数论中最著名的世界难题之一。是由哥德巴赫和欧拉在1742年数次通信中提出的猜测：①每个大于4的偶数是两个奇素数之和，如$6=3+3,8=3+5,14=3+11=7+7$；②每个大于7的奇数是

三个奇素数之和，如 9＝3＋3＋3，15＝3＋5＋7。由于 $2n+1=(2n-2)+3$，所以从①成立可以推出②成立。1923 年，英国数学家哈代和李特伍德应用圆法研究这两个猜想，得到了一些重要的条件结果。在此基础上，苏联数学家维诺格拉多夫于 1937 年通过改进圆法和利用他的估计线性素变数指数和方法，证明了每个充分大的奇数 n 是三个素奇数之和，且给出了其表法个数的表达式，基本上解决了猜想②。这个结果通常称为哥德巴赫一维诺哥拉多夫定理或三素数定理。利用他的思想，华罗庚等 5 位数学家于 1937—1938 年间各自独立地证明了：几乎所有的偶数都是两个奇素数之和。1980 年，已验证对所有不超过 10^8 的偶数，猜想①是成立的。但是猜想①至今仍未解决，类似于猜想②的结果也没有得到，于是数学家转向研究较弱的命题 $\{r,s\}$：每个充分大的偶数是不超过 r 个素因数的乘积与不超过 s 个素因数的乘积之和。猜想①大体上就是命题 $\{1,1\}$。筛法是研究命题 $\{r,s\}$ 的主要方法。挪威数学家布龙用他所提出的布龙筛法，于 1920 年首先证明了命题 $\{9,9\}$。1950 年前后，挪威籍美国数学家赛尔伯格提出另一种筛法，并宣布利用他的方法可以证明命题 $\{2,3\}$。1957 年，王元利用赛尔伯格筛法首先证明了命题 $\{2,3\}$。1948 年，匈牙利数学家雷尼利用布龙筛法和林尼克（苏联数学家）筛法，证明了命题 $\{1,s\}$，这里 s 是一个未计算出的大常数。通过对筛法和大筛法的不断改进，60 年代初，苏联数学家巴尔班、我国数学家潘承洞、王元等分别证明了命题 $\{1,5\}$ 和 $\{1,4\}$。1966 年，我国数学家陈景润证明了 $\{1,2\}$，是迄今为止的最好结果，通常称之为陈景润定理。

若令 $M(x)$ 表示不超过 x 的且不能表为两个素数之和的偶数之个数，皮茨（Pintz）在 80 年代证明了：对于任意的 $\varepsilon>0$

$$M(x) \ll x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}.$$

此处与 $\ll$ 有关的常数依赖于 ε。

孪生素数猜想（the conjecture of twin primes） 相差 2 的一对素数，称为孪生素数。例如，3 和 5，5 和 7，11 和 13，17 和 19，29 和 31，…，10016957 和 10016959 等等都是孪生素数。到 1988 年为止，人们所知道的最大的孪生素数是

$$260497545\times 2^{6625}\pm 1.$$

所谓孪生素数猜想，即人们猜测存在无穷多对孪生素数。这个猜想是在 1849 年由波林那克提出来的，至今没有解决。但一般都认为它是正确的可能性很大。在这方面的最好结果是我国数学家陈景润于 1966 年得到的：存在无穷多个素数 P，使 $P+2$ 是不超过两个素数之积。

克罗内克青春之梦（Kronecker's dream of youth） 代数数论中分圆域理论方面的一个问题。所谓分圆域，是指在有理数域上添加 n 次本原单位根 $\zeta_n=e^{2\pi i/n}$ 而得到的数域 $K=Q(\zeta_n)$。如果 L/K 是数域的阿贝尔扩张，并且它的伽罗瓦群是阿贝尔群，那么 L 称为 K 的阿贝尔扩张。如果 K 是有理数域 Q 的阿贝尔扩张，那么 K 称为阿贝尔数域。从

伽罗瓦理论可知,分圆域的每个子域都是阿贝尔数域,反之,每个阿贝尔数域也必是某个分圆域的子域,这就是著名的韦伯－克罗内克定理。关于希尔伯特第十二问题:能否对任意的代数数域 K 明显地构造出 K 的全部阿贝尔扩张?上述定理给出了 $K=Q$ 时的结果。1853 年,20 岁的德国数学家克罗内克猜想:每个虚二次域 K 的极大阿贝尔扩域是将 K 添加某种椭圆函数在全部有理点处的取值而得到的域,这就是所谓克罗内克青春之梦。这一猜想引起许多学者的兴趣,希尔伯特也曾做过重要工作。1920 年,日本数学家高本贞治创立了类域论,他把类域的定义作了推广,证明了一个代数数域的任何阿贝尔扩张都可以表示为该数域上的类域。这样一来,一般的阿贝尔扩张的性质就十分清楚,从而彻底解决了克罗内克的猜想。

黎曼猜想(**Riemann's conjecture**) 是迄今为止没有解决的最著名的数学难题之一。1859 年由德国数学家黎曼在他的著名论文《论不大于一个给定值的素数个数》中提出。在这篇文章中,作者研究了所谓黎曼函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s},$$

其中 $s=\sigma+it$ 为复变数。黎曼认为素数性质可以通过复变函数 $\zeta(s)$ 来研究,并对 $\zeta(s)$ 作了深入的探讨,得到许多重要结果。在此文中,他提出了六个猜想,其中最著名、至今未获证实的就是现称的“黎曼猜想”:方程 $\zeta(s)=0$ 的解都位于复平面的 $\sigma=\frac{1}{2}$ 这条直线上。围绕这个猜想,在解析数论中又出现了一系列难题,特别是一些与素数有关的问题和类似的猜想。黎曼猜想与有关问题的研究极大地推动了解析数论和代数数论的发展。

黎曼猜想与函数 $\pi(x)$(不超过 x 的素数个数)有密切关系。已经证明它等价于关于 $\pi(x)$ 的极为精密的表达式

$$\pi(x)=\mathrm{li}x+0(\sqrt{x}\log x),$$

此处 $\mathrm{li}x=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$。到目前为止,关于 $\pi(x)$ 的最精密的估计是由苏联数学家维诺格拉多夫等人得到的 $\pi(x)=\mathrm{li}x+0(x\exp(-(\log x)^{0.6-\varepsilon}))$,其中 ε 为任意正数。

黎曼猜想离解决还相差很远。法国数学家阿达马和普辛提出了一种处理黎曼猜想的方法。可以证明 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点只可能在复平面 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 这个带状区域中,他们的基本思想在于估计 $\zeta(s)$ 的非平凡零点所落的带状区域的范围。如果能够证明这个带状区域缩小到一条直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 时,则黎曼猜想得证。而今这方面的结果离猜想的解决还相当遥远。

另一种处理黎曼猜想的方法由英国数学家哈代于 1914 年提出。他研究了 $\zeta(s)$ 在 $\sigma=\frac{1}{2}$ 且 $0<t\leqslant T$ 的直线段上的零点个数 $N_0(T)$,证明了当 $T\to\infty$ 时 $N_0(T)\to\infty$,即 $\zeta(s)$ 有无穷多个非平凡零点落在直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上。后来,哈代与李特尔伍德合作又得到更精确的结果。1942

年，赛尔伯格利用新的想法建立了$N_0(T)$与$\zeta(s)$的所有非平凡零点总数$N(T)$的关系。1974年美国数学家莱文森成功地证明了，对于充分大的实数T，$N_0(T)\geqslant\frac{1}{3}N(T)$。这就是说，　(s)至少有三分之一的非平凡零点落在$\sigma=\frac{1}{2}$直线上。1980年，我国数学工作者楼世拓、姚琦改进了莱文森的结果，证明了$N_0(T)>0.35N(T)$。后来，赫斯－布朗(Heath－Brown)证明了$N_0(T)\geqslant 0.55N(T)$。

现代一些数学家还利用电子计算机来研究黎曼猜想。1968年，美国的三位数学家通过计算证明了$\zeta(s)$的前三百万个非平凡零点落在$\sigma=\frac{1}{2}$直线上。最近，勃赖特的计算证实了$\zeta(s)$开头的七千万个零点都位于直线$\sigma=\frac{1}{2}$上。

还有许多学者从其它角度来研究$\zeta(s)$的零点性质，得到十分丰富和重要的结果，但是黎曼猜想的最终证明，还有待于数学家们的继续努力。

连续统假设(**Continuum hypothesis**)　德国数学家康托尔在1878年提出的关于连续统的势的一个假设，是集合论中的一个著名猜想，又称连续统问题。通常称实数集为连续统，把连续统的势记作C。任意两个连续统是等势的。1847年，康托尔证明了连续统的势与自然数集之幂集的势是相等的，如果用$2^{\aleph_0}$($\aleph_0$表示自然数集的势)表示后者的势，则上述结果可表示为$C=2^{\aleph_0}$. 1878年，康托尔猜测：实数集的子集除了有穷子集，可数无穷子集以及与实数集本身等势的子集外，再没有别样的子集。也就是说，康托尔猜测：实数集的一切无穷子集或者与自然数集等势或者与连续统等势。这个猜测就称连续统假设，简记为CH。1900年希尔伯特在巴黎国际数学家大会上所做的著名讲演中把CH列为当时未解决的23个数学问题中的第一个。1908年希尔伯特又把它推广为：对于每个集S，决不会有一集，其势高于S的势但低于S的幂集的势，称为广义连续统假设，简记为GCH。连续统假设提出以来至今已有百余年的历史，但始终未获得完全解决，它已成为数学史上堪与费马猜想、黎曼猜想相并列的一大难题。

集合论中最著名的公理是选择公理，简记为AC。人们把包括AC的策梅洛－弗伦克尔公理系统记为ZFC，以区别不包括AC的ZF系统。近50年来，对AC和CH的研究取得了很大进展。1938年，奥地利数学家哥德尔在《选择公理和广义连续统假设同集合论公理的协调性》(1940)一书中证明了，从ZF推不出AC的否定，从ZFC推不出GCH的否定(因而也推不出CH的否定)，即AC对于ZF，CH对于ZFC是相对协调的。25年之后，美国数学家科恩解决了相反方面的问题，他证明了AC对于ZF，CH对于ZFC的相对独立性，即从ZF推不出AC、从ZFC推不出CH。综合哥德尔和科恩的结果，就是AC和CH分别在ZF和ZFC中都是不可判定的。这样，连续统问题在某种程度上获得了解

决，并成为20世纪最大的数学成就之一。目前，人们还在寻找迄今尚未发现的与其他公理协调的可信赖的新的公理，以期在更有效的途径上来解决连续统问题。

伯恩赛德猜想(Burnside's conjecture) 群表示论中的一个问题。如果把所有的有限群和全体整数相比，那么单群就象素数。任何整数可化为素数之积，任何有限群则可以在合成列的意义下分解为单群。因此，单群是构造有限群的基本元素。那么，有限单群共有多少类？这个问题从19世纪末开始讨论，100年来，许多数学家在寻求答案。英国数学家伯恩赛德在研究群论的过程中，提出过许多猜想，其中一个是(1902年提出)："除了只含素数个元素的循环群外，一切有限单群都是含偶数个元素的。"1963年，美国数学家汤普森和菲特在《太平洋数学杂志》上发表了题为《奇数阶群是可解的》的长篇论文(238页，占整整一期)肯定地解决了伯恩赛德猜想。伯恩赛德猜想的解决使有限单群的研究有很大发展，近年来关于有限单群的分类问题已得到解决。

庞加莱猜想(Poincaré Conjecture) 拓扑学中最重要的问题之一。球面是数学中最简单最常见的闭流形。从拓扑学的观点看，n维球面的特征是什么？二维球面是单连通的闭曲面，而且每个单连通的闭曲面都与二维球面同胚。三维的情形怎样呢？代数拓扑学的奠基人、法国数学家庞加莱在1904年提出下列猜测：单连通的三维闭流形必与三维球面同胚。这是一个简明易懂并且很基本的问题，但是随着许多人尝试的失败，甚至连大数学家也发表过出错的"证明"，这个猜想成了数学上的著名难题。

后人接着猜测：当维数大于等于4时，单连通的闭流形如果与n维球面有相同的同调群，也必与n维球面同胚。这就是n维的庞加莱猜想，也称广义庞加莱猜想。

1960年，美国数学家斯梅尔(S. Smele，1930—)证明了$n\geqslant5$的庞加莱猜想，并因此而获得1965年的维布伦奖和1966年的菲尔兹奖。1981年，美国数学家弗里德曼证明了$n=4$时庞加莱猜想成立。而庞加莱最初的猜想尚未解决。

对庞加莱猜想的研究极大地推动了拓扑学的发展，四维庞加莱猜想的证明就导致一个十分重要的发现：四维的欧氏空间不同于其余维数的欧氏空间，它具有某些不寻常的微分结构。

卢津猜想(Luzin's conjecture) 这是三角级数论中的一个重要问题。早在本世纪初，人们已经能把任何平面可积的函数展开成傅立叶级数：$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$。这里无穷级数的"收敛性"是指平方平均收敛，那么，它是否能做到几乎处处收敛？1913年，俄国数学家卢津猜想它是对的，这就是卢津猜想。这个猜想发表之后，引起世界上许多第一流的数学家的关注。在50年的时间内，它既不能被证实，又不能被否定。围绕着这个猜想，出现了从正反两方面研究的一些重要成果。1923年，柯尔莫哥洛

夫构造了一个 L 可积(不平方可积)的函数,它的傅立叶级数几乎处处发散。1926 年,他又发现了一个傅立叶级数处处发散的 L 可积函数。1925 年,柯尔莫戈洛夫、谢利维奥尔斯托夫和普莱斯纳从肯定卢津猜想方面做出了努力。以后的 40 多年内没有什么显著的进展,在相当一部分数学家中,产生了否定卢津猜想的倾向。1966 年,卡尔森利用哈代-李特尔伍德极大函数等方法证明了卢津猜想。1967 年,亨特证明了对于 $L^p[0,\pi]$ $(p>1)$ 中的函数,卢津猜想也成立。这样一来,卢津猜想当 $p=1$ 时有反例,$p>1$ 时都成立,得到完全解决。

比伯巴赫猜想(**Bieberbach's conjecture**) 曾是复变函数论中单叶函数研究的一个中心问题。大意是:若 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ 是定义在单位圆内的单叶解析函数,那么 $|a_n|\leqslant n$ 对所有 n 都成立。1916 年由德国数学家比伯巴赫(L. Bieberbach,1886—1982)提出。比伯巴赫猜想十分困难和引人入胜,以致被广泛地列入研究生的课程。许多学者花费了毕生的经历试图证明它。

关于这个猜想的证明,是沿着几条途径进行的。对于 $f(z)$ 的单个系数而言、数学家们所做的工作是逐个攻破。比伯巴赫本人证明了对于第二个系数 a_2,猜想为真。1923 年德国数学家勒夫纳(Ch. Loewner)创造了参数表示法,证明了 $|a_3|\leqslant 3$。1955 年,美国数学家加拉贝迪安(P. R. Garabedian)和席费尔(M. M. Schiffer)应用变分法证明对第四个系数猜想也对。1968 年,两位数学家分别独立地证明了对第六个系数猜想成立。1972 年,第五个系数也被证明。

对于 $f(z)$ 的全体系数而言,数学家的工作是逐步接近比伯巴赫的估计。1925 年,英国数学家李特尔伍德(D. Littlewood,1885—1977)证明了 $|a_n|<en$。以后迭经改进,到 1965 年,苏联数学家米林(И. М. Милин)证明了 $|a_n|<1.243n$。1972 年,美国加州大学的菲茨杰拉尔德(C. Fitzgerald)证明了 $|a_n|<\sqrt{\frac{7}{6}}n$,他的学生又改进了这个结果。

还有一些数学家对 $|a_n/n|$ 的极限情形进行了研究。1929 年,德国数学家兰道(E. Landau,1877—1938 证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup(\sup\limits_{f}|a_{n/n}|)\leqslant(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi})e$。1955 年,海曼(W. K. Hayman,1926—)证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n/n|=\alpha\leqslant 1$,等号仅限于克贝函数。这相当于证明了当 n 充分大时,比伯巴赫猜想成立。意大利数学家邦别里也得到了引人注目的结果。

由比伯巴赫猜想产生了一系列相关的猜想,其中最重要的是米林猜想(略)。可以证明,由米林猜想能导出比伯巴赫猜想。

1983 年,美国数学家德·布朗基(L. de Branges,1932—)结合前人的方法证明了米林猜想,从而证明了比伯巴赫猜想。但是,由于德·布朗基是一位名不见经传的学者,美国数学界对他的工作不予理睬,1984 年,苏联科学院对他的证明加

以肯定，他的成就才被人们了解。

莫德尔猜想(Mordell's conjecture) 这个猜想涉及不定方程理论的一个基本问题，1922年由英国数学家莫德尔提出。其最初的提法是："任一个不可约的有理系数的二元多项式，当它的'亏数'大于或等于2时，最多只有有限个解"。后来人们把莫德尔猜想扩充到定义在任意数域上的多项式。随着抽象代数几何的出现，又用代数曲线来描述这个猜想："在亏格大于1的代数曲线上仅有有限个有理点。"

半个多世纪以来，莫德尔猜想一直刺激和吸引着许多优秀的数学家，由此激发出一系列研究工作，导致代数几何、数论和群论的许多成果。

1926年，德国数学家西格尔证明了对于超椭圆曲线莫德尔猜想成立，随后，法国数学家韦伊(1928)建立了阿贝尔簇理论，将群论和代数几何结合起来，推进了椭圆积分理论。

莫德尔猜想在20世纪60年代初获得重要突破。苏联数学家马宁(Ю. И. Манин，1937)(1963)和另一位数学家格劳尔特(H. Grauert)(1965)分别独立地证明了莫德尔猜想在函数域上的等价命题。不久，帕森(Parshin)研究了曲线上的沙法列维奇猜想(苏联数学家沙法列维奇提出的关于阿贝尔簇同构类集合的猜想)与莫德尔猜想的联系，证明了：若沙法列维奇猜想成立，则莫德尔猜想也成立。

1983年，29岁的法国数学家法尔廷斯在前人工作的基础上，先证明了有关的其他一些重要猜想，然后利用代数几何和数论中的工具，证明了莫德尔猜想。他的证明被誉为20世纪数论中最杰出的工作之一。法尔廷斯因此而荣获1986年的菲尔兹奖。

莫德尔猜想的证明，可以推出方程 $x^n+y^n=z^n$ 对于给定的 $n(n>3)$，仅有有限组非平凡解，从而推进了费马猜想的证明。

韦伊猜想(Weil's conjecture) 代数几何中的一个重要问题，1948年由法国数学家韦伊提出。其大意是：设有 n 个整系数代数方程 $f_1(x,y,\cdots,w)=0, f_2(x,y,\cdots,w)=0,\cdots,f_n(x,y,\cdots,w)=0$，试求未知整数 $x,y,\cdots,w$ 使得 f_i 都能被一个固定的素数 p 所整除。为简单起见，考虑两个变量的一个不可约多项式 $f(x,y)$，问 x,y 取那些整数值，使 $f(x,y)\equiv 0 \pmod p$？显然可限制 x,y 只取 $0,1,2,\cdots,p-1$，因此只需考虑有限组解，其数目记为 N_p。此外，还考虑 $f(x,y)=0$，其中 x,y 可以取复数，这种解组成一个流形 X。X 是一个二维的曲面，X 上不同的回路的个数称为贝蒂数 B_1。它是这个曲面上具有的"洞"的个数的两倍。可以证明

$$|N_p-(p+1)|\leqslant B_1\sqrt{p}。$$

这说明，mod$p$ 整数解的数目和复数解的几何流形之间存在着深刻的联系。韦伊将它提得更一般些。设 N_p 是方程组在 p 个元素的有限域上解的个数。对每个正整数 r，存在一个 p^r 个元素的有限域，令 N_{p^r} 表示方程组在这个域上解的个数。对每个素数 p，韦伊猜测，应该有一组复数

a_{ij}，使

$$N_r{}^r=\sum_{j=0}^{n}(-1)^i\sum_{i=1}^{B_j}a_{ij}^r,$$

这里 B_j 是 X 的贝蒂数，且 $|a_{ij}|=p^{\frac{j}{2}}$。

1965年，法国数学家格罗唐迪克证明了第一式。更困难的 $|a_{ij}|=p^{\frac{j}{2}}$，由比利时数学家德利涅于1974年解决。它揭示了特征 p 的域上流形理论与古典代数几何之间的深刻联系，轰动一时。德利涅因此获1978年菲尔兹奖。

塞尔猜想(Serre's conjecture) 1955年法国数学家塞尔猜测：多项式环上的射影模一定是自由模。这是代数 K－理论方面的一个课题，它与拓扑学有着密切的联系，其通俗提法是：一个可逆矩阵的第一行是什么样的？这当然要看元素是什么。当元素是实数时，除了(0,0,…,0)外均可。若限制在整数环中取值，则(2,4,6)就不行。可以证明，只要某一行没有大于1的公因子，它就可以成为某一可逆矩阵的第一行。那么对于一般的可换环 R(具有单位元)，是否仍具有上述类似性质？对于一阶二阶矩阵都是对的，但三阶矩阵就不成立。塞尔猜想：对某些特殊的环，在域 K 上 m 个变元的多项式环 R 来说，由它的元组成的 n 阶矩阵，其就范行$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可以是 R 上某一可逆矩阵的第一行。塞尔猜想的原始形式就是与这样的 R 上的环模有关。这个猜想公布20年之久。非平凡的第一步由塞沙迪给出(1958)，他证明当 $m=2$ 时，猜想成立。1964年，霍罗克斯对局部环(只有一个最大理想的环)证明了类似的结果。1976年，美国数学家奎伦和苏联数学家苏斯林分别独立地证明了塞尔猜想。前者获1978年的菲尔兹奖。

塞尔伯格猜想(Selberg's conjecture) 李群理论方面的一个著名猜想，大意是：除去一个例外，格子群都是算术群。这个猜想是在1960年于印度孟买召开的国际函数论会议上，由美国数学家塞尔伯格和法国数学家韦伊共同提出的。这个猜想由苏联数学家马尔古利斯解决。马尔古利斯从1968年开始研究这个猜想，他在最初(1968)的论文中对非紧致的情形作出了突破。紧接着(1969—1974)，他又深入挖掘出有关结构方面的事实，彻底证明了非紧致情形下的塞尔伯格猜想。1974年，他又综合地利用代数、分析和数论方面的近代结果，特别是各态遍历性理论，证明了这一猜想的紧致情形，得到数学界的高度评价。马尔古利斯因此荣获1978年的菲尔兹奖。

数学竞赛与数学奖

国际数学奥林匹克(**International Mathematical Olympiad**) 简称IMO。本世纪50年代兴起于东欧，后逐渐扩展为世界性的中学生数学竞赛。由罗马尼亚数学家发起，1959年夏在罗马尼亚布拉索夫举行第一届竞赛，有东欧6个国家参加，共出6道试题，分两次完成，每次3小时，满分为42分。以后每年7月利用学生放暑假的时间举行一次，每次前后历时10天左右。1965年起西欧开始参加，以后参加国家和地区逐渐增加，1989年已达50个。每届竞赛各国轮流作东，没有固定的章程和常设委员会。1980年竞赛因故未能举行，改成两个较小规模的竞赛。同年国际数学教育委员会(ICMI)作出决定，每年以主办国为中心成立组织委员会，以保证竞赛顺利进行。近年来每届竞赛还确定了会徽。竞赛初期参赛团体的人数无一定规则，一般4～8名。自1983年起确定每个国家的参赛团体人数为6名。竞赛题目由各参赛国提供，每个国家至多提供5道，再经组织委员会审选确定。评分由各国领队进行初评，东道国组成协调委员会协调评分标准，商量评定分数。近年来题目都为6道，每道题7分，满分42分。竞赛分两天举行，每天4.5小时。竞赛内容除包括初等数学外，也涉及整数论，组合论，一般拓扑学，不等式等高等数学内容，因此被称为“奥林匹克数学”。竞赛根据个人总分，评出一、二、三等奖，比例大致为1∶2∶3，得奖人数约占参赛总人数的一半左右。中国1985年首次派两名学生组成代表队参加第26届竞赛，1986年起每年派6人参赛队参加，成绩逐年提高，自1987年起参赛学生就全部获奖。1989年在西德布伦瑞克举行的第30届国际数学奥林匹克竞赛中，中国代表队以237分的成绩首次夺得团体总分第一名，共获4枚金牌和2枚银牌。1990年第31届国际数学奥林匹克在中国北京举行，中国队再接再励，在试题难度较大的情况下，以230分的总成绩又一次获得团体总分第一名，共获5枚金牌和1枚银牌。

中国数学竞赛(**mathematic competition in China**) 在向科学进军的口号鼓舞下，我国于1956年首次在北京、上海、武汉三市举行了市一级中学数学竞赛。从此一些省市开始不定期地举办中学数学竞赛，陆续举行的还有天津市(1957)、南京市(1957)、成都市(1962)、西安市(1963)、江苏省部分城市(1964)。截止1964年，全国共有8个省市举办了23次中学数学竞赛。但到1965年全部停办。直至1977年，安徽省才率先举办“文化大革命后”的第一次数学竞赛。1978年全国各地又掀起了新的

竞赛热潮。当年4月，国务院批准全国和北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东8个省市举办中学数学竞赛。先由这8个省市进行预、复赛，各推选出40～50名代表参加全国竞赛。1978年5月21日第一次全国数学竞赛在8省市同时举行。竞赛分两场，共用5小时，最后评出57名优胜者。就在这一年，另有13省市也进行了中学数学竞赛。1979和1980年继续举行了各省市及全国的数学竞赛。从1981年起实行省、市、自治区联合高中数学竞赛，在每年10月举行，由中国数学会主办，各省、市、自治区轮流作东。自1985年起，每年在全国高中联赛的基础上，选出约70名学生参加次年初办的为期一周的数学冬令营，再从中通过考试选出20名左右的学生参加为期3个月的“数学奥林匹克集训班”，最后产生出我国参加国际数学奥林匹克的6人代表队。我国还从1983年开始举办全国初中学生数学竞赛，每年4月份举行。在这两个赛事之前，各省、市、自治区也分别举行一些预选赛。此外，自1983年起，上海市相继参加了美国数学邀请赛、美国中学数学竞赛和美国初中数学竞赛三种竞赛，为我国与国外进行中学数学教学等方面的交流创造了条件。数学竞赛为我国数学界选拔了优秀人才，多数获奖者已陆续成为教学和科研领域的骨干力量。

匈牙利数学奥林匹克（**Hungarian Mathematical Olympiad**） 匈牙利为选择有数学才能的学生在中学毕业生中举办的数学竞赛。始于1894年，是世界上最早的国家级数学竞赛。最初由匈牙利文化大臣埃特沃斯男爵提议，匈牙利“物理——数学协会”通过，因此称为埃特沃斯考试。后来由数学家屈尔沙克加以发展，又改称为屈尔沙克考试。现在受国际数学奥林匹克的影响，通称为匈牙利数学奥林匹克。该竞赛每年10月举行。中间因两次世界大战和匈牙利事件间断7年。每次竞赛3道题，时间为4小时，允许使用参考书。竞赛内容涉及许多高等数学课题，着重提高学生灵活运用初等数学知识解题以及逻辑思维能力，对以后学习高等数学也有帮助。匈牙利通过举办这种竞赛，选拔和培养了一大批优秀人才，其中许多后来成为著名数学家，例如1897年的优胜者费耶尔，1898年的优胜者卡门，1903年优胜者哈尔，1904年优胜者*M*. 里斯，1912年优胜者赛格等等。在匈牙利经验的带动下，其他国家纷纷举办数学竞赛，并终于在1959年引发了国际数学奥林匹克竞赛。

苏联数学奥林匹克（**USSR Mathematical Olympiad**） 苏联是最早将数学考试与体育竞赛“奥林匹克”相联系的国家。据称1934年列宁格勒市开始举办中学生数学竞赛。第二年移到莫斯科，由两市联合主办这种竞赛，称为莫斯科数学奥林匹克。1935年为第一届。其目的是选拔成绩优秀者推荐到大学。除1942～1944年因二次大战间断三年外，该竞赛每年举办一届。每届分两试，每试又因参赛学生年级

不同而分为2～4组，每组4～6个题目，内容以初等数学为主，也涉及高等数学的某些课题。后来竞赛制度普及到全国，60年代形成全苏奥林匹克分阶段式竞赛制度。在各地进行数学奥林匹克的基础上，选拔出优胜者参加全苏数学奥林匹克竞赛。70年代数学竞赛发展到大学，每年由各高等院校内部举行第一试竞赛，选拔出优胜者参加全苏数学竞赛第二试。苏联的数学竞赛为苏联数学界选拔了大批人才，也对苏联的数学教育改革起了促进作用。

美国中学数学竞赛（American High School Mathematical Emulation） 美国中学生的数学竞赛共有4种：美国中学数学竞赛（简称AHSME）、美国数学奥林匹克（简称USAMO）、美国数学邀请赛（简称AIME）和美国初中数学竞赛（简称AJHSME）。其中历史最长的是美国中学数学竞赛，约兴起于50年代初，每年2月份举行，至1989年已举行了40届。这个竞赛主要针对高中学生，每次参赛出30道题，全部由选择题组成。答对一题得5分，不答者得2分，答错者得0分。满分为150分，时间是一个半小时。到70年代初，受国际数学奥林匹克的影响，美国于1971年开始准备全美数学奥林匹克。1972年举办了第一届美国数学奥林匹克。两年后（1974）首次派代表队参加国际数学奥林匹克，就获得团体总分第2名的好成绩。美国数学奥林匹克也是一年一次，一般每年5月举行。每次出5～6道题，难度与国际数学奥林匹克相当。到1983年初，美国中学数学竞赛和美国数学奥林匹克组委会又联合举办了第三种竞赛，称之为美国数学邀请赛，并于当年3月举行了第一届竞赛。组织委员会规定：当年2月份参加美国中学数学竞赛成绩在95分或95分以上者，才有资格参加3月份举行的美国数学邀请赛。然后选出前50名再参加5月份举行的美国数学奥林匹克。最后选出优胜者进行集训，代表美国参加7月份举行的国际数学奥林匹克。美国数学邀请赛每次出15道题，每题1分，满分为15分。每道题的答案都是不超过999的正整数。最初两届竞赛的时间都是2.5小时，从第3届起改为每次3小时。至1989年已举行了7届。以上三种竞赛都是高中学生参加的竞赛。1985年12月由美国数学协会等6个单位又联合举办了第一届美国初中数学竞赛，参加对象是7、8年级的学生（相当于我国初中二年级）。每次竞赛出25道选择题，每题1分，满分25分。每次时间为40分钟。内容限制在初中课程范围内。该竞赛以后每年12月举办1次，至1988年已举办了4届。除美国数学奥林匹克外，其他三种竞赛都具有国际性，吸引了加拿大、中国等一些国家和地区参加。中国上海采用通讯方式分别于1984、1983和1985年开始参加这三种竞赛，并在每次的竞赛中都取得了较好的成绩。

普特南数学竞赛（Putnam Mathematical Competition） 美国大学生的数学竞赛。是世界上最

早的大学生数学竞赛。普特南曾在哈佛大学数学系任教，1933年退休，1935年逝世。他的夫人、孩子和普特南的生前好友、数学家伯克霍夫一起商定，用他留下的一笔基金举办一个数学竞赛，并设立“普特南奖学基金会”，奖励竞赛中的优胜者。第一届竞赛于1938年4月16日举行，以后除1943～1945年因二次大战间断三年外，每年都举行一次竞赛，被称为普特南数学竞赛。前18届竞赛都在上半年举行，自第19届起改在每年的11、12月举行。竞赛由美国数学会具体组织，分上、下午两试，每次3小时，每次6道题，内容一般涉及大学低年级所学的课程。每届竞赛都组织命题委员会。参赛者来自美国和加拿大的各高等院校。竞赛设团体奖和个人奖两项，每个团体限于3人，共奖5个团体。奖金最高为5000美元，另表彰若干名。个人一等奖5名，各获奖金250美元，另有二等奖和表彰奖。获奖者均在《美国数学月刊》上公布，以资鼓励。普特南数学竞赛不仅促进了各高等院校的教学水平，也为美国数学界选拔了大量人才。如卡普兰斯基，米尔诺，芒福德，奎伦等。后三人曾获国际数学家大会颁发的菲尔兹奖。

许宝騄统计数学奖（**Xu Bao Lu's Statistical Mathematical Prize**） 为了纪念在统计数学上有卓越贡献的中国数学家许宝騄先生，鼓励青年数学工作者为推进统计数学的发展做出优异成果，1984年由国内外学者钟开莱、郑清水、徐利治发起，设立许宝騄统计数学奖金。该奖金应征人的年龄以不超过35岁为限，提交的创造性论文应属于数理统计和概率论范围。本奖金的审稿评奖委员会由中外学者多人主持，每年评奖一次，若无合格的论文入选，则延迟给奖。首届“许宝騄统计数学奖”于1985年授予上海华东师范大学数学系郑伟安。

陈省身数学奖（**Chen Xing-Shen Mathematical Prize**） 为奖励我国数学工作者突出的学术成就，促进中国数学的发展，加速社会主义现代化建设，也为了纪念和推崇陈省身先生对世界数学的发展作出的杰出贡献，中国数学会接受香港亿利达工业发展集团有限公司的捐助（1985至1987年每年捐助人民币壹万元），在我国设立“陈省身数学奖”，授予近五年内发表的最佳数学研究成果的作者。本奖以奖励中青年数学工作者所取得的成就为主。得奖人限于在国内从事数学教学或科学研究的数学工作者，并且是对数学的基础理论和应用有创造性贡献的作者。其学术论文应是公开发表后在国内外已有评论，被公认为是最佳的研究成果。“陈省身数学奖”每年颁发一次，奖金额为人民币壹万元，同时，颁发荣誉证书。中国科学院数学研究所研究员钟家庆和北京大学数学系教授张恭庆荣获1985年与1986年度陈省身数学奖。钟家庆的获奖工作是关于复分析和微分几何的优秀研究成果，张恭庆的研究成果是发展了莫尔斯的孤立临界点理论及其应用。

颁奖仪式在天津南开大学隆重举行。1987年与1988年度陈省身数学奖由中国科学院系统所李邦河研究员（获奖工作在微分拓扑方面）和北京大学数学系姜伯驹教授（获奖工作在不动点理论方面）获得，颁奖仪式在北京科学会堂举行。

钟家庆数学奖（**Zhong Jiaqing Mathematical Prize**） 钟家庆是中国科学院数学研究所研究员。他深深地热爱数学，有很深的数学造诣。他在复分析和微分几何方面的优秀工作荣获首届1985和1986年度）陈省身数学奖，为我国现代数学的发展作出了宝贵的贡献。不幸的是，钟家庆教授在1987年春在北美国讲学期间，因心脏病突发而猝然逝世，年仅49岁。钟家庆教授生前对发展我国的数学事业有强烈的责任感，对祖国数学发展的前途极为关心。他曾多次提出，我国数学事业的发展有赖于积极培养与提拔优秀的年轻数学人才，他还殷切希望在中国建立基金以奖励优秀的年轻数学家。为了纪念钟家庆教授，我国的有关数学家、钟家钟教授的亲属和生前友好共同发起了“钟家庆纪念基金”的募集活动，在有关院、所的大力支持下，成立了钟家庆基金执行委员会，该委员会决定设立钟家庆数学奖，以奖励最优秀的数学专业硕士研究生，获奖人必须是在校的或毕业不超过两年的国内大学或研究所的硕士研究生。以数学论文的水平为评选标准，重点在于鼓励具有创造性的数学研究工作。钟家庆数学奖从1988年开始，每年评选一次，暂定三年。每年一般为两名，每名获奖金壹仟元及获奖证书一份。首届钟家庆数学奖由北京大学刘克峰、复旦大学夏琪、华东师范大学翁林和清华大学宋斌获得。

菲尔兹奖（**Fields prize**） 由已故加拿大数学家菲尔兹提议设立的国际性数学奖，是国际数学界最有影响的奖赏之一。菲尔兹本人捐献的部分资金和1924年国际数学家大会的结余经费建立了菲尔兹奖的基金，1932年国际数学家大会上通过并决定从1936年起开始评定，在每届大会上颁发(奖金1500美元和金质奖章一枚)。菲尔兹奖只颁赠给在纯粹数学领域中作出贡献的年轻的数学家，至今尚未有超过40岁以上的人获奖。获奖者一般是在当届数学家大会之前的几年内作出突出成就并以确定形式发表出来的数学家，他们的获奖工作一般能够反映当时数学的重大成就。1952年国际数学联合会成立之后，每届执行委员会都指定一个评奖委员会，在国际数学家大会之前通过广泛征求意见，从候选人中评定获奖者名单。一般每届评出两名获奖者， 1966年以后获奖人数有所增加。菲尔兹奖设立初期，并没有在世界上引起广泛重视，随着国际数学家大会的影响的不断扩大，特别是获奖者的杰出数学成就，使菲尔兹奖的荣誉日益提高，现已成为当今数学家可望得到的最高奖励之一。菲尔兹奖获得者及其主要工作成就见下表：

年度	获 奖 者	主 要 工 作 领 域
1936	L・V 阿尔福斯(芬兰-美国)	复分析
	J・道格拉斯(美国)	极小曲面
1950	L・施瓦尔茨(法国)	广义函数论,泛函分析,偏微分方程,概率论
	A・赛尔伯格(挪威-美国)	解析数论,抽象调和分析,李群的离散子群
1954	小平邦彦(日本)	分析学,代数几何,复解析几何
	J・P・塞尔(法国)	代数拓扑,代数几何,数论,多复变函数
1958	K・F・罗特(德国-英国)	解析数论
	R・托姆(法国)	代数拓扑与微分拓扑,奇点理论
1962	L・赫尔曼德尔(瑞典)	偏微分方程一般理论
	J・W・米尔诺(美国)	代数拓扑与微分拓扑
1966	M・F・阿蒂亚(英国)	代数拓扑,代数几何
	P・J・科恩(美国)	公理集合论,抽象调和分析
	A・格罗唐迪克(法国)	代数几何,泛函分析,同调代数
	S・斯梅尔(美国)	微分拓扑,微分动力系统
1970	A・贝克(英国)	解析数论
	广中平祐(日本)	代数几何,奇点理论
	C・П・诺维科夫(苏联)	代数拓扑与微分拓扑,代数 K 理论,动力系统
	J・G・汤普森(美国)	有限群论
1974	E・邦别里(意大利)	解析数论,偏微分方程,代数几何,复分析,有限群论
	D・B・芒福德(美国)	代数几何
1978	P・德利涅(比利时)	代数几何,代数数论,调和分析,多复变函数
	C・费弗曼(美国)	调和分析,多复变函数
	Г・A・马尔库利斯(苏联)	李群的离散子群
	D・G・奎伦(美国)	代数拓扑,代数 K 理论,同调代数

(续)

年度	获奖者	主要工作领域
1982	A·孔涅(法国)	算子代数
	W·P·瑟斯顿(美国)	几何拓扑,叶状结构
	丘成桐(中国)	微分几何,偏微分方程,相对论
1986	M·弗里德曼(美国)	拓扑学
	S·唐纳森(英国)	拓扑学
	G·法尔廷斯(联邦德国)	莫德尔猜想
1990	B·Г·德林菲尔德(苏联)	数论、代数几何、动力系统等
	V·F·R·琼斯(新西兰)	统计力学、拓扑学、量子群、李代数
	森重文(日本)	代数几何
	E·威顿(美国)	数学物理

沃尔夫奖(Wolf prize) 国际上有影响的科学奖之一。1976年1月1日,沃尔夫及其家族捐献1000万美元设立了沃尔夫基金会,其总部设立在以色列。沃尔夫奖旨在"促进科学和艺术的发展以造福于人类",每年给在化学、农业、医学、物理学、数学和艺术方面的杰出成就者颁奖。沃尔夫是德国出生的化学家、慈善家和外交家,第一次大战前移民到古巴,用将近20年时间成功地发明了一种从熔炼废渣中回收铁的方法,因而致富。1961年他成为古巴驻以色列大使,1981年逝在以色列。沃尔夫奖的评奖委员会由世界著名科学家组成。每年发奖一次,每个领域奖金为10万美元,可由几个人联合获得。由于获奖者都是世界上作出卓越贡献的科学家,这些科学家的巨大声誉使该奖广为人知。由于数学界没有诺贝尔奖,而获沃尔夫奖的数学家又都是极负盛名的,因此数学届对沃尔夫奖更为重视。沃尔夫奖获得者及其工作见下表:

年度	获奖者	国别	获奖工作
1978	N·M·盖尔范德	苏联	泛函分析、群表示等
	C·L·西格尔	德国	数论、多复变函数、天体力学

（续）

年度	获奖者	国别	获奖工作
1979	J·勒雷	法国	偏微分方程中的拓扑方法
	A·韦伊	法国	数论中的代数几何方法
1980	H·嘉当	法国	代数拓扑、同调代数、复变函数
	A·H·柯尔莫哥洛夫	苏联	调和分析、概率论、遍历理论、动力系统
1981	L·V·阿尔福斯	芬兰-美国	复分析
	O·扎里斯基	俄国-美国	代数几何
1982	M·Γ·克赖因	苏联	泛函分析及应用
	H·惠特尼	美国	代数拓扑、微分几何微分拓扑
1983/1984	陈省身	中国-美国	整体微分几何
	P·爱尔特希	匈牙利	数论、组合论、概率论
1985	小平邦彦	日本	复流形、代数簇
	H·卢伊	波兰-美国	偏微分方程
1986	S·艾琳伯格	波兰-美国	代数拓扑学、同调代数学、范畴论、自动机理论
	A·赛尔伯格	挪威-美国	数论、调和分析、群论
1987	伊藤清	日本	概率论、随机分析
	P·D·拉克斯	匈牙利-美国	分析数学、应用数学
1988	F·希泽布鲁克	德国	代数几何、拓扑学、数论
	L·霍曼德	瑞典	偏微分方程
1989	A·P·考尔德伦	阿根廷-美国	调和分析及其在偏微分方程中的应用
	J·W·米尔诺	美国	微分拓扑、微分几何、代数数论等
1990	E·德·乔治	意大利	偏微分方程、变分法
	I·皮亚捷茨基-沙皮罗	苏联-以色列	齐性复域、离散群、自守形式

世界各国所设的国际性数学奖（**mathematical prizes of each country within the scope of world**）

美国数学会的伯克霍夫应用数学奖　1967年由美国数学会和工业及应用数学会共同发起设立。表彰“在最高和最广的意义上对应用数学做出的杰出贡献”。受奖者必须是美国数学会或工业及应用数学会成员，并是美国或加拿大或墨西哥的居民。该奖是为了向G. D. 伯克霍夫教授表示敬意而设立的，最初的2066美元基金由伯克霍夫家族捐赠。每五年颁发一次。

美国数学会的维纳应用数学奖　1967年为向N. 维纳教授表示敬意而设立。基金由美国麻省理工学院的数学系捐赠，总数为2000美元。从1970年起，一般每五年颁发一次，表彰“在最高和最广的意义下对应用数学做出的杰出贡献”。人选由美国数学会和工业及应用数学会共同决定。人选必须是这些学会的成员，并为美国、加拿大或墨西哥居民。

加拿大皇家学会托里奖章　创立于1943年，表彰在物理、化学、数学、天文学或有关学科中某个分支作出的杰出研究成果，每两年颁发一次金质奖章。获奖工作的主要部分必须是在加拿大完成的。

法国科学院纪念1940—1945年被德国人杀害的法国学者基金　由物理学家朗之万倡议设立，纪念1940—1945年间被德国人杀害的法国学者。授予在数学、物理、化学和生物学方面做出贡献的学者。奖金为2200法郎，每年颁发一次。

法国科学院孔泰奖　表彰数学、物理、化学、自然科学和医学方面的新发现，以及上述科学的新应用。奖金22,000法郎，每三年颁发一次。该奖为纪念著名发明家孔泰而设立。

法国科学院彭赛列奖　授予对纯粹数学和应用数学的进步做出最有用工作的学者。奖金2300法郎，每三年颁发一次。

意大利费尔特里内里基金会安托尼奥·费尔特里内里奖　轮流授予下述五方面的杰出成果：(1) 精神和历史科学；(2) 物理、数学和自然科学；(3) 文学；(4) 艺术；(5) 医学。它也定期颁发给维护人道主义和道德的卓越活动家。奖金为5，000，000里拉，还有其他金钱奖励和金质奖章。每年颁发一次。

比利时弗兰克齐基金会弗兰克齐奖　表彰在下述领域做出的杰出贡献：(1)数学、物理、化学；(2)人文科学；(3)自然科学和医学科学。获奖人不得超过50岁。三方面各颁奖金5000,000比利时法郎，每三年发奖一次。

比利时知识青年联盟恩佩科学奖　鼓励比利时学生从事下述五个学科的科研工作：(1)数学；(2)物理；(3)化学；(4)自然科学和医学；(5)工程。申请者必须是“大学基金会”认可的那些大学的在校生和毕业生。年龄限制是28岁，服满兵役者放宽至30岁。授予奖章、奖状、“路易斯·恩佩科学奖获得者”获誉称号以及奖金100,000法郎。每三年颁发一次。

比利时皇家科学院加泰隆奖　授

予在纯粹数学方面取得重大成果的比利时或法国学者。参加评奖的工作必须用法文撰写，并在评奖前五年内发表。奖金32,000法郎，每五年颁发一次。

比利时皇家科学院拉格拉格奖 表彰促进了全世界数学知识进展的最优秀的数学或实验的成果。奖金30,000法郎，每四年颁发一次。

奥地利红衣主教因尼策尔基金 授予下述各领域的科学研究：(1)神学；(2)哲学、教育和心理学；(3)数学和自然科学；(4)医学；(5)技术和应用自然科学；(6)社会和经济科学；(7)人文科学；(8)法律和新闻。重点鼓励社会科学的研究。奖金为1000美元。

以色列魏茨曼科学研究院利迪纪念奖 每年颁奖一次，轮流表彰生物、物理和数学方面的成果。

美国丹齐格数学规划奖 由美国工业与应用数学学会和数学规划学会联合资助所建立的一项关于数学规划方面研究的国际奖金。由于丹齐格在数学规划方面的突出贡献，特别是他创立单纯形法的贡献，因此以他的名字命名。1982年在西德召开的第十一届国际数学规划会议上，首次颁发丹齐格数学规划奖。今后丹齐格奖每三年颁发一次。

数 学 学 派

墨家学派(Mohism) 中国战国时期兴起的学派。因创始人墨翟(约 476*B. C.*——约 390*B. C.*)而得名。历史上有前后墨家之分。前期指墨翟本人在世时组成的学派,后期指由其弟子组成的学派。代表作为《墨子》一书,原有 71 篇,流传至今仅 15 卷 53 篇,分为 5 部分。其中《墨经》(亦称《墨辩》)一部分包含 6 篇,是后期墨家的著作,约写于公元前 4 世纪,在自然观、认识论、逻辑和社会历史观等方面给出独到见解,构成先秦哲学和先秦科学发展史上一个重要环节。《墨经》中给出许多重要的数学概念和命题,例如圜:一中同长也(从中心到周界有相同长度);平:同高也(高度相等);直:参也(三点相齐);次(相切):无间而不相樱也(既无大小又不相合);端(点):体之无厚而最前者也(部分中没有大小并处于最前缘者),等等。墨家还定义了有穷和无穷的概念,穷:域不容尺(在区域的前缘连一根线也容纳不下),有穷;莫不容尺(不论区域多大,在其前缘总能容下一线之宽),无穷也。其主导思想是名来源于物,名可以从不同方面和不同深度反映物,与当时名家的观点大相径庭。《墨经》中还给出算筹式记数法的描述:"一少于二而多于五,说在建位。"即一在个位少于二,在十位就多于五,每个数字的大小除由它本身所表示的数值决定外,还要看他在整个数中所处的位置。这是位值制记数法的最早解释。墨家还有注重逻辑的传统,要求将"辩"(辩论)作为一种专门知识学习,并由后期墨家建立了第一个中国古代逻辑学的体系。墨家学派在战国百家争鸣中发展致盛,保持"显学"地位达 200 年。西汉中期罢黜百家独尊儒学后湮没无闻,但其论著对中国古代数学理论的发展有重要作用。

乾嘉学派(school in Qianlong and Jiaqing times) 清乾隆、嘉庆年间(1736—1820)兴起的学派,以讲究训诂考据为特色,致力于古籍整理和语言文字研究。因以汉儒经注为宗,推崇东汉许慎、郑玄之学,又称之为汉学派。初时以校订经书为主,后扩大到史籍和诸子,开始考究历史、地理、天文历法、音律、典章制度等。主要分为以惠栋为首的"吴派"和以戴震(1724—1777)为首的"皖派"两大支。1773 年开设四库全书馆,辑录《永乐大典》,保存佚书和征集私家藏书,于 1781 年编成《四库全书》,分经、史、子、集四个部分,其子部第十七为天文算法类的"算书之属"25 部。此外在子部第十六天文算法类的"推步之属"中也包括一些数学著作。这些书是由当时任纂修兼分校官的戴震等人负责校勘和编写"提要"的。其中的《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《五

经算术》经戴震本人详加校勘，改正许多误文夺字，对学者很有帮助。其他被校勘的算书还有《海岛算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《张邱建算经》、《缉古算术》、《数术记遗》和《数书九章》、《益古演段》、《测圆海镜》等。随后，李潢、李锐等人又对其中一些算书进一步注释或做"细草图说"，逐渐形成一个研究传统数学的高潮。一些数学家还有所发明创造，例如焦循四则运算基本定律的总结，汪莱关于方程根与系数的关系式，李锐高次方程系数符号变化规律等等，同时阮元和李锐等人编写了一部天文数学家传记——《畴人传》(1795—1810)，收集从黄帝时期到嘉庆四年(1799)已故的天文学家和数学家270余人和明末以来介绍西方天文数学的传教士41人。这部著作全由"掇拾史书，荃萃群籍，甄而录之"而成，依靠第一手原始材料，在学术界颇有影响。乾嘉学派对古籍和史料的整理有较大贡献，后随西方科学第二次输入而衰微，但其影响长期存在。

伊奥尼亚学派(**Ionian school**) 见泰勒斯。

毕达哥拉斯学派(**Pythagorean**) 古希腊哲学家、数学家、天文学家毕达哥拉斯于公元前520年左右创立的一个学派。它集宗教、政治、学术为一体，有严密的组织，共同的哲学信仰和政治理想，严格的训练和较高的学术水平。该学派区别于其他学派的一个主要特点是它很重视数学，企图用数来解释一切，认为万物皆数，宣称上帝用数来统治宇宙，并因此对数作了深入研究，得到很多结果。例如根据简单整数比原理创造了一套音乐理论；得到"形数"(三角数，平方数、五角数等)的一些基本性质；发现了完全数，还可能知道"如果 2^n-1 是素数，则 $2^{n-1}(2^n-1)$ 是完全数"这一性质；发现了亲和数，指出220与284是一对亲和数；得到勾股定理，被西方称为毕达哥拉斯定理，进一步得到不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的一组解 $2n+1$，$2n^2+2n$，$2n^2+2n+1$ 等。该学派对数学的最大贡献是发现了不可通约量(无理量)，突破了所有数只是自然数和分数的传统观念。他们还在几何上发现了五种正多面体，在天文学上指出天体呈球形，在逻辑证明方面作了重大推进，其工作构成欧几里得公理化体系的前驱。学派的主要成员还有希帕索斯、菲洛劳斯、阿尔希塔斯等人。该学派的许多成果在当时是最先进的，但由于学派内有对新成果秘而不宣的纪律，当时影响较小。后来因政事动乱，门徒散失，约至公元前4世纪中叶逐渐消亡。

智人学派(**Sophist school**)

亦称诡辩学派。古希腊公元前5世纪活动于雅典一带的学派，以教授修辞、辩术、文法、逻辑、数学等知识为职，常出入群众集会，发表应时演说。其代表人物普罗泰戈拉斯和高尔吉亚在哲学和文学上对希腊文化一直影响到公元2世纪以后。该学派的数学研究主要是所谓几何三大作图问题：①三等分任意角；②倍立方体；③化圆为方。难点在于只使用没有刻度的直尺和圆规。后人证明了这三个问题都是尺规作图不可能

问题，但历史上对这些问题的研究却发展起许多新的数学分支。如圆锥曲线论，三、四次代数曲线，割圆曲线等。其中的割圆曲线是由该学派成员希皮亚斯创设的，目的是用它来三等分任意角。另一成员安蒂丰在研究化圆为方问题时提出一种穷竭法，即通过将圆内接正多边形边数不断加倍的方法使多边形与圆相结合。该方法成为阿基米德割圆术的先导和近代极限理论的雏形。

亚历山大学派（**Alexandria school**） 古希腊数学家在埃及亚历山大城形成的学派。分前期（公元前 4 世纪～146*B. C.*）和后期（146*B. C.*～641*A. D.*）。前期以欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯和埃拉托塞尼等人为代表，后期以海伦、门纳劳斯、托勒密、丢番图、帕波斯和许帕提娅等人为代表。该学派的特点是使几何脱离哲学而独立，从经验科学过渡为演绎科学，并使数学高度抽象化，将希腊数学推至全盛时期。欧几里得约在公元前 300 年来到亚历山大教学，并长期在那里工作。他的《几何原本》集希腊几何之大成，是用公理法建立演绎数学体系的最早典范，为亚历山大学派和整个希腊的数学发展打下坚实的基础。阿基米德早年在亚历山大学习，后来一直与那里的学者保持密切联系。他将熟练的计算技巧与严格证明融为一体，将抽象的理论和工程技术的具体应用紧密结合起来，做出许多划时代的成果。阿波罗尼奥斯曾就学于亚历山大，后来在那里教学，他的《圆锥曲线论》将圆锥曲线的性质网罗殆尽，对希腊数学的繁荣和发展起了重要作用。在三角学方面，托勒密的《天文学大成》和门纳劳斯的《球面论》是亚历山大学派的代表作。在代数学中，丢番图的《算术》独树一帜，使代数完全脱离几何形式，还尝试符号代数的研究。此外亚历山大后期的数学家对前期的工作做了许多整理、注释和增添修补工作。公元 390 年后藏书丰富的亚历山大图书馆被焚。415 年许帕提娅被害，标志着亚历山大数学的衰竭。641 年亚历山大被阿拉伯人攻陷，亚历山大数学告终。

雅典学派（**Attic school**） 古希腊雅典建立的学派。盛行于公元前 5 世纪至公元前 4 世纪，主要成员及其思想集中在柏拉图科学院和亚里士多德的吕园这两个科学机关，因此常分称为柏拉图学派和亚里士多德学派。柏拉图是雅典的大哲学家，曾师事于苏格拉底，颇受老师逻辑思想的影响。他于公元前 387 年左右在雅典成立学院，在授课时大力提倡几何学研究和逻辑证明，传说学院门口写着“不懂几何者不得入内”。他坚持准确的定义、清楚的假设和严格的推理，促进了数学的科学化。其思想一直影响到罗马帝国末期及中世纪，形成新柏拉图主义学说。柏拉图的学生有许多是数学家，如第一个系统研究圆锥曲线的门奈赫莫斯，用割圆锥曲线研究化圆为方问题的狄诺斯特拉托斯，研究不可公度量的泰特托斯等。此外还有两位著名学者欧多克索斯和亚里士多德。欧多克索斯一度为柏拉图的学生，是最早介绍球面天

文学和描述星座的希腊科学家。他在数学中创立了比例论和穷竭法，深入研究了中末比问题，还最早得到"阿基米德公理"，证明了近代极限论的某些命题，其理论对欧几里得几何公理体系的完成颇有帮助。他在基齐库斯(Cyzicus，今属土耳其)建立起自己的纯几何学派，常称为欧多克索斯学派。亚里士多德与柏拉图相处20年之久，后因与其继任者哲学观点不同而分离，约于公元前335年在雅典吕克昂阿波罗神庙附近成立自己的学园，形成亚里士多德学派或吕园学派，又因他常与学生散步讨论问题，又被称为逍遥学派(指漫步学园)。亚里士多德是形式逻辑的奠基人，讨论过数学的一些基本原理，并给出点、线、面的定义。该学派的欧德莫斯写过算术、几何、与天文学的历史，是较早的科学史家。其他继承者通过校勘、整理和注释亚里士多德的著作使其学派延续到6世纪初。整个雅典学派在哲学上有许多贡献，其理念论与逻辑学等思想影响西方数千年之久。

彼得堡学派(Petersburg school) 俄国彼得堡(今苏联列宁格勒)19世纪下半叶至20世纪初兴起的数学学派。以切比雪夫、马尔可夫、利亚普诺夫等人为代表，主要特征是数学理论紧密与实际相结合，在应用数学中做出较大贡献。切比雪夫是该学派的创始人，他自1847年起在彼得堡大学任教达35年之久，培养了大批优秀学生，不断创造新的成果。他本人在数论方面从本质上推进了对素数分布问题的研究，在概率论中的多项成果使这一学科的发展进入新的阶段，在函数逼近论中建立切比雪夫多项式，由此开始创立函数构造理论。他还在积分学等方面有所建树。马尔可夫早年在彼得堡受教于切比雪夫，后任该校教授。他研究数论中连分数和二次不等式理论，解决了许多难题。1906～1912年间开创的马尔可夫过程研究在自然科学、工程技术和公用事业中有广泛的应用。他写的《有限差分学》和《概率演算》已成为学科经典著作。利亚普诺夫也是切比雪夫的学生，他在概率论中得到中心极限定理的简洁证明，被广泛采用。他的最大贡献是奠定常微分方程稳定性理论的基础，提出许多新方法。这一方向的发展成为以后苏联数学的一大特点。彼得堡学派是苏联最早的数学学派，它的成员和成果对苏联近代数学的发展产生巨大影响。20世纪中叶，列宁格勒大学又出现了坎托罗维奇等现代数学家，他们在继承和发展彼得堡学派的理论及传统方面做出新的贡献。

莫斯科学派(Moscow school) 苏联20世纪初在莫斯科创立并不断发展的数学学派。本质上不同于俄国革命前的彼得堡学派，主要侧重理论数学。常又划分为两个专业方向不同的学派，函数论学派和拓扑学派。前者由叶戈洛夫和卢津创始，科尔莫戈罗夫等人发扬光大。后者以П. С. 亚历山德罗夫、乌雷松、庞特里亚金等人为代表。莫斯科学派还包括其他分支的一大批数学家，直接代表了苏联近现代数学发

展的水平。卢津是叶戈洛夫的学生，曾到法国和德国学习过，后在莫斯科大学主持实变函数论讲座。他的《积分与三角级数》论述了许多函数论的重要结果，还提出一系列问题，长期以来左右着该学派的研究方向。卢津培养了许多优秀学生，也写了一些经典教科书。他的学生科尔莫戈罗夫在函数论方面做了大量工作，后应用实变函数论和测度论将概率论建立在严格的数学公理体系上，还在若干数学分支中有重大贡献，曾获1980年度沃尔夫奖。亚历山德罗夫和乌雷松也是卢津的学生，早年都从事函数论研究，后转向拓扑学，成为本世纪该学科的先驱。乌雷松开创维数理论研究，发展了一般拓扑学。亚历山德罗夫组织拓扑学讨论班，在代数拓扑学方面多有建树。庞特里亚金是该讨论班成员之一，写了几本著名的拓扑学专著，还在应用数学领域取得较大成就。莫斯科学派的数学家将函数论作为工具，在拓扑学、微分方程、概率论等几个方面获得长足进展。其中较著名的还有索博列夫的现代微分方程理论，辛钦的概率论研究，盖尔范德的泛函分析与代数学成就等。近年来莫斯科数学界仍然新人辈出，其中诺维科夫和马尔古利斯分别荣获1970年和1978年度菲尔兹奖。

格丁根学派(**Göttingen school**) 德国19世纪初到20世纪初存在的数学学派。由高斯创始，狄利克雷和黎曼发展，克莱因、希尔伯特、诺特等人致盛。影响贯穿德国整个科学兴隆时期，在世界数学史中长期占主导地位。该学派强调数学的统一性，注重纯粹数学与应用数学的联系，将数学理论与近代工程技术紧密结合起来，形成独树一帜的格丁根数学传统。高斯早年就学于格丁根，后来在那里担任天文台台长和数学教授(1807)，他的《算术研究》(1801)、《天体运动理论》(1809)和《关于曲面的一般研究》(1827)分别成为数论、天文学和曲面微分几何的经典著作。狄利克雷1855年接替高斯任格丁根大学教授，在数论等方面传播和拓广了高斯的思想。黎曼早年在格丁根大学读书，1851年获博士学位，1859年接替狄利克雷成为教授。他是复变函数论的创始人之一。他给出的黎曼积分、黎曼曲面、黎曼空间分别对积分理论、拓扑学和几何学的发展起了重要的推动作用。克莱因1886年受聘为格丁根大学教授，一直在那里工作近40年，为格丁根学派的组织健全、人员汇集和理论发展做了大量工作。他组织了许多讨论班，造成相互密切合作、民主自由的学术气氛。他于1872年发表的所谓"爱尔兰根纲领"成为数学统一性的代表作，对该学派后继数学家的工作颇有影响。希尔伯特1895年应克莱因邀请来到格丁根，一直干到退休，先后在代数数论、几何基础、分析学、理论物理和数学基础等方面做出划时代的贡献。他越来越注意数学与物理等学科的联系，用新的统一观点促进了20世纪数学的发展。由于他与克莱因等人的努力，格丁根从20世纪初开始成为数学研究与教学的国际中心。诺特1916年

到格丁根后创立了抽象代数学，她主持的有关讨论班取得大量研究成果，培养了许多近现代数学家，并影响到法、苏、美、英等国的数学发展。格丁根学派人数众多，学科全面，且代代相接，长期保持高度创造力，直到20世纪30年代，因纳粹执政后日渐衰退，并从此一蹶不振。

柏林学派(Berlin school) 19世纪下半叶到20世纪初在德国柏林兴起的数学学派。以外尔斯特拉斯、弗罗贝尼乌斯、基灵等人为代表，主要从事数学分析、符号代数和几何基础等方面的研究，取得多种成果。外尔斯特拉斯1850年受聘到柏林大学执教，培养了很多有成就的学生，逐渐成为该学派的带头人。他在分析严密化方面做出重要贡献，给出连续、一致收敛等许多基本概念，建立了实数理论，还在椭圆函数、行列式、线性代数、变分法等领域有建树。弗罗贝尼乌斯和基灵都是在外尔斯特拉斯指导下获得博士学位的。前者继承外尔斯特拉斯有关初等因子的理论，独立引入了符号矩阵代数，开创群的表示理论；后者则对外尔斯特拉斯有关几何基础的演讲感兴趣，在这方面做出独特的研究计划，运用空间模型创立了李代数以及环与代数的结构理论。该学派不限于共同的研究方向，但指导研究工作的哲学观点颇为一致，这对以后数学学派的建立有启发作用。

波兰学派(Poland school) 波兰在两次世界大战之间兴起的数学学派。常细分为华沙学派和利沃夫学派。华沙学派的形成以1920年创刊的《数学基础》杂志为标志，利沃夫学派则以1929年在该地创刊的《数学研究》杂志为基础。波兰数学家分别在这两份杂志上发表一系列文章，在国际数学界产生重要影响。这两份杂志也因此成为国际上著名的数学杂志。谢尔品斯基、亚尼谢夫斯基、马祖尔克维奇等人是波兰学派的创始人。他们都在华沙大学工作过，1915年合力组织数学讨论班，集中研究拓扑学和集合论，吸引了一批优秀学生。1920年一起创办《数学基础》，并以此为中心，进一步吸引和培养了大批人才，确立了波兰数学在国际上的地位。巴拿赫、斯坦因豪斯、库拉托夫斯基、乌拉姆等人是利沃夫学派的代表人物，他们先后学习或执教于利沃夫大学和利沃夫技术大学，对泛函分析学科的创立和发展做出突出贡献。《数学研究》杂志就是国际上最早的泛函分析杂志。该学派成员常在一个“苏格兰咖啡馆”中利用聚会提出和讨论数学问题，其中许多问题影响到20世纪后半叶数学的发展。波兰学派的数学家还遍及克拉克夫和波兹南等地，他们对波兰数学会及其他科学机构的组建起促进作用。波兰学派因二次大战纳粹侵略而衰退，战后曾数度复兴、长期绵延。

布尔巴基学派(Bourbakian) 20世纪30年代末出现于法国的数学学派。由一群青年数学家创建，借用尼古拉·布尔巴基为集体的笔名，发表数学论文和有关数学基础问题的专著。其代表作《数学原理》自1939年刊行以来已陆续出版了近40卷，被译为英、日、俄等多种文

字。同时学派成员还发表了500多篇文章，综述当代数学各领域的重大成果，对现代数学的发展产生较大影响。

第一次世界大战后法国数学界因战争伤亡出现青黄不接的局面。老一辈数学家对当代数学所知甚少，年轻大学生求知欲得不到满足。因此，1934—1935年的冬季，一些高等师范学校毕业的年轻数学家自发地组织起来，准备将整个数学写成一套经过整理的专著，还要对其中的每一部分进行集体讨论。1935年夏，召开了这种讨论班成立大会，被称为第一次布尔巴基大会。参加者包括韦伊、迪厄多内，H. 嘉当，谢瓦莱、德尔萨特等人，他们成为布尔巴基学派的第一批主要成员。该学派每年举行数次讨论班式的聚会，广泛深入地研究现代数学的本质，用数学结构的观点对各门数学分支进行统一处理，并进一步探讨数学发展动向。会议不拘形式，参加者踊跃发言，积极争辩，直至取得一致意见。学派中的每个成员都要具备较高的数学造诣和独立解决问题的能力，且对自己研究的课题怀有强烈兴趣。他们治学严谨，对一部著作要经过反复修改，直到大家基本满意后才付印，因此一本专著从动笔到正式出版平均要8～10年。该学派对成员年龄做了限制，凡年满50岁者必须退出，目的是保持组织的活力。学派的老一辈中有许多成为国际著名的数学家，韦伊和H. 嘉当还分别荣获1979和1980年度沃尔夫数学奖。较年轻的也有不少是优秀数学家，例如施瓦尔茨、塞尔、格罗唐迪克都获得过国际数学家大会颁发的菲尔兹奖。现在的讨论班每次都出报告专集，内容遍及各数学分支。

《数学原理》以其博大精深常为后人称道。书中坚持严格的公理化原则，并创造使用许多名词术语（其中大多数被广泛接受）。它以“分析的基本结构”为理论基础，内容包括集合论、代数学、一般拓扑学、实变函数论、拓扑向量空间、积分论、还有李群与李代数、交换代数、谱理论、微分流形与解析流形等分册，书中强调数学是一门统一的结构性科学，其基本结构有三种：代数结构、序结构和拓扑结构，数学中的不同分支都是它们的组成部分。这种观点丰富了人们对数学的认识，推动了数学的发展，同时对世界各国的数学教育也产生较大影响。

逻辑主义学派（**Logistic sch-ool**） 见逻辑主义。

直觉主义学派（**Intuitionist sch-ool**） 见直觉主义。

形式主义学派（**Formulist sch-ool**） 见形式主义。

数学期刊、工具书、丛书

中国数学学术期刊(mathematical publications in China) 中国的数学学术期刊，以《数学学报》的历史最长，它是由1936年发行的《中国数学会学报》演变而来。当时各大学的期刊，也登载数学论文，而且有的历史更长，如《清华学报》(1924年创刊)、《自然科学季刊》(北京大学1929年创刊)、《理科大学》(武汉大学1930年创刊)等。现在，除《中国科学》、《科学通报》等多科性杂志也有数学论文外，据陕西师范大学数学系张友余同志统计，截止到1988年底，我国现行数学学术性中文版期刊有30种，外文版期刊有12种，内部期刊有8种。主要的学术性期刊简介如下：

1.《数学学报》 双月刊，中国数学会主办，科学出版社出版，编辑部设在中国科学院数学研究所。1936年创刊，刊名为《中国数学会学报》，1952年改名为《数学学报》。1966年7月停刊、1974年3月复刊。该刊刊登创造性学术论文，读者对象为数学研究工作者及大学教师等。

2.《数学年刊》 双月刊，原国家教育部(现国家教委)主办，上海科学技术文献出版社出版，编辑部设在上海复旦大学数学研究所。1980年6月创刊(季刊)，1982年改为双月刊，1983年增出英文版(B辑，季刊)。刊登纯粹数学和应用数学两方面具有创造性的学术论文。

3.《数学进展》 季刊，中国数学会主办，科学出版社出版，编辑部设在北京大学数学系。1955年创刊，1959年停刊，1962年复刊；1966年7月又停刊，1981年9月复刊。以刊登综合性学术报告为主，包括一些创造性成果的摘要和短文。读者对象为数学研究工作者、工程技术人员和大专院校师生等。

4.《应用数学学报》 季刊，中国数学会主办，科学出版社出版，编辑部设在北京中国科学院应用数学研究所。1976年创刊。刊登应用数学方面的创造性论文。读者对象为大专院校、科研机关及厂矿企业等单位中的应用数学工作者。

5.《数学的实践与认识》 季刊，中国数学会主办，科学出版社出版，编辑部设在北京中国科学院系统科学研究所。1971年创刊，主要刊登数学应用到实践中所取得的成果、理论和方法，数学及其边缘学科的介绍，数学讲座、数学史、学术动态、应用数学问题征解、书评等。读者对象对数学工作者、大专院校师生、关心数学应用的科技工作者等。

6.《数学物理学报》 季刊，中国科学院武汉数学物理研究所主办，编辑部设在该所。1981年创刊，是数学物理界的一份综合性学术刊物，主要刊登数学物理科学的边缘学科中具有创造性的学术成果。读

者对象为数学工作者、计算机科学工作者、系统科学工作者等。

7.《数学研究与评论》 季刊，1981年创刊，由原华中工学院和大连工学院联合主办，编辑部分别设在华中工学院和大连工学院，华中工学院出版社出版。1986年改为大连工学院(现大连理工大学)独家主办，大连工学院印刷厂出版。主要刊登创造性学术论文，综合性评论、专题论述、数学基础、数学史专论、数学书刊评论等。该刊设立"青年数学奖金"，每年评奖一次，奖给在本刊发表的优秀作品的青年作者(年龄不超过30岁)。读者对象为数学研究工作者、大专院校师生及其他科技人员。

8.《数学译林》 季刊，中国科学院数学研究所主办的数学译文刊物，由北京中国科学院数学研究所编辑出版，由该所情报资料室发行。该刊于1980年创刊，刊登的内容有数学综合报告、专题介绍、数学史、数学小品、人物与传记、数学教育等。读者对象为数学研究人员、大专院校数学教师及学生、研究生等。

9.《中国数学文摘》 季刊，中国科学院文献情报中心主办的数学文摘刊物，由《中国数学文摘》编辑部编辑，中国科学院文献情报中心出版，1987年创刊。该刊报导我国数学领域最新研究成果和进展，沟通国内信息，促进我国数学研究工作的发展，为"四化"建设服务，为建立中国数学文献库做准备。

中国中学数学期刊(Chinese middle school mathematical publications) 目前，我国已出版发行几十种中学数学期刊，它们以中学、中等专业学校和师范院校师生为主要读者对象，刊登数学教学和数学课外知识等方面的内容。这些刊物采取普及与提高相结合的方针，为提高数学教学质量服务，办得各有特色。发行较广的几种期刊有：

1.《数学通报》 月刊、中国数学会与北京师范大学主办，地质出版社出版，编辑部设在北京师范大学数学系。其前身是中国数学会主办的《数学杂志》(1936—1940年)和《中国数学杂志》(1951—1952年)，自1953年起改名《数学通报》。1966年停刊，1979年复刊。

2.《中学生数学》 双月刊，中国数学会普及工作委员会与北京数学会、北京师范学院数学系联合主办，测绘出版社出版。1981年创刊，编辑部设在北京师范学院数学系。

3.《数学教学》 双月刊，华东师范大学数学系主办，华东师范大学出版社出版。1955年创刊，1960年停刊，1979年复刊，编辑部设在上海华东师范大学数学系。

4.《数学通讯》 月刊，湖北省暨武汉市数学会与华中师范学院数学系主办，编辑部在华中师范学院数学系。1933年创刊，定名《中等算学月刊》，后改名为《武汉数学通讯》，1938年停刊。1950年复刊，定名《数学通讯》，1960年停刊，1980年复刊。

外国数学期刊(foreign mathematical publications) 在国外，纯数学方面的第一个杂志《纯粹数学与应用数学年刊》于1810年在法国创刊，到1831年停刊。1826年在

德国创刊的《纯粹与应用数学杂志》(通常称为《克雷尔杂志》)是目前仍在发行的最老的数学期刊。

到19世纪，各国数学会相继成立，并编辑出版数学期刊。如1864年成立的莫斯科数学会，于1865年开始出版《数学汇刊》，1865年成立的伦敦数学会，于当年开始出版《会报》。

早期的数学研究论文，除在上述数学刊物上发表外，还在一些多科性的综合期刊上发表，如美国的《美国国家科学院院报》，英国的《伦敦皇家学会哲学汇刊》和《伦敦皇家学会会报》，法国的《法国科学院会议报告》和苏联的《苏联科学院报告》等。

目前国外的主要数学期刊见下表。

刊　　名	创刊年份	国　别
纯粹与应用数学杂志	1826	联邦德国
剑桥哲学会数学文集	1843	英　国
纯粹数学与应用数学年刊	1850	意大利
伦敦数学会会报	1865	英　国
数学汇刊	1865	苏　联
数学年刊	1868	联邦德国
数学与天文学通报	1870	法　国
法国数学会通报	1872～1873	法　国
美国数学杂志	1878	美　国
数学学报	1882	瑞　典
数学年刊	1884	美　国
美国数学月刊	1894	美　国
美国数学会通报	1894	美　国
美国数学会会报	1900	美　国
数学杂志	1918	联邦德国
苏联科学院通讯·数学部分	1919	苏　联
数学基础	1920	波　兰
日本数学杂志	1924	日　本

（续）

刊　　名	创刊年份	国　别
伦敦数学会杂志	1926	英　国
纯粹与应用数学通讯	1929	美　国
瑞士数学评论	1929	瑞　士
数学研究	1929	波　兰
数学进展	1936	苏　联
数学	1947	日　本
日本数学会杂志	1949	日　本
加拿大数学杂志	1949	加拿大
美国数学会文集	1950	美　国
傅里叶研究所杂志	1950	法　国
西伯利亚数学杂志	1960	苏　联
伦敦数学会通报	1969	英　国

外国数学文摘杂志（foreign abstract magazines in mathematics） 随着数学研究的开展，论文数目日益增加。因此，利用文摘杂志来获得信息，已成为十分必要。文摘杂志提供作者、题名、出处和内容评介等。

第一份数学文摘杂志《数学进展年刊》（德文）创刊于1868年，1934年停刊。目前国外主要数学文摘杂志有：

1. 美国的《数学评论》（Mathematical Reviews） 创刊于1940年，由美国数学会出版，主办单位除美国数学会外，还有大约30个其他国家的全国数学会。这是当今世界上最有价值的国际性数学文摘杂志。

《数学评论》范围广大，涉及大约1200种刊物，囊括各个数学专业以及写作数学的各种语言。它对被选出来的刊物、丛书、书籍和其他出版物都加以评论。其他文摘及评论杂志的条目也加以选载。评论由大约2000位几乎遍布世界各国的数学家（评论员）撰写。每年出版两卷，每卷由六期组成。每期封面上都列出了该期所用到的学科标题，它采用“美国数学会主题分类法”中使用的标题。标题数目及术语多年来屡经变化，例如卷1（1940）只有11个很一般的标题，而现在则出现61个相当广泛的标题。每篇评论都按原文、或按原书作者的名字加以编号收入。附有完全的引证材料，然后是

署名的评论。每期还附有原文作者索引。

2. 联邦德国《数学及其边缘学科文摘》(Zentralblatt für Mathematik und Ihre Grenzgebiete)1931年创刊，由施普林格出版公司在柏林出版，编辑部设在德国科学院和海德堡科学院。它也是一种国际性杂志，用各种语言(主要是德文和英文)发表文献摘要，按分类顺序编排(目前使用“美国数学会主题分类法”)，有作者索引和主题索引。多年来出版频率变化不定，目前每年出版27期，每期都叫做一卷。

3. 苏联《数学文摘》(Реферативний журнал математики) 1953年由全苏科技情报研究所创刊并按月发行的《文摘杂志》是世界科技文献的一份主要文摘杂志。它是一种多辑刊物，每个专辑属于一个科技分支，合起来成为一卷。专辑有自己的名称，作为独立的期刊发行。数学专辑即《数学文摘》。它分为三章：(1)总论，数理逻辑，数论，代数，拓扑，几何；(2)数学分析；(3)数值分析，概率论，数理统计，控制论。《数学文摘》在形式、风格和目的上都几乎和美国《数学评论》完全一样，不同的是所有的评论都是用俄文写的，在俄文条目之后用原文列出资料信息。评论员几乎包括了苏联的整个学术界的学者，还有一部分东欧学者。评论范围也和《数学评论》大体相同，只是编排了大量的教学文章，还转载书评。每期都附有作者索引和主题索引。

五十年代以来，以上三份数学文摘杂志建立了广泛的交换协议，评论可以相互转载。对同一篇文章的不同评论可以使读者从不同的角度来评价所论的工作。

数学史期刊(**publications of History of mathematics**) 世界上最著名的科学史杂志是美国科学史学会主办的《爱雪斯》(Isis)。它是由著名科学史家萨顿于1913年在比利时创办的，两次世界大战期间均未停刊，直至现在。它的内容丰富，既有论文，又有书评。每年出四期，还附一本一年来全世界科学史论文的目录。1936年，在萨顿主持下，又出版了长篇论文专刊《奥赛力斯》(Osiris)。这两种期刊都刊登数学史的论文。

数学史的期刊，早期出版的有：德国数学史家M. 康托尔主编的《数学史杂志》，自1877至1913年止，共出30卷；意大利数学史家洛里亚主编的《数学史杂志》，自1898年起至1922年止，共出21卷；最著名的是埃内斯特勒姆主编的《数学宝藏》，自1884年至1915年止，共出30卷。此外，俄国数学史家博贝宁主编过物理学和数学史的刊物，共出版13卷(1885—1894)，也早已停刊。现在出版的有：加拿大数学史家渥·梅主编的《国际数学史杂志》(Historia Mathematica)，1974年创刊，是国际科学史协会数学史委员会的机关刊物，到1990年为止，共出版17卷。苏联数学史家雷布金和尤什克维奇主编的《数学史研究》(Историко-математические исследования)，到1989年已出版到第31卷。又苏联撒马尔罕出版的《数学与天文学史问题》(Вопросы истории

Математики и астрономии)，于 1972 年创刊。日本数学会主编的《数学史研究》杂志，到 1989 年，已出版到第 123 号。

《中国大百科全书·数学》(Chinese Encyclopaedia mathematics) 1978 年，国务院决定出版《中国大百科全书》。全书 7000 多万至 1 亿字，74 卷，这在我国是一项史无前例的规模宏大的出版工作。为了编好这部巨著，编委会及出版社有关人员调研了英国、美国、法国、德国、苏联和日本等国的百科全书的著名版本，博采众家之长，制定了编辑方针、原则和要求，并组织班子，聘请各学科数千名专家撰稿。

《中国大百科全书》的《数学》卷于 1988 年 11 月由大百科全书出版社出版。著名数学家华罗庚、苏步青、段学复、冯康、吴文俊、谷超豪和陆启铿主持它的编辑工作。全卷由 14 个分支组成：数学史、数学基础、数理逻辑、集合论、代数学、数论、几何学、拓扑学、分析学、微分方程、计算数学、概率论、数理统计和运筹学。共选收条目 869 个，约 237 万字，还配有精致的插图 738 幅。全卷条目按汉语拼音排序，另附条目分类目录、彩图插页目录以及汉字笔画索引、外文索引、内容索引、大事年表和外国人名译名对照表。

《数学》卷条目由我国数学界 300 多名专家学者撰稿，所有条目都经专家和编辑严格审稿。每个条目都有明确的定义、定性叙述及核心内容；学科条目还有历史渊源、研究内容、最新成果和发展趋势。

《数学》卷是一部具有完整知识体系的权威性数学工具书，它将为传播数学知识、繁荣数学科学、促进科学技术的发展发挥重要作用。

《数学百科辞典》(Encyclopedic Dictionary of Mathematics) 日本数学会编《岩波数学辞典》的中译本，1983 年由科学出版社出版。《岩波数学辞典》是一部百科全书式的现代数学辞典，它内容丰富、深入，涉及现代数学的各个领域以及在各个方面的重要应用。1954 年初版问世以来，很快就成为各国数学工作者和其他科学技术工作者的良师益友。无论是历史的背景、发展的现状还是未来的展望，都可以从这部辞典中得到不同程度的启发和教益。为促进我国数学和其他科学技术的发展，科学出版社在国内许多单位和专家的大力支持下，自 1977 年以来经过 6 年时间完成了这部辞典的翻译工作。中译本以《岩波数学辞典》的第二版(1968 年)为蓝本，参照经补充修订的英译本进行翻译，定名为《数学百科辞典》。在翻译过程中，对我国数学发展情况和我国数学家的成就作了补充，使之又具有了中国的特色。该辞典以知识内容为序，共有 20 个分支：数学基础和数理逻辑，集合论，一般拓扑学和范畴论，代数学，群论，数论，几何学，代数几何学，拓扑学，分析学，复变函数，泛函分析，微分方程、积分方程和函数方程，特殊函数，计算数学，概率论，统计数学，数学规划、运筹学、信息论和控制理论，力学和理论物理，数学史和数学家。正文之后有 4 个附录和 5 个索引。

《数学百科全书》(Матем-

атическая Энциклопедия) 1977 年至 1986 年由苏联大百科全书出版社出版的大型数学工具书。苏联科学院院士维诺格拉多夫任主编。全书共五卷，包括 6600 个条目，约 600 万字。其内容涉及现代数学的各个分支学科（它采用了一种很好的分科方法），被认为是当今世界上最新、最完全、最有权威的数学百科全书。本书由三类条目组成：第一类是介绍数学的各个主要方向的综述性条目，第二类是专门介绍具体的数学问题和方法的条目，第三类是一些较为简短的条目，供查阅定义时参考。书后附有主题索引。本书第一次印刷即达 15 万套，并很快脱销。荷兰 D. Reidel 出版公司已组织 150 位数学家将本书全部译成英文，分为十卷，从 1987 年起陆续出版，计划到 1992 年出齐。我国科学出版社在 1989 年开始组织国内数学工作者翻译出版这部《数学百科全书》。

《世界数学家名录》(World Directory of Mathematicians) 国际数学联合会刊物，由国际数学联合会委托美国数学会编辑。1987 年在美国出版发行其第八版。这本人名录共有 976 页，记录了世界上 83 个国家的约 4 万名数学家的姓名及通讯地址，其中包括中国数学会首次提供的我国大陆 400 名数学家。

纯粹数学与应用数学专著丛书(a series of monographs in pure mathematics and applied mathematics) 这是一套反映我国数学研究的各个领域中的最新研究成果的专著丛书，由科学出版社从 1978 年开始陆续出版。担任这套丛书主编的先后有华罗庚教授、吴文俊教授和王元教授（现任主编）。一般认为，这是我国解放以来搞得最好和影响最大的一套丛书，它标志着中国数学已经有不少系统的研究工作，向世界展示了中国的数学成就。其作者都是国内在各数学领域卓有成就的数学家。其中许多丛书已与或将与外国出版社联合出版英文版。这套丛书现已出版 19 种，其书名、作者、出版时间见下表。

纯粹数学与应用数学专著丛书

序数	书　　名	作　　者	出版时间
第 1 号	数论在近似分析中的应用	华罗庚、王元	1978. 10
第 2 号	齐次可列马尔可夫过程	侯振挺、郭青峰	1978. 9
第 3 号	不动点类理论	江泽涵	1979. 9
第 4 号	初边值问题差分问题及挠流	朱幼兰等	1980. 1
第 5 号	生灭过程与马尔可夫链	王梓坤	1980. 1
第 6 号	强性结构的数学理论	冯康、石钟慈	1981. 5

（续）

序数	书　　名	作　　者	出版时间
第7号	哥德巴赫猜想	潘承洞、潘承彪	1981.2
第8号	运动稳定性理论与应用	秦元勋、王慕秋、王联	1981.6
第9号	值分布论及其新研究	杨乐	1982.8
第10号	仿射微分几何	苏步青	1982.6
第11号	亚纯函数的奇异方向	庄圻泰	1982.8
第12号	典型群上的调和分析	龚升	1983.11
第13号	线性算子谱理论（Ⅰ）	夏道行	1983.4
第14号	线性模型参数的估计理论	陈希孺等	1985.4
第15号	整函数和亚纯函数理论——亏值、渐近值和奇异方向	张广厚	1986.8
第16号	物理在微分几何中的应用	陆启铿	1986
第17号	偏微分方程的差分方法	郭本瑜	1988.2
第18号	微分几何	丘成桐等	1988.7
第19号	随机服务系统	徐光辉	1988

现代数学丛书（**a series of books in modern mathematics**）

这是一套数学学术专著丛书。其宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的第一流数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成就在国内外的影响，促进学科发展。它包括纯粹数学、应用数学和计算数学方面的内容。它可供高等学校数学系高年级学生、研究生及有关研究人员参考。该丛书由上海科学技术出版社于1963年开始出版，著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵、关肇直、吴新谋等主持这套丛书的编辑工作。到1986年为止，共出版了8种，其书名、作者及出版年代见下表。

现代数学基础丛书（**a series of books in foundation of modern mathematics**） 由科学出版社出版。主编为程民德教授。副主编为夏道行、龚升、王梓坤、齐民友教授。这套丛书以大学高年级学生及研究生为主要读者对象，内容涉及现代数学的各分支学科，深入浅出地阐述有关的基础理论和发展方向。这套丛书自1981年以来共出版了26种29本，书名、作者及出版时间见下表。

现代数学丛书

书名	作者	出版时间
典型流形与典型域	陆启铿	1963.5
齐性空间的微分几何学	谷超豪	1965.3
无限维空间上测度和积分论(上)抽象调和分析	夏道行	1965.4
极限环论	叶彦谦	1965.9 1984.2(第二版)
计算几何	苏步青	1981.1
多复变数的奇异积分	龚 升	1982.11
高维动力系统的周期轨道:理论和应用	李炳熙	1984.6
临界点理论及其应用	张恭庆	1986.7

现代数学基础丛书

书名	作者	出版时间
数理逻辑基础(上)	胡世华、陆钟万	1981.1
数理统计引论	陈希孺	1981.11
组合论(上)	柯召、魏万迪	1981.10
紧黎曼曲面引论	伍鸿熙、吕以辇、陈志华	1981.3
多元统计分析引论	张尧庭、方开泰	1982.6
概率论基础	严士健等	1982.8
数理逻辑基础(下)	胡世华、陆钟万	1982.8
有限群构造(上)	张远达	1982.11
有限群构造(下)	张远达	1982.12
环与代数	刘绍学	1983.3
测度论基础	朱成熹	1983.9
分析概率论	胡迪鹤	1984.4

（续）

书　　名	作　　者	出版时间
巴拿赫空间引论	定光桂	1984
微分方程定性理论	张芷芬　丁同仁等	1985.5
傅立叶积分算子理论及其应用	仇庆久等	1985.9
辛几何引论	J·柯歇尔　邹异明	1986.3
算子代数	李炳仁	1986.6
概率论基础和随机过程	王寿仁	1986.5
线性偏微分算子引论(上)	齐民友	1986.8
微分动力系统原理	张筑生	1986.12
线性代数群表示导论(上)	曹锡华	1987.2
模型论基础	王世强	1987.8
递归论	莫绍揆	1987.11
组合论(下)	魏万迪	1987.12
有限群导论(上)	徐明耀	1987.12
拟共形映射及其在黎曼曲面中的应用	李忠	1988.1
同调代数	周伯勋	1988.2
代数函数与常微分方程	何育赞	1988.2
近代调和分析方法及其应用	韩永生	1988.6

北京大学数学丛书(**a series of books in mathematics of Beijing University**)　北京大学出版社出版。它以数学、计算数学、概率统计及有关专业高年级本科生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象。其特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，每一部书大约相当于一学期三学时研究生课程的取材。编辑此书的主要目的是为适应我国培养研究生的需要，同时，它还可作为数学及有关系科高年级选修课参考书。这套丛书由 1980 年开始出版，1981 年设立编委会，由程民德任主编，江泽培、丁石孙任副主编，还有编委若

干人。《北京大学数学丛书》现已出版 8 种,其书名、作者和出版时间见下表。

北京大学数学丛书

书名	作者	出版时间
同伦论基础	廖山涛、刘旺金	1980.12
抽样论	许宝騄	1982.4
微分几何讲义	陈省身、陈维桓	1983.12
Hp 鞅论	龙瑞麟	1985.3
代数曲线	〔美〕P·格列菲斯	1985.6
代数学(上)	莫宗坚等	1986.10
代数学(下)	莫宗坚、蓝以中、赵春来	1986.12
二阶矩阵群的表示与自守形式	黎景辉、蓝以中	1990.5

《数学原理》(Eléments de Mathematique) 法国布尔巴基学派编辑出版的一套数学丛书,是以布尔巴基学派的数学结构的观点对全部数学作出的综述。这套丛书从 1939 年开始出版,由巴黎的一个墨西哥血统的出版商弗雷曼(Freyman)负责出版。到 1965 年出了 31 卷,1973 年出到 36 卷,至今仍未宣布出完。《数学原理》由几大部分组成,第一部分包括前 21 卷,它的分类是:①集合论;②代数学;③一般拓扑学;④单实变函数;⑤拓扑向量空间;⑥积分论。以后各卷内容涉及黎曼几何,微分拓扑、调和分析、微分流形、李群等分支。

《数学原理》是一套涉及现代数学各个领域,概括某些最新研究成果的博大精深的丛书,它是布尔巴基学派集体创作的成果。在 1935 年布尔巴基讨论班的成立大会上,大家制定了一个庞大的写作计划:集体撰写一部概括现代数学的著作《数学原理》,计划在三年内写出 2000 页,以阐明数学的基本原理。但事实上 30 年也未能完成这个计划。《数学原理》的每一卷都先指定布尔巴基学派的一名或几名成员担任撰写者。他(们)写出初稿后,在讨论班上宣读,经过激烈的讨论,大家对初稿提出批评和建议。有时初稿被完全否定,而重新让其他成员撰写。每个课题一般要进行五、六次的讨论,直到大家都满意才能定稿。为了避免冗长的作者署名,他们采用 Nicolas Bourbaki 作为集体的笔名。《数学原理》陆续被译成英、日、俄等多种文字。

《数学讲座论文集》(Lecture Notes in Mathematics) 一种国际性的数学丛书。由施普林格出版社(Springer Verlag)在 1964 年创始。

它是一种以刊登数学研究新成果为主的丛书。这些新成果主要来自一些十分专门的数学讲座、讨论班和研究班等。其特点是及时、快速地使人们了解新的数学进展。此外,《数学讲座论文集》还刊载各种国际数学会议的专门文集。这套丛书到1990年已出版了1400多本,平均每年出50多本。1988年出第1299—1362号,共64本;1989年出第1363—1414号,共52本。现在这套丛书由A·多尔德(A. Dold)、B·埃克曼(B. Eckmann)和F·塔肯斯(F. Takens)负责出版。

《研究生用数学丛书》(Graduate Texts in Mathematics) 也称数学研究生教材。由总部设在柏林的施普林格出版社(Springer—Verlag)出版。这是一套较为系统的数学专业研究生教科书,1971年开始出版,到1990年已出到121卷。现在的编委会由J·H·尤因(J. H. Ewing)、F·W·格林(F·W·Gehring)和P·R·哈尔莫斯(P·R·Halmos)组成。我国世界图书出版公司自1987年以后,购买了《研究生用数学丛书》的版权,于1988年4月出版了其1—106卷(第94卷除外)。

数学大事年表

约公元前 3000 年	• 埃及象形数字，采用 10 进位记数。
公元前 2400～前 1600 年	• 早期巴比伦泥板楔形文字，采用 60 进位值制记数法，掌握某种开平方的方法，已知勾股定理并给出若干组勾股数。
公元前 1850～前 1650 年	• 埃及纸草书(莫斯科纸草书与莱因德纸草书)，使用 10 进非位值制记数法，将所有分数化为单位分数。
公元前 1400～前 1100 年	• 中国殷墟甲骨文，已有 10 进制记数法。
	• 中国周公(公元前 11 世纪)、商高时代已知勾股定理的特例：勾三、股四、弦五。
约公元前 600 年	• 希腊泰勒斯开始了命题的证明。
	• 中国陈子已知勾股定理的一般形式。
约公元前 540 年	• 希腊毕达哥拉斯学派提出“万物皆数”，发现勾股定理，并导致不可通约量的发现。
约公元前 500 年	• 印度《绳法经》中给出 $\sqrt{2}$ 相当精确的值，并知勾股定理。
约公元前 465 年	• 希腊伊诺皮迪斯提出几何作图只能用直尺和圆规这两种工具。
约公元前 460 年	• 希腊智人学派提出几何作图三大问题：化圆为方、三等分角和倍立方体。
约公元前 450 年	• 希腊埃利亚学派的芝诺提出悖论，其中有四个运动性悖论。
约公元前 430 年	• 希腊安蒂丰提出穷竭法。
	• 中国《墨经》给出若干几何概念和命题。
约公元前 410 年	• 希腊德谟克利特提出原子论学说。
约公元前 380 年	• 希腊柏拉图在雅典创办“学园”，主张通过几何的学习培养逻辑思维能力。
约公元前 370 年	• 希腊欧多克索斯创立比例论。
约公元前 350 年	• 希腊门奈赫莫斯开始系统研究圆锥曲线。
约公元前 340 年	• 希腊亚里士多德奠定了逻辑学的基础；讨论定义、公理、公设的含义及区别。
约公元前 335 年	• 希腊欧德莫斯著《几何学史》。

	·中国筹算记数,采用十进位值制。
约公元前300年	·希腊欧几里得著《几何原本》,是用公理法建立演绎数学体系的最早典范。
公元前250～前212年	·希腊阿基米德确定了大量复杂几何图形的面积与体积;给出圆周率的上下界;设计一种可以表示任意大数的方法;提出用力学方法推测问题答案,隐含近代积分论思想。
约公元前230年	·希腊埃拉托塞尼发明"筛法"。
约公元前225年	·希腊阿波罗尼奥斯著《圆锥曲线论》,完整叙述了圆锥曲线的性质。
约公元前150年	·中国现存最早的数学书《算数书》成书(1983—1984年间在湖北江陵出土)。
约公元前140年	·希腊希帕霍斯采用经纬度来确定天球上星的位置;制作一个和三角函数表相仿的"弦表"。
约公元前100年	·中国《周髀算经》成书,记叙了勾股定理。
	·中国古代最重要的数学著作《九章算术》经历代增补修订基本定形(一说成书年代为公元50—100年间),其中比例计算、线性插值法、盈不足术、线性方程组解法、正负数运算法则,以及正负数运算等都是世界数学史上的重要贡献。
约公元62年	·希腊海伦给出用三角形三边长表示面积的公式(海伦公式);提出平方根的近似公式。
约公元100年	·希腊尼科马霍斯著《算术入门》,是第一本完全独立于几何学的系统的算术书。
约公元150年	·希腊托勒密著《天文学大成》,发展了三角学。
约公元250年	·希腊丢番图著《算术》,解决了大量不定方程问题,并引入一系列缩写符号,是古希腊代数的代表作。
公元263年	·中国刘徽注释《九章算术》,用割圆术计算圆周率,证明圆面积公式,提出解决球体积的方法,推导四面体及四棱锥体积等,包含有极限思想。
约公元300年	·中国《孙子算经》成书,系统记述了筹算记数制,卷下"物不知数"题是孙子剩余定理的起源。
约公元320年	·希腊帕波斯著《数学汇编》,总结古希腊各家的研究成果,记述了"帕波斯定理"和旋转体体积

	计算法。
约公元 410 年	• 希腊许帕提娅注释欧几里得、丢番图等人的著作，是历史上第一位女数学家。
约公元 460 年	• 希腊普罗克洛斯注释欧几里得《几何原本》，概述已失传的欧德莫斯《几何学史》，是研究几何学史的重要史料。
约公元 462 年	• 中国祖冲之算出圆周率在 3.1415926 与 3.1415927 之间，并以 22/7 为约率，355/113 为密率(现称祖率)。
	• 中国祖冲之和他的儿子祖暅提出“幂势既同则积不容异”的原理，现称“祖暅原理”，相当于西方 17 世纪的卡瓦列里原理。
公元 499 年	• 印度阿耶波多著《阿耶波多历数书》，总结了当时印度的天文、算术、代数与三角学知识；已知圆周率为 3.1416，尝试以连分数解不定方程，有弧度制的思想。
约公元 510 年	• 罗马博伊西斯著《算术入门》和《几何学》，记载了一种算盘的构造及用法。
公元 6 世纪	• 中国《算经十书》中的《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《五经算术》、《张丘建算经》成书；《张丘建算经》提出“百鸡问题”，属于三元一次不定方程。
公元 600 年	• 中国刘焯首创等间距二次内插公式。
约公元 625 年	• 中国王孝通著《缉古算经》，是最早提出数字三次方程数值解法的著作。
公元 628 年	• 印度婆罗摩笈多著《婆罗摩历算书》，已知圆内接四边形面积计算法，推进了一、二次不定方程的研究。
公元 656 年	• 中国李淳风等注释十部算经，后通称《算经十书》。
公元 724 年	• 中国一行实测出地球子午线一度的长；使用了不等间距二次内插法。
公元 820 年	• 阿拉伯花拉子米著《代数学》，书名第一字演变成代数学一词，主要内容为二次方程求解，12 世纪被译为拉丁文传入欧洲。
约公元 850 年	• 印度马哈维拉著《计算纲要》，较全面地反映了印度当时数学各方面的成就和水平。
约公元 870 年	• 印度出现包括零号的十进制数码，后传入阿拉

	伯演变为现今的印度—阿拉伯数码。
约公元 900 年	·阿拉伯艾布·卡米尔《代数学》等成书。
约公元 980 年	·阿拉伯艾布瓦法制作了间隔 10′ 的正弦和正切函数表。
约公元 1020 年	·阿拉伯凯拉吉阐明代数学的基本特征是通过解方程从已知量去求未知量。
约公元 1050 年	·中国贾宪提出二项式展开系数表(现称贾宪三角)和增乘开方法。
公元 1088 年	·中国沈括《梦溪笔谈》成书,提出隙积术。
约公元 1100 年	·阿拉伯奥马·海亚姆首创用两条圆锥曲线的交点来表示三次方程的根。
约公元 1150 年	·印度婆什迦罗著《天文系统至极》,为中世纪印度数学的代表作,其中给出二元不定方程 $x^2=1+py^2$ 的多组解,对负数和除以零的意义有所认识,广泛使用无理数。
公元 1202 年	·意大利斐波那契著《算盘书》,向欧洲人系统介绍了印度—阿拉伯数码、位值制记数法、整数和分数的各种算法。
公元 1247 年	·中国秦九韶著《数书九章》,创立解一次同余式组的大衍求一术和求高次方程数值解的正负开方术,后者相当于西方的霍纳法(1819)。
公元 1248 年	·中国李冶著《测圆海镜》,是中国现存第一本系统论述天元术的著作。
约公元 1250 年	·阿拉伯纳西尔丁开始使三角学脱离天文学而独立,并对欧几里得等希腊数学家的著作进行翻译和评注。
公元 1261 年	·中国杨辉记载了贾宪的“开方作法本源”图(即贾宪三角),杨辉对纵横图(幻方)也有深入研究(1275)。
公元 1280 年	·中国郭守敬、王恂首创三次内插法。
公元 1303 年	·中国朱世杰著《四元玉鉴》,将天元术推广为四元术,研究高阶等差数列求和问题。
公元 1321 年	·法国莱维本热尔松给出几个物体每次取 K 个的排列及组合数。
约公元 1325 年	·英国布雷德沃丁将正切、余切引入三角计算。
公元 14 世纪	·珠算在中国普及。
约公元 1360 年	·法国奥雷姆著《比例算法》,引入分指数概念,又在《论质量与运动的结构》等著作中研究变

	化与变化率，用经、纬度（相当于横、纵坐标）表示点的位置并进而讨论函数图象。
约公元 1427 年	·阿拉伯卡西著《算术之钥》，系统论述算术、代数的原理和方法，并在《圆周论》(1424)中求出圆周率小数值的 17 位准确数字。
公元 1435 年	·意大利阿尔贝蒂著《论绘画》，阐发透视法的数学原理，含有射影几何的因素。
公元 1464 年	·德国雷格蒙塔努斯著《论各种三角形》，是欧洲第一本独立的三角学著作，其中出现正弦定律。
公元 1482 年	·欧几里得《几何原本》(拉丁文译本)首次印刷出版，是西方较早印刷的数学书。
公元 1489 年	·捷克—德国数学家维德曼最早使用符号＋、－表示加、减运算。
公元 1494 年	·意大利帕乔利著《算术、几何、比与比例集成》，是中世纪以来第一本内容全面的算术书，也是最早印刷的数学书之一。
公元 1514 年	·德国迪勒给出欧洲最早的幻方(4 阶)。
公元 1545 年	·意大利卡尔达诺《大术》出版，载述了费罗(1515)、塔尔塔利亚(1535)的三次方程解法和费拉里(1544)的四次方程解法，承认负根，讨论虚数及表示符号。他还写了《游戏机遇的学说》，是概率论的先声。
公元 1551 年	·奥地利雷蒂库斯制作每隔 10″的六种三角函数的七位数表，由其学生奥托最后完成(1596)。
公元 1557 年	·英国雷科德创用＝表示相等，后通行全世界。
公元 1570 年	·英国比林斯利将欧几里得《几何原本》首次译为英文出版。
公元 1572 年	·意大利邦贝利的《代数学》出版，指出对于三次方程的不可约情形，通过虚数运算必可得三个实根，给出初步的虚数理论。
公元 1575 年	·意大利毛罗利科最早使用数学归纳法。
公元 1585 年	·荷兰斯蒂文著《论十进》，创设十进分数(小数)的记法。
公元 1591 年	·法国韦达著《分析方法入门》，引入大量代数符号，改良三、四次方程解法，指出根与系数的关系，为符号代数学奠定基础。
公元 1592 年	·中国程大位完成《直指算法统宗》，详述算盘的

用法，载有大量运算口诀，是中国古代流传最广的数学书，明末传入日本、朝鲜。

公元1593年 · 法国韦达给出圆周率π的第一个解析表达式。

公元1606年 · 中国徐光启和意大利利玛窦合作将欧几里得《几何原本前六卷》译为中文。

公元1609年 · 德国开普勒建立行星椭圆轨道理论。

公元1614年 · 英国纳皮尔创立对数理论。

公元1615年 · 德国开普勒著《酒桶新立体几何》，有求酒桶体积的方法，是阿基米德求积方法向近代积分法的过渡。

公元1617年 · 英国布里格斯制作第一个常用对数表。

公元1623年 · 英国冈特设计对数尺度计算尺。

公元1627年 · 日本吉田光由著《尘劫记》，为早期和算著作。

公元1629年 · 荷兰吉拉尔最早提出代数基本定理。

· 法国费马已得解析几何学要旨，并掌握求极大极小值方法。

公元1635年 · 意大利卡瓦列里建立“不可分量原理”。

公元1637年 · 法国笛卡儿的《几何学》出版，创立解析几何学。

· 法国费马提出“费马大定理”

公元1639年 · 法国德扎格著《试图处理圆锥与平面相交情形的文稿》，为射影几何先驱。

公元1640年 · 法国帕斯卡著《圆锥曲线论》。

公元1642年 · 法国帕斯卡发明加减法机械计算机。

公元1655年 · 英国沃利斯著《无穷算术》，导入无穷级数与无穷乘积，首创无穷大符号∞(1655)

公元1657年 · 荷兰惠更斯著《论赌博中的计算》，引入数学期望概念，是概率论的早期著作。在此之前，法国帕斯卡和费马等人已由赌博问题而开始考虑概率理论。

公元1665年 · 英国牛顿一份手稿中已有流数术的记载，这是最早的微积分学文献。其后他在《无穷多项方程的分析》(1669年撰，1711年发表)、《流数法与无穷极数》(1671年撰，1736年发表)等著作中进一步发展流数法并建立微积分基本定理。

公元1666年 · 德国莱布尼茨写成《组合的艺术》，孕育了数理逻辑思想。

公元1667年 · 英国格雷戈里发表《论圆与双曲线的实际求

积》,最早注意到无穷级数的敛散性。

公元 1670 年	• 英国巴罗著《几何学讲义》,引进"微分三角形"概念。
公元 1673 年	• 德国莱布尼茨制作了能进行加、减、乘、除四则运算的机械计算机。
约公元 1680 年	• 日本关孝和创始和算,引入行列式概念,开创"圆理"研究。
公元 1680～约 1690 年	• 中国梅文鼎会通中西数学,共著书约 80 种。
公元 1684 年	• 德国莱布尼茨发表第一篇微分学论文《一种求极大极小和切线的新方法》,两年后又发表第一篇积分学论文,创用积分符号。
公元 1687 年	• 英国牛顿的《自然哲学的数学原理》出版,首次以几何形式发表其流数术。
公元 1690 年	• 瑞士雅各布·伯努利提出"悬链线问题"。
公元 1691 年	• 法国罗尔著《方程的解法》,提出罗尔定理。
公元 1696 年	• 瑞士约翰·伯努利提出"最速降线问题",后导致变分法的产生。
	• 法国洛必塔出版《无穷小分析》,其中载有求极限的洛必塔法则。
公元 1707 年	• 英国牛顿出版《广义算术》,阐明代数方程理论。
公元 1713 年	• 瑞士雅各布第一·伯努利的《猜度术》出版,载有伯努利大数律。
公元 1715 年	• 英国泰勒出版《正的和反的增量方法》,内有他在 1712 年发现的把函数展开成级数的泰勒公式。
公元 1718 年	• 法国棣莫弗出版《机会论》,这是概率论早期的重要著作,其中首次定义独立事件的乘法定理,并给出二次分布公式。
公元 1722 年	• 法国棣莫弗给出公式 $(\cos\Phi + i\sin\Phi)^n = \cos n\Phi + i\sin n\Phi$。
公元 1730 年	• 英国斯特灵发表《微分法,或关于无穷级数的简述》,其中给出了 $n!$ 的斯特灵公式。
公元 1731 年	• 法国克莱罗著《关于双重曲率曲线的研究》,开创空间曲线的理论。
公元 1734 年	• 英国贝克莱出版《分析学家》,指出微积分在逻辑上的一些缺陷。
公元 1736 年	• 瑞士欧拉解决了柯尼斯堡七桥问题。

公元 1742 年	• 英国马克劳林出版《流数通论》，试图用严谨的方法来建立流数学说，其中给出了马克劳林展开式。
	• 德国哥德巴赫与瑞士欧拉通信，提出著名的哥德巴赫猜想。
公元 1743 年	• 法国达朗贝尔出版《论动力学》，建立动力学基本规律——达朗贝尔原理。
公元 1744 年	• 瑞士欧拉著《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》，标志着变分法作为一个新的数学分支的诞生。
公元 1747 年	• 法国达朗贝尔发表《弦振动研究》，导出了弦振动方程，成为偏微分方程研究的开端。
公元 1748 年	• 瑞士欧拉出版《无穷分析引论》，与后来发表的《微分学原理》(1755)和《积分学原理》(1770)一起，以函数概念为基础综合处理微积分理论，给出了大量重要的结果，标志着微积分发展的新阶段。
公元 1750 年	• 瑞士克莱姆给出解线性方程组的克莱姆法则。
公元 1761 年	• 德国兰伯特证明了 π 和 e 是无理数。
公元 1771—1772 年	• 法国旺德蒙德首次独立于线性方程组求解对行列式理论进行系统研究。
公元 1777 年	• 法国布丰提出投针问题，开始了几何概率论早期研究。
公元 1779 年	• 法国贝祖著《代数方程的一般理论》，系统论述消元法理论。
公元 1788 年	• 法国拉格朗日出版《分析力学》使力学分析化，并总结了变分法的成果。
公元 1794 年	• 法国勒让德《几何学基础》出版，成为当时标准的几何教科书。
公元 1795 年	• 法国蒙日发表《关于把分析应用于几何的活页论文》，是微分几何的先驱性工作。
公元 1797 年	• 法国拉格朗日著《解析函数论》，提出以函数的幂级数展开为基础建立微积分理论。
	• 挪威韦塞尔向丹麦科学院提交论文《方向的解析表示，特别应用于平面与球面多边形的测定》，第一次给出复数的几何表示。
公元 1799 年	• 法国蒙日出版《画法几何学》，使画法几何学成为几何学的专门分支。

	·德国高斯给出代数基本定理的第一个证明。
公元 1799—1825 年	·法国拉普拉斯的 5 卷巨著《天体力学》出版，其中包括许多重要的数学贡献，如拉普拉斯方程、位势函数等。
公元 1801 年	·德国高斯出版《算术研究》，开始了近代数论的研究。
	·中国汪莱提出高次方程正根存在的判别条件及正根个数问题。
公元 1802 年	·法国蒙蒂克拉和拉朗德合撰的 4 卷《数学史》全部出版，这是最早的较系统的数学史著作。
公元 1803 年	·法国卡诺出版《位置几何学》，使射影几何开始复兴。
公元 1807 年	·法国傅立叶在热传导研究中提出任意函数的三角级数表示法，即傅立叶级数，他的思想总结在 1822 年发表的《热的分析理论》之中。
公元 1810 年	·法国热尔岗创办《纯粹与应用数学年刊》，这是最早的专门数学期刊。
公元 1812 年	·法国拉普拉斯著《概率的分析理论》，提出概率的古典定义，将分析工具引入概率论。 英国剑桥分析学会成立
公元 1814 年	·法国柯西宣读复变函数论第一篇重要论文《关于定积分理论的报告》(1827 年正式发表)，开创了复变函数论的研究。
公元 1817 年	·捷克波查诺著《纯粹分析的证明》，首次给出连续性、导数的恰当定义，提出一般级数收敛性的判别准则。
公元 1818 年	·法国泊松导出波动方程解的“泊松公式”。
公元 1821 年	·法国柯西出版《分析教程》，引进不一定具有解析表达式的函数概念；独立于波尔查诺提出极限、连续、导数等定义和级数收敛判别准则，是分析严密化运动中第一部影响深远的著作。
公元 1822 年	·法国庞斯列著《论图形的射影性质》，奠定了射影几何学的基础。
公元 1824 年	·挪威阿贝尔证明了一般五次方程不可能用根式求解，其论文《高于四次的一般方程的代数求解之不可能性的证明》于 1826 年发表。
公元 1826 年	·俄国罗巴切夫斯基在喀山大学做题为“附有平行线定理的一个严格证明的几何学原理简

述》，首次阐明他所发现的非欧几何学原理(1829年开始发表有关论著)。
- 挪威阿贝尔著《关于很广一类超越函数的一个一般性质》，开创了椭圆函数论研究。
- 德国克雷尔创办《纯粹与应用数学杂志》。
- 法国热尔岗和庞斯列各自建立对偶原理。

公元1828年
- 德国高斯著《关于曲面的一般研究》，开创曲面内蕴几何学研究。
- 德国麦比乌斯著《重心演算》，引进齐次坐标，与普吕克等开辟了射影几何的代数方向。

公元1828年
- 英国格林著《数学分析在电磁理论中的应用》，发展位势理论。

公元1829年
- 德国雅可比著《椭圆函数论新基础》，是椭圆函数理论的奠基性著作。
- 法国斯图姆解决在给定范围内实系数代数方程实根个数问题(斯图姆定理)。

公元1829—1832年
- 法国伽罗瓦彻底解决了代数方程的根式可解性问题，确立了群论的基本概念。

公元1830年
- 英国皮科克著《代数通论》，首创以演绎方式建立代数学，为代数中更抽象的思想开辟了道路。

公元1832年
- 匈牙利波尔约发表《绝对空间的科学》，独立于罗巴切夫斯基提出非欧几何学原理。
- 瑞士施泰纳著《几何图形相互依赖性的系统发展》，利用射影概念从简单结构构造复杂结构，发展了射影几何。

公元1834年
- 俄国奥斯特罗格拉茨基建立了三重积分和曲面积分之间相互关系的著名公式和重积分的变换公式。

公元1836年
- 法国刘维尔创办法文的《纯粹与应用数学杂志》。

公元1837年
- 德国狄利克雷发表第一篇解析数论论文，证明了任何算术序列$\{a+nb\}$(a,b互素)中，必定存在无穷多个素数，其中使用了著名的狄利克雷级数。同年他提出现今通用的函数定义。

公元1840年
- 法国柯西证明了微分方程初值问题解的存在性。

公元1841—1856年
- 德国外尔斯特拉斯着手关于分析严密化的工

作，主张将分析建立在算术概念的基础之上，给出极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义和级数一致收敛性的概念；同时提出在幂级数基础上建立复变函数论。

公元 1843 年
- 英国哈密顿发现四元数。
- 法国洛朗著《柯西定理的推广》，建立洛朗级数展开式。

公元 1845 年
- 法国勒威耶和英国亚当斯同时分别用微分方程方法推算出当时尚未发现的海王星的位置。

公元 1847 年
- 德国施陶特著《位置的几何学》，不依赖度量概念建立射影几何体系。
- 德国利斯廷出版《拓扑学初步》，完成拓扑学的某些奠基性工作，书中首次给出“拓扑”这一术语。
- 英国布尔出版《逻辑的数学分析》，与 1854 年出版的《思维规律的研究》一起，建立逻辑代数(即布尔代数)。
- 英国德·摩根著《形式逻辑》，对数理逻辑的发展产生深刻影响。

公元 1849 年
- 中国项名达用初等方法求得椭圆周长的级数表达式。

公元 1849—1854 年
- 英国凯莱提出抽象群概念。

公元 1851 年
- 德国黎曼著《单复变函数的一般理论基础》，给出单值解析函数的黎曼定义，创立黎曼面的概念，是复变函数论的一篇经典性论文。

公元 1853 年
- 德国克罗内克提出著名猜想(克罗内克青春之梦)。

公元 1854 年
- 德国黎曼著《关于几何基础的假设》，创立 n 维流形的黎曼几何学。

公元 1855 年
- 英国凯莱引进矩阵的基本概念与运算。

公元 1858 年
- 德国黎曼给出 ζ 函数的积分表示与它满足的函数方程，提出黎曼猜想。
- 德国麦比乌斯发现单侧曲面(麦比乌斯带)。

公元 1859 年
- 俄国切比雪夫阐明把曲线运动分解为直线运动的机械原理，由此创立函数逼近理论。
- 中国李善兰与英国的伟烈亚力合译的《代数学》，《代微积拾级》以及《几何原本》后 9 卷中文本出版，这是中国翻译西方近代数学著作的

开始。

- 中国李善兰建立著名的组合恒等式(李善兰恒等式)。

公元1861年

- 德国外尔斯特拉斯在柏林讲演中给出连续但处处不可微函数的例子。

公元1863年

- 德国狄利克雷出版《数论讲义》,对高斯《算术研究》作了明晰的解释并有创见,是解析数论的经典文献。

公元1865年

- 伦敦数学会成立,是历史上最早成立的数学会。

公元1866年

- 俄国切比雪夫利用切比雪夫不等式建立关于独立随机变量序列的大数律,成为概率论研究的中心课题。

公元1868年

- 意大利贝尔特拉米著《论非欧几何学的解释》,在伪球面上实现罗巴切夫斯基几何,这是第一个非欧几何模型。
- 德国黎曼的论文《用三角级数表示函数的可表示性》正式发表,对傅立叶级数的研究作出重要贡献,并建立黎曼积分理论。
- 德国克莱布什和卡尔·诺伊曼共同创办德文《数学年刊》杂志。
- 意大利邦孔帕尼创办《数理科学的历史与文献通报》。

公元1870年

- 法国若尔当出版《置换与代数方程》,系统论述伽罗瓦理论并有自己的创见,是群论的经典著作。

公元1871年

- 德国克莱因在射影空间中适当引进度量而得到双曲几何和椭圆几何,这是不用曲面而获得的非欧几何模型。
- 德国康托尔在三角级数表示的唯一性研究中首次引进无穷集合的概念,并在以后的一系列论文中奠定了集合论的基础。

公元1872年

- 德国克莱因发表《埃朗根纲领》,建立了把各种几何学看作为某种变换群的不变量理论的观点,以群论为基础统一几何学。
- 实数理论的确立:康托尔的基本序列理论;戴德金的分割理论;外尔斯特拉斯的单调序列理论。

公元 1873 年　·法国埃尔米特证明 e 的超越性。

·德国李普希茨改进柯西关于微分方程初值问题的存在唯一性定理，提出“李普希茨条件”。

公元 1874 年　·挪威李开创连续变换群的研究，现称李群理论。

公元 1875—1876 年　·德国贝茨著《高阶流型的全曲率理论》，建立 n 维空间中 $(n-1)$ 维曲面理论。

公元 1875 年　·德国汉克尔出版《古代与中世纪数学史》，受到数学界的重视。

公元 1879 年　·德国弗雷格出版《概念语言》，建立量词理论，给出第一个严密的逻辑公理体系，后又出版《算术基础》等著作，试图把数学建立在逻辑的基础上。

公元 1881—1886 年　·法国庞加莱发表《关于由微分方程确定的曲线》，创立微分方程定性理论。

公元 1881 年　·美国吉布斯发行小册子《向量分析基础》，开始向量分析的研究。

公元 1882 年　·德国帕施给出第一个射影几何公理体系。

·德国林德曼证明 π 的超越性。

·瑞典米塔－列夫勒创办《数学学报》。

·俄国博贝宁发表《古埃及数学》，开创对莱因德纸草书的早期研究。

公元 1886 年　·德国外尔斯特拉斯出版《函数论论文集》，总结他在这一领域的工作。

公元 1887 年　·法国达布著《曲面的一般理论》，发展了活动标架法。

公元 1889 年　·意大利皮亚诺著《算术原理》，给出自然数公理体系。

·美国高尔顿在统计学中引入相关与回归等重要概念，开创生物统计学的系统研究。

公元 1890 年　·法国皮卡创立逐步逼法证明微分方程解的存在性。

公元 1892 年　·德国巴赫曼发表《无理数的性质》，创立“区间套原理”，建立无理数理论。

公元 1892—1894 年　·法国庞加莱出版《天体力学新方法》，载录了作者在天体力学方面的许多新的研究成果，特剧是三体问题的普遍理论和新的研究方法。

公元 1895 年　·法国庞加莱著《位置几何学》，创立用剖分研究

	流形的方法，为组合拓扑学奠定基础。
	• 德国弗罗贝尼乌斯开始群的表示理论的系统研究。
公元 1895—1897 年	• 德国 G·康托尔发表《关于超限数理论的基础》，发展了超限数理论的研究。
公元 1896 年	• 德国闵科夫斯基著《数的几何》，创立系统的数的几何理论。
	• 法国阿达马与瓦里—布桑证明素数定理。
公元 1897 年	• 英国伯恩赛德发表《有限阶群论》，是有限群论的代表作。
	• 第一届国际数学家大会在瑞士苏黎士举行。
公元 1898 年	• 英国皮尔逊创立描述统计学。
公元 1899 年	• 德国希尔伯特出版《几何基础》，给出历史上第一个完备的欧几里得几何公理体系，开创公理化方法，并预示了数学基础的形式主义观点。
公元 1900 年	• 德国希尔伯特在巴黎第二届国际数学家大会上作题为《数学问题》的报告，提出了 23 个著名的数学问题。
公元 1901 年	• 德国希尔伯特证明了狄利克雷原理，开创变分法的直接解法。
	• 英国皮尔逊创办《生物统计学》杂志。
	• 法国庞加莱开创丢番图方程有理解的研究。
公元 1902 年	• 法国勒贝格发表论文《积分、长度与面积》。建立了“勒贝格测度”和“勒贝格积分”的概念，开创现代积分理论。
	• 英国伯恩赛德提出“伯恩赛德猜想”：每一个非交换的单群都是偶数价的(1963 年由汤普森等人证明)。
公元 1903 年	• 英国罗素提出“罗素悖论”，促进了数学基础研究。
	• 德国萨顿出版《十七十八世纪数学史》，开创数学断代史研究领域。
公元 1904 年	• 德国策梅罗提出选择公理，并证明“良序定理”：任何集合都能良序化。
	• 法国勒贝格证明了有界函数黎曼可积的充要条件是不连续点构成一个零测度集，完全解决了黎曼可积性的问题
	• 俄国伯恩斯坦解决了希尔伯特第 19 问题。

	·法国庞加莱提出"庞加莱猜想"。
	·英国皮尔逊开始用统计方法研究人的智力遗传。
公元1905年	·德国爱因斯坦提出狭义相对论。
	·德国舒尔重建群的特征理论。
	·德国希尔伯特初步解决希尔伯特第21问题：具有给定单值群的线性微分方程的存在性。
公元1906年	·法国弗雷歇引入函数空间的一般概念，定义"度量空间"；引入"泛函"概念，并给出泛函的连续性和可微性的定义。
	·俄国马尔可夫提出"马尔可夫链"的概念，用以研究自然过程。
	·法国勒贝格《三角级数讲义》问世，提出傅里叶级数的逐项积分法。
公元1907年	·匈牙利里斯证明矩阵力学与波动力学等价的数学基本定理。
	·荷兰布劳威尔提出直觉主义数学，是构造性数学的开端。
	·法国庞加莱证明了复变函数论的一个基本定理——黎曼共形映照定理。
	·德国闵科夫斯基提出四维时-空概念。
公元1908年	·德国策梅洛建立第一个公理集合论理论系统(后经弗伦克尔改进为ZF系统)。
	·德国亨泽尔《代数数论》出版，建立P—进位数理论。
	·英国戈塞特提出精确样本理论(数理统计)
	·德国舍恩弗利斯提出点集拓扑概念。
	·德国M.康托尔四卷本《数学史讲义》出齐。
公元1909年	·德国兰道的《素数分布讲义》出版，首次系统地阐述了解析数论。
	·匈牙利里斯证明了"里斯表示定理"，是泛函分析发展史上的一个里程碑。
公元1910年	·英国罗素、怀特海的《数学原理》开始出版(至1913年出齐)，促进了数理逻辑的发展。提出另一种集合论公理系统——类型论。
	·美国维布伦、杨格《射影几何学》第一卷出版，第二卷1918年出版。建立了射影几何的公理系统和解析表示。

	·荷兰布劳威尔提出单纯映射的连续逼近方法，开始不动点理论的研究，引入映射的拓扑度概念。
公元 1911 年	·俄国伯恩斯坦证明“伯恩斯坦不等式”(函数逼近论)。
	·俄国厄伦费斯特对统计力学作了逻辑分析。
	·荷兰布劳威尔证明了第一个不动点定理。
公元 1912 年	·俄国伯恩斯坦提出求解给定边值的二阶偏微分方程的伯恩斯坦方法。
	·法国贝尔《无理数论》出版，将连续区分为上半连续和下半连续。
	·英国费希尔建立点估计理论(至 1925 年)。
	·法国波莱尔开创拟解析函数研究。
	·德国希尔伯特提出希尔伯特空间概念。
公元 1913 年	·法国 E. 嘉当提出正交群李代数的表示，提出旋量概念。奠定李群表示论的基础。
	·德国外尔《黎曼曲面的概念》出版，提出复流形的概念
	·德国亨泽尔《数论》出版，促进赋值论和局部域论的发展。
	·德国爱因斯坦提出引力场度规概念，使黎曼几何获得实在的物理解释。
公元 1914 年	·德国豪斯多夫《集论》出版，提出拓扑空间的公理系统，奠定点集拓扑学的基础。
	·美国亚历山大证明多面体的同调群的拓扑不变性。
	·法国 E. 嘉当解决实单纯李群的判定问题。
	·日本小岛铁造提出狄利克雷级数的收敛条件。
公元 1915 年	·德国爱因斯坦将非欧几何用于广义相对论，取得巨大的成功，不仅在物理学上作出划时代的贡献，而且极大地促进了非欧几何的发展。
公元 1916 年	·德国比伯巴赫证明单叶函数面积定理；提出关于单叶函数系数的一个猜想(比伯巴赫猜想)。奠定了单叶函数理论的基础。
	·俄国卢津等人建立描述性函数论。
公元 1917 年	·德国赫克把狄利克雷 L 函数推广到代数数域上。
	·苏联伯恩斯坦提出最早的概率论公理化的问

题。

- 意大利列维－齐维塔把向量平移引入弯曲空间，发展了张量分析，并用于相对论。

公元 1918 年
- 德国外尔《时间、空间、物质》出版，促进微分几何的发展；提出统一场论。
- 荷兰布劳威尔创建直觉主义学派。
- 丹麦埃尔朗利用数学方法研究电话业务时，提出排队论。

公元 1919 年
- 法国朱利亚开创（复变函数论的）幅角分布理论。
- 德国米泽斯提出经验概率。

公元 1920 年
- 日本高木贞治解决了虚二次域上的克罗内克猜想，开创类域论。
- 德国希尔伯特创立证明论。
- 挪威布伦，创布伦筛法，推进了哥德巴赫猜想的证明工作，证明命题：(9,9)。
- 德国诺特开创理想论（至 1921 年）。

公元 1921 年
- 美国维纳发展了函数空间的测度论，为随机积分方程理论奠定基础。

公元 1922 年
- 德国希尔伯特提出著名的“希尔伯特方案”，开创数学形式化之路。
- 英国费希尔《理论统计的数学基础》出版，是现代数理统计学的奠基作之一。
- 奥地利哈恩提出赋范线性空间概念并证明了“共鸣定理”。
- 美国伯克霍夫等把不动点定理推广到无穷维的函数空间。
- 德国诺特发表《环的理想论》开始了抽象代数的现代化工作。

公元 1923 年
- 苏联的梅尼绍夫提出复变函数正则性的充要条件。
- 美国伯克霍夫等将不动点定理用于函数方程式解的存在问题，开创函数方程研究新法。
- 法国 E. 嘉当提出一般联络的微分几何学，是纤维丛概念之源。
- 波兰巴拿赫提出一种完备的赋范空间概念——即巴拿赫空间概念。
- 德国外尔表述一般的互反律。

公元 1924 年

- 波兰巴拿赫证明"分球怪论"。
- 美国维纳对一般域的狄利克雷问题进行研究，提出集合的容量概念。
- 德国外尔等证明群上调和分析的外尔－彼得定理。

公元 1925 年

- 美国莫尔斯推广其极大极小原理，第一次得出"莫尔斯不等式"，后形成微分拓扑学的莫尔斯理论。
- 美国休哈特和通奇分别提出休哈特控制图和计数抽样检验方案，开创了统计质量管理。
- 美籍匈牙利人冯·诺伊曼发展了希尔伯特空间的自共轭算子的谱理论。
- 芬兰奈望林纳提出关于亚纯函数的两个奈望林纳定理开始了亚纯函数值分布的现代理论。
- 德国诺特提议把组合拓扑学建立在群论的基础上，逐渐开创了代数拓扑学。

公元 1926 年

- 奥地利施赖埃尔提出抽象连续群概念，为拓扑群论张本。
- 美国莱夫谢茨提出莱夫谢茨不动点定理。
- 美国维纳等解决了一般域上的狄利克雷问题。
- 德国 F. 克莱因《19 世纪数学发展史讲义》出版。
- 奥地利阿廷引入实域概念，解决了希尔伯特第 17 问题。

公元 1927 年

- 奥地利阿廷证明一般互反律，解决了希尔伯特第 9 问题。
- 美国伯克霍夫开辟动力系统研究的新时代(引入极小运动集、回收集等概念)。
- 德国诺特用新的抽象方法建立了非交换代数理论。

公元 1928 年

- 中国苏步青发表题为《仿射空间曲面论》的 12 篇论文，引入仿射铸曲面和仿射旋转曲面概念，推动了仿射微分几何的发展。
- 美籍德国人库朗提出解偏微分方程的差分方法。
- 德国希尔伯特等著《数理逻辑基础》一书出版。
- 中国陈建功解决了如何刻划一个函数能用绝对收敛的三角级数表示的问题。

- 美国奈曼建立假设检验的严格数学理论。

公元 1929 年
- 美籍匈牙利人冯·诺伊曼开创冯·诺伊曼代数。
- 苏联柯尔莫戈洛夫发表论文《测度的一般理论和概率论》，开始在测度论基础上建立概率论的公理体系。
- 法国 E. 嘉当证明了单李群的秩等于贝蒂数之和。由此，开始了李群及齐性空间拓扑学研究的新阶段。

公元 1930 年
- 美国伯克霍夫建立格论。
- 苏联坎托罗维奇将泛函分析思想用于计算方法，创立了一种近似计算理论，后称为“牛顿—坎托罗维奇方法”。
- 美国布什等人发明积分仪，后称为微分解析机。这是第一台电子模拟计算机。
- 美国道格拉斯等解决并推广了普拉托极小曲面问题，因而获 1936 年第一次颁发的菲尔兹奖。
- 波兰武卡谢维奇创立多值逻辑。
- 美籍奥地利人哥德尔证明一阶谓词演算系统的完全性。

公元 1931 年
- 苏联柯尔莫戈洛夫《概率论的解析方法》出版，阐述了无后效的随机过程理论。
- 苏联庞特里亚金将亚历山大的对偶定理统一于群论。
- 美籍奥地利人哥德尔发表论文《〈数学原理〉及有关系统中的形式不可判定命题》，证明了两个不完全性定理，对数理逻辑有着划时代的意义。
- 荷兰范德瓦尔登《近世代数》出版。

公元 1932 年
- 波兰巴拿赫《线性运算理论》出版，现代泛函分析成熟。
- 德国克鲁尔等人完成赋值论并在代数数域理论中应用。
- 苏联亚历山德洛夫创立射影谱集合论的代数拓扑。

公元 1933 年
- 苏联柯尔莫戈洛夫《概率论的基础概念》出版，建立了概率论的严格公理体系。部分解决了希尔伯特第 6 问题。

- 苏联辛钦《概率论的极限定理》出版，创建平稳过程理论。
- 捷克切赫建立上同调群理论。

公元 1934 年
- 苏联格尔丰德解决希尔伯特第 7 问题的后半部分。
- 德国哈塞证明了椭圆同余函数域的相应黎曼猜想(阿廷猜想)。
- 美国莫尔斯《大范围变分法》出版，开创大范围分析理论。
- 苏联维诺格拉多夫提出估计外尔三角和的新方法，对华林问题研究作了重大推动。

公元 1935 年
- 美国惠特尼给出微分流形的一般定义，并证明它总能嵌入高维欧氏空间作为光滑的子流形。提出纤维丛的概念。
- 美国奈曼基于概率的频率解释，建立了区间估计理论。
- 芬兰阿尔福斯提出复盖面理论，获 1936 年菲尔兹奖。
- 中国熊庆来证明奈望林纳所引入的函数 T(8) 为逐段解析函数，在此基础上深入研究了无穷级亚纯函数的一般理论。
- 波兰胡雷维奇建立了同伦群理论，推广了非不变测度空间上的伯克霍夫遍历定理。
- 德国西格尔推进了希尔伯特第 11 问题的研究工作。

公元 1936 年
- 德国根岑用超限归纳法证明了自然数算术的无矛盾性。
- 苏联索伯列夫引入广义函数概念。
- 英国图灵、美国丘奇、克林建立通用计算模型，定义了算法并提出著名的图灵-丘奇论题，为计算机科学奠定了数学基础。
- 德国柯尼格创立图论。

公元 1937 年
- 苏联维诺格拉多夫证明了：每一个充分大的奇数都可以表示为三个素数之和(奇数哥德巴赫猜想)。
- 法国 H. 嘉当引入“滤子”、“超滤”概念。
- 苏联彼得洛夫斯基提出偏微分方程组的分类法。

公元 1938 年	· 美国尚农建立开关网络理论为有限自动机理论奠定基础。
	· 中国华罗庚证明"几乎全体偶数都能表示成两个素数之和"。
	· 美籍奥地利人哥德尔证明了广义连续统假设(从而连续统假设)相对于 ZF 系统的协调性。
公元 1939 年	· 罗马尼亚瓦尔德开创统计决策理论。
	· 法国布尔巴基学派的《数学原理》开始出版。
	· 美国惠特尼给出纤维丛的一般定义,即惠特尼示性类。证明了示性类的乘积公式。对纤维丛理论和代数拓扑学以极大的推动。
	· 苏联坎托罗维奇发表《组织和计划生产的数学方法》,为线性规划理论奠定基础。
	· 日本浅野启三提出非可换群的理想论。
公元 1940 年	· 苏联盖尔范德建立赋范环论,即交换巴拿赫代数论。
	· 中国许宝騄得出样本方差的分布的渐近展开以及中心极限定理中误差大小的阶的精确估计。
	· 法国韦伊发表《拓扑群上的积分及其应用》,创立群上调和分析这一学科。
	· 英国绍司威尔提出求线性代数方程组数值解的松弛法。
	· 罗马尼亚瓦尔德提出著名的序贯概率比检验法。
	· 法国谢瓦莱和韦伊提出代数几何的相交问题。
	· 法国谢瓦莱和中国段学复用李代数方法,讨论了特征为零的任意域上的线性代数群,为线性代数群理论奠基。
	· 法国勒雷开创谱序列理论和层理论的研究。
公元 1941 年	· 中国华罗庚《堆垒素数论》完成,改进了哈代与李特伍尔德圆法,维诺格拉多夫三角和估计法等数论方法,成为 20 世纪经典数论著作之一。
	· 苏联盖尔范德将算子谱推广到巴拿赫代数中去。
公元 1942 年	· 美国莱夫谢茨《代数拓扑学》出版,这是第一次出现代数拓扑学这一名称。
公元 1942 年	· 中国陈省身证明高斯一波涅公式,是大范围微

分几何学的前驱工作。

- 美国维纳把统计方法应用于线性滤波问题，推导出连续时间滤波，为现代估计理论奠定了基础。
- 美国莫奇利提出“高速电子管计算装置的使用”的报告，这是第一台电子计算机的初始方案，也是第一个真正贯彻到底而获得成功的通用电子计算机方案。

公元 1943 年

- 美国霍珀开始为“Mark－I”计算机编制程序，开拓了计算机语言学科。
- 中国陈省身首创把纤维丛概念用于微分几何研究，后来引进了陈示性类，推进了大范围微分几何研究。

公元 1944 年

- 奥地利阿廷发现了具有关于右理想的极小条件的环，现称为阿廷环，为有理数域上的半单代数提供了新的基础。
- 美籍匈牙利人冯·诺伊曼《对策论与经济行为》出版，奠定对策论的基础，并对经济学产生重大影响。
- 法国迪厄多内提出仿集概念，这是拓扑学的重要概念，对拓扑学及注重整体分析的许多数学分支都有重要意义。
- 中国林家翘提出湍流谱相似性的普遍理论，解决了流体运动稳定性中的一个数学疑难。
- 美国艾肯制成世界上第一台通用自动计算机——“自动程控计算机”，属机电式计算机，是现代电子数字计算机的先驱。

公元 1945 年

- 美国艾伦伯格和麦克莱恩提出范畴和函子理论。
- 法国施瓦尔茨《广义函数论》出版，使广义函数论成为一个独立的数学分支。
- 美籍匈牙利人冯·诺伊曼提出离散变量自动电子计算机(EDVAC)设计方案。

公元 1946 年

- 美国莫奇利和小埃克特等人制成第一台电子计算机——ENIAC。
- 法国韦伊《代数几何学基础》出版，为代数几何学的进一步发展奠定严格的代数基础。
- 法国施瓦尔茨建立一般泛函空间的对偶性的

理论。

- 瑞典克拉默尔《统计学的数学方法》出版，标志数理统计学进入成熟阶段。
- 美国塞尔伯格给出素数定理的初等证明。
- 美国谢瓦莱建立代数几何学的交点理论。

公元 1947 年

- 美国丹齐克首次提出线性规划的名称并创建单纯形方法，为线性规划奠基。
- 罗马尼亚瓦尔德《序贯分析》出版，为序贯分析奠基。
- 法国施瓦尔茨证明 R^3 中单位球面不是谱综合集。

公元 1948 年

- 美国维纳《控制论》出版，为控制论奠定基础。
- 美国尚农“通信的数学理论”发表，为信息论奠基。
- 美国谢瓦莱和艾伦伯格建立李代数的上同调理论。
- 中国吴文俊给出计算微分流形的切丛的斯蒂菲尔－惠特尼示性类 W 的吴公式，对后来拓扑学的发展起了巨大作用。
- 中国钱伟长首创用系统摄动法处理非线性方程。

公元 1949 年

- 法国韦伊提出代数方程在有限域中解的个数的“韦伊猜想”。
- 美国莫奇利等制成二进制自动计算机 BINAC 和第一台商用计算机 UNINAC。
- 美国维纳《平稳时间序列的外推、内插和平滑及其工程应用》出版，提出维纳滤波理论，开拓了线性控制理论的研究。
- 英国威尔克斯等制成内存计算机 EDSAC，创造了标号和宏指令。
- 美国奈曼等证明了一个判定统计量充分性的方法，即因子分解定理。

公元 1950 年

- 美国福雷斯特发明计算机模拟技术。
- 英国图灵《计算机能思考吗?》发表，是机器思维问题上的经典论文。
- 法国塞尔提出一般纤维空间概念，提出束谱序列代数工具，使同伦群的计算取得突破。
- 美国邓福德创立谱算子理论。

- 中国吴文俊定义非同伦不变的拓扑不变量，引入“示嵌类”。
- 中国冯康首先解决了冯诺伊曼殆周期拓扑群的最小群的结构问题。

公元 1951 年
- 美国莫尔斯等《运筹学方法》出版，运筹学成为一类数学学科。
- 美国布里渊提出“信息与负熵等价”的著名论断和“信息负熵原理”，促进了信息论的发展。
- 英国唐斯克证明了随机过程中的不变原理。
- 美籍奥地利人阿廷提出“类结构的概念，应用群的上同调论将类域论公理化和统一化。

公元 1952 年
- 苏联格尔丰德提出超越数研究的基本方法。
- 美国考尔德伦等就最基本和最典型的情形，证明了奇异积分算子的 Z^p 可积性。从而奠定奇异积分理论的基础。

公元 1953 年
- 美国贝尔曼《动态规划理论导引》发表，提出动态规划这一学科名称，并阐述了最优性原理。
- 中国郭永怀开创奇异摄动法。
- 美国杜布《随机过程》出版，建立了随机函数理论的公理结构，推动了鞅理论的发展。
- 中国吴文俊提出构造非同伦性拓扑不变量的一个方法，并证明了“吴文俊公式”。
- 法国托姆提出协边理论，使微分拓扑学与代数拓扑学互相沟通，共同发展。
- 中国赵访熊提出解任意多个任何类型的联立方程组的迭代法——斜量法。

公元 1954 年
- 中国钱学森《工程控制论》出版，把控制论的基本理论和方法推广运用于工程控制系统，并吸收了伺服机构理论的成果。是工程控制论的奠基作。
- 荷兰范德瓦尔登《科学的觉醒》出版，是古代世界数学史的权威著作之一。

公元 1955 年
- 英国罗斯证明解析数论的罗斯定理。
- 美国惠特尼提出 R^2 到 R^3 的微分映射的分类，开创对微分映射奇点理论的研究。
- 英国哈里斯提出最大运输量问题。
- 美国谢瓦莱提出线性代数群，后来称之为“谢瓦莱群”的概念，这是有限单群分类问题的一

个重要工作。

公元 1956 年

- 美国米尔诺发现 n 维球的特殊微分结构，导致微分拓扑学的独立。
- 中国王元证明哥德巴赫猜想之命题(2,3)。
- 美国惠特尼《几何积分法》出版，用解析方法表示上同调理论，开拓微分拓扑学的新领域。
- 法国 H.嘉当和美国艾伦伯格《同调代数学》出版，是该学科的经典著作。

公元 1957 年

- 中国胡坤陞研究一类积分方程组的解的存在性和唯一性问题，取得重要成果。
- 美国贝尔曼《动态规划》出版，标志着学科的创立。

公元 1958 年

- 中国江泽涵、姜伯驹、石根华等开创不动点类理论的新方向，取得系统性结果。
- 瑞士伯奈斯《公理集合论》出版，提出一些新观点。
- 中国秦元勋对有二次代数极限环的方程，得到存在性的充要条件，由奇点和权限环决定结构的唯一性和稳定性。
- 美籍奥地利人哥德尔在关于有穷观点的扩张一文里给出一个对古典数论的构造性解释。部分地解答了 20 世纪以来关于数学基础的争论。
- 苏联庞特里亚金提出极大值原理，这是最优控制理论中的重要原理之一。

公元 1959 年

- 中国苏步青运用外微分形式对高维射影空间共轭网理论进行系统研究，取得一系列新结果。
- 日本小平邦彦完成对紧复解析曲面的分类，并且每类都建立了一个极小模型。

公元 1960 年

- 中国胡世华提出递归算法。
- 美国鲁宾逊建立非标准分析。
- 美国斯梅尔证明 5 维和 5 维以上微分流形的庞加莱猜想。
- 美国卡尔曼把状态变量引入滤波理论，得出递归滤波算法。
- 中国钱伟长建立广义变分原理，为有限元法的应用奠基。

公元1961年
- 中国陈建功得出无条件收敛的判别定理。

公元1962年
- 中国王元和潘承洞各自证明了哥德巴赫猜想之命题(1,5),(1,4)。王元还证明了(1,3)。
- 中国莫绍揆等提出原始递归算术的公理系统。
- 英国阿蒂亚和美国辛格证明了阿蒂亚—辛格指标定理,揭示了拓扑学、函数论和偏微分方程等数学分支之间的本质联系。
- 美国汤普森和菲特证明了代数学的伯恩赛德猜想,是有限单群分类工作的重大突破。

公元1963年
- 中国廖山涛在微分动力系统研究中创立典范方程组法。
- 美国丹齐克和沃尔夫改进单纯形方法,得到只经过有限次迭代即可达到最优解的方法。
- 美国科恩创用力迫法,证明了连续统假设对ZF系统的独立性。

公元1964年
- 美国纽曼得出对(x)用n次有理函数逼近得到的阶的估计远超过用n次多项式逼近的阶,在函数逼近的正问题方面跨出关键的一步。
- 中国冯康和黄鸿慈开创解椭圆型边值问题的有限元法。

公元1965年
- 中国冯康、黄鸿慈等“变分原理基础上的差分格式”发表,发展了有限元法,创造了求解偏微分方程的一整套系统化的方法。
- 美国札德“模糊集合”发表,开创模糊数学学科。
- 美国库利和图基提出随机法,在解决控制系统的计算分析和优化设计中可获得更经济的实际效果。
- 美国巴克斯提出描述ALGOL—60语言语法的表示法巴克斯范式,后为许多其他语言所采用。
- 中国陆启铿“关于常曲率Kahler流形”发表,证明常曲率流形有界域解析等价于单位超球。并提出陆启铿猜想。
- 中国王梓坤提出极限过渡法,解决了生灭过程的构造问题。

公元1966年
- 美国沃恩和霍尔提出数据结构的概念,扩大了程序设计能力。

	• 美国穆尔《区间分析》出版，第一次系统提出区间运算理论。
	• 美国弗洛伊德提出描述程序含义、论证一个程序是否有某种含义的数学方法。促进了程序设计语言的发展。
	• 英国贝克拓广数论中的格尔丰德定理。
	• 中国陈景润证明哥德巴赫猜想之命题(1,2)，这是现在的最好结果。
公元 1967 年	• 英国阿蒂亚和美国博特把莱夫谢茨的不动点定理推广到包括椭圆复形的情况，使不动点定理得到广泛应用。
公元 1968 年	• 美国汤普森"论其局部子群皆可解的不可解有限群"的系列论文先后发表，推进了有限单群的分类工作。
	• 美国贝塔朗菲《一般系统论的基础、发展和应用》出版。创建了一般系统论。
公元 1969 年	• 比利时普里戈金《结构、耗散和生命》发表，创立了耗散结构理论。
	• 法国托姆《生物学中的拓扑模型》出版，首次在奇点分类的基础上提出一个描述突变现象的数学模型。后来创立了突变理论。
	• 英国霍尔首次用公理系统定义了一类程序设计语言的语义。
公元 1970 年	• 中国苏步青开始把微分几何用于工程中的几何外形设计，在中国开创了计算几何学。
	• 中国侯振挺提出最小非负解方法，得出保守 Ω 过程的唯一性准则。
公元 1971 年	• 德国艾肯提出"超循环理论"。
	• 英国霍尔提出微分处理器的设想，并研制成微处理器，为计算机微型化、普及化开辟了道路。
	• 美籍苏联人扎里斯基《代数曲面》出版，开创以赋值论方法来处理代数曲面的奇性分解问题。
公元 1972 年	• 美国 M. 克莱因《古今数学思想》出版，是一部公认的数学史佳作。
	• 法国孔涅在算子代数研究中，解决了冯・诺伊曼代数的分类问题。
	• 美国戈朗斯坦提出有限单群分类工作方案。
公元 1973 年	• 比利时德利涅证明有限域上的黎曼—韦伊猜

	想。
	·中国许永华提出"非结合非分配环"概念;用一般方法对环进行统一研究。
	·苏联罗蒙诺索夫证明了任何与紧算子可变换的算子都有非平凡的变子空间。
	·中国杨乐和张广厚在亚纯函数和整函数的亏值和奇异方向等方面获得重要成果。
公元 1974 年	·苏联马尔古利斯解决了关于李群的离散子群的赛尔伯格猜想。
公元 1975 年	·美籍华人陈省身把微分几何应用于理论物理学,取得一系列深刻的结果。
	·荷兰戴克斯特拉提出基于最弱前置条件的公理语义学描述方法,成为程序设计方法的一个基本概念。
	·美国奥本哈姆和谢弗《数学信号处理》出版,是该领域的一本基础性著作。
公元 1976 年	·中国丘成桐证明了微分几何中的"卡拉比猜想"。
	·荷兰戴克斯特拉《程序设计方案》出版,是结构程序设计的权威著作,为程序设计方法学提供了基础。
	·美国阿佩尔和哈肯利用计算机辅助证明证明了"四色定理"。
	·德国哈肯《协同学导论》出版,开创协同学。
公元 1977 年	·美国帕里斯等人发现算术中存在的自然不可判定的命题。
公元 1978 年	·中国丘成桐与美国舍恩用微分几何方法证明了广义相对论的正质量猜想。
	·德国哈肯《协同学:最新趋势与发展》发表,发展协同学。
公元 1979 年	·中国夏道行引入"半亚正常算子"概念,建立了它的奇异积分模型。
	·中国洪加威发现并行时间和空间的某些对称性质,提出相似性原理。
	·苏联哈奇扬提出线性规划的多项式算法(椭球算法)。
	·美国瑟斯顿建立三维流形的拓扑和几何结构之间的关系。

公元1980年
- 中国越民义等提出非线性规划的一个新的既约梯度法，并证明其收敛性。

公元1981年
- 美籍芬兰人阿尔福斯创立几何函数论的有效新方法。
- 美国弗里德曼证明4维的庞加莱猜想。
- 经世界上许多国家上百名数学家的努力，完全解决了有限单群的分类问题，即找出有限单群的所有的同构类。这是当代数学的一个非凡的成就。

INDEX OF ARTICLES

Mathematics in China and Foreign Parts

Mathematicians

Mathematical Classics

Mathematical Subjects

Philosophy of Mathematics and Mathematical Methodology

Mathematics Education

Mathematical signs and symbols

Mathematical Great Problems and Mathematical Conjectures

Mathematical Competitions and Mathematical Prizes

Mathematical Schools

Periodicals、reference books、some series of books in mathematics

主要参考文献

一、书籍

〔1〕 Bell, E. T., The Development of Mathematics, Second Edition , McGraw-Hill Book Company, 1945.

〔2〕 Boyer, C. B. A History of Mathematics, John Wilen & Sons. Inc., 1968.

〔3〕 Boyer, C. B., History of Analytic Geometry, New York, 1956.

〔4〕 Cajori, F., A History of Mathematics, The Macmillan Company, 1924.

〔5〕 Cajori, F., A History of Mathematical Notations, The Open Court Publishing Company, 2 vol. 1928—1929.

〔6〕 Cajori, F. A History of Elementary Mathematics, Macmillan, 1929 (中译本«初等算学史», 商务印书馆, 1931).

〔7〕 Coolidge, J. L., A History of Geometrical Methods, Oxford University Press, 1947.

〔8〕 Dieudonné, J., History of Functional Analysis, Amsterdam, NorthHolland Pub., 1981.

〔9〕 dwards, C. H., The History Developments of the Calculus, Springer-Verlag, 1979 (中译本«微积分发展史», 北京出版社, 1987).

〔10〕 Eves, H., An Introduction to the History of Mathematics, CBS College Publishing, 1983 (中译本«数学史概论», 山西人民出版社, 1986).

〔11〕 Fauvel, J. & Gray, J., The History of Mathematics: A Reader, London, 1987.

〔12〕 Gillispie, C. C., Dictionary of Scientific Biography, Charles Scribner's Sons, Vol. I～XVI, 1970—1981.

〔13〕 Karpinski, L. C., The History of Arithmetic, Rand McNally, 1925.

〔14〕 Kline, M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, New York, 1972 (中译本«古今数学思想», 上海科学技术出版社, 1979—1981).

〔15〕 Neugebauer, O., The Exact Sciences in Antiquity, Brown University Press, 1957.

〔16〕 Newman, J. R., The World of Mathematics, New York, 1956.

〔17〕 Pearson, E. S. & Kendall, M. G., Studies in the History of Statistics and Probability, London, 1977—1978.

〔18〕 Sanford, V., A Short History of Mathematics, Houghton Mifflin, 1930.

〔19〕 Smith, D. E., History of Mathematics, Ginn and Company, 2 Vol., 1923—1925.

〔20〕 Smith, D. E., A Source Book in Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1929.

〔21〕 Struik, D. J., A Concise History of Mathematics, Dover Publications, Inc., 1948(中译本«数学简史», 科学出版社, 1956).

〔22〕 Struik, D. J., A Source Book in Mathematics, 1200—1800, Cambridge, Mass. Harvard Univ. Press, 1969.

〔23〕 Van der Waerden, B. L., Science Awakening, P. Noordhoff Ltd-Groningen Holland, 1954.

〔24〕 Van der Waerden, B. L., A History of Algebra, Springer-Verlag, 1985.

〔25〕 Van der Waerden, B, L., Geometry and Algebra in Ancient Civillization, Springer-Verlag, 1983.

〔26〕 Weil, A., Number Theory, Birkhäuser, 1984.

〔27〕 Беляев, Философские и методологические проблымы математики, M., 1981.

〔28〕 Бурбаки, Н., Очерки истории математики, M., 1963.

〔29〕 Колмогоров, А. Н., Юшкевич, А. П., Математика XIX века, M., 1978—1987.

〔30〕 Никифоровский, В. А., Иэ истории алгебры XVI-XVII вв., M., 1979.

〔31〕 Рыбников, К. А., История математики., M., 1960.

〔32〕 Рыбников, К. А., Введение в методологию математики, M., 1979.

〔33〕 Юшкевич, А. П., История математики в средние века, M., 1961.

〔34〕 Яглом, И. М., Математические структуры и математическое моделирование, M., 1980.

〔35〕 〔英〕斯科特, «数学史»(中译本), 商务印书馆, 1981.

〔36〕 〔美〕A·吉特尔曼, «数学史»(中译本), 科学普及出版社, 1987.

〔37〕 〔英〕李约瑟, «中国科学技术史»第三卷数学(中译本), 中华书局香港分局, 1980.

〔38〕 〔美〕卡尔·B·波耶, «微积分概念史»(中译本), 上海人民出版社, 1977.

〔39〕 〔希〕欧几里得, «几何原本»(中译本), 陕西科学技术出版社, 1990.

〔40〕 〔德〕D·希尔伯特, «几何基础»(中译本), 科学出版社, 1987.

〔41〕 〔美〕N·维纳, «控制论»(中译本), 科学出版社, 1985.

〔42〕 〔美〕克林, «元数学导论»(中译本), 科学出版社, 1985.

〔43〕 〔苏〕И·A·阿波京等, «计算机发展史», 上海科学技术出版社, 1984.

〔44〕 〔美〕R·柯朗, «数学是什么»(中译本), 湖南教育出版社, 1985.

〔45〕 〔苏〕A·Д·亚历山大洛夫等, «数学—它的内容、方法和意义»(中译

本)，科学出版社，1984.
〔46〕〔美〕G·波利亚，«数学与猜想»(中译本)，科学出版社，1984.
〔47〕〔英〕B·A·W·罗素，«西方哲学史»(中译本)，商务印书馆，1983.
〔48〕〔希〕亚里士多德，«形而上学»(中译本)，商务印书馆，1984.
〔49〕«数学史译文集»，上海科学技术出版社，1981.
〔50〕«数学史译文集续集»，上海科学技术出版社，1985.
〔51〕日本数学会，«数学百科辞典»(中译本)，科学出版社，1984.
〔52〕«中国大百科全书·数学»，中国大百科全书出版社，1988.
〔53〕«中国大百科全书·天文学»，中国大百科全书出版社，1980.
〔54〕«中国大百科全书·物理学»，中国大百科全书出版社，1987.
〔55〕«中国大百科全书·力学»，中国大百科全书出版社，1985.
〔56〕«中国大百科全书·教育»，中国大百科全书出版社，1985.
〔57〕«中国大百科全书·哲学»，中国大百科全书出版社，1987.
〔58〕李俨，«中算史论丛»，1～5集，中国科学院，1954—1955.
〔59〕李俨：«中国数学大纲»，上、下册，科学出版社，1958.
〔60〕钱宝琮主编，«中国数学史»，科学出版社，1981.
〔61〕钱宝琮校点，«算经十书»，上、下册，中华书局，1963.
〔62〕«钱宝琮科学史论文选集»，科学出版社，1983.
〔63〕梁宗巨，«世界数学史简编»，辽宁人民出版社，1980.
〔64〕梁宗巨主编，«数学家传略辞典»，山东教育出版社，1989.
〔65〕钱宝琮等，«宋元数学史论文集»，科学出版社，1985.
〔66〕梅荣照主编，«明清数学史论文集»，江苏教育出版社，1990.
〔67〕«科技史文集»第8辑·数学史专辑，上海科学技术出版社，1982.
〔68〕«科学史集刊»11，地质出版社，1984.
〔69〕«中国数学史论文集»1～3集，山东教育出版社，1984～1987.
〔70〕«20世纪科学技术简史»，科学出版社，1985.
〔71〕秦九韶，«数书九章»，商务印书馆，1937.
〔72〕李冶，«测圆海镜»，同文馆集珍版，1876.
〔73〕朱世杰，«四元玉鉴»，商务印书馆，1937.
〔74〕阮元等，«畴人传»，商务印书馆，1955.
〔75〕徐利治，«数学方法论选讲»，华中工学院出版社，1983.
〔76〕夏基松等，«西方数学哲学»，人民出版社，1986.
〔77〕马忠林等，«数学教育史简编»，广西教育出版社，1991.
〔78〕«英汉数学词汇»(第二版)，科学出版社，1982.
〔79〕齐玉霞主编，«汉英数学词汇»，科学出版社，1986.

二、杂志

〔1〕 Historia Mathematica (International Journal of History of Mathematics),

Academic Press, New York.
〔2〕 The Mathematical Intelligencer, Springer-Verlag, New York.
〔3〕 Archive for History of Exact Sciences, Springer-Verlag, Berlin.
〔4〕 Историко-математические исследования, . Вып. I—XXXI, M.
〔5〕 Isis; An International Review Devoted to the History of Science and its Cultural Influences, Seattle, Washington.
〔6〕 «数学译林», 中国科学院数学研究所.
〔7〕 «科学史译丛» (至1989年), 中国科学院自然科学史研究所.
〔8〕 «自然科学史研究», 中国科学院自然科学史研究所、中国科学技术史学会主办, 科学出版社出版.
〔9〕 «中国科技史料», 中国科学技术协会主办, 中国科学技术出版社出版.
〔10〕 «自然辩证法通讯», 中国科学院自然辩证法通讯杂志社.
〔11〕 «中国数学会通讯», 中国数学会办公室.